第 22 卷 第 3 期
2001 年 5 月

航 空 学 报
ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA

Vol.22 No.3
May 2001

文章编号: 1000-6893(2001)03-0240-04

一种 trimmed 曲面的半自适应离散方法

沈庆云[1], 范彦斌[1], 沈自林[1], 周儒荣[2]

(1 佛山大学 思源机电一体化研究所, 广东 佛山 528000)

(2 南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心, 江苏 南京 210016)

ALGORITHM FOR SEMI-ADAPTIVE TESSELLATION OF TRIMMED SURFACE

SHEN Qing-yun[1], FAN Yan-bin[1], SHEN Zi-ling[1], ZHOU Ru-rong[2]

(1. Siyuan Mechatronics Institute, Foshan University, Foshan 528000, China)

(2. Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

摘 要: 提出了一种 trimmed 曲面的半自适应离散算法。该算法通过对曲面的参数域进行预剖分, 以及引进参数曲面上一点处的"最大法曲率"的概念, 采用分区域处理的方法分片对 trimmed 曲面的有效参数域进行三角形网格剖分。该方法计算速度快,能根据曲面的法曲率变化来控制 trimmed 曲面三角化剖分的密度,并可有效地避免在三维空间产生奇异三角形与"裂缝"。

关键词: 半自适应; trimmed 曲面; 离散; 计算机辅助设计; 曲面造型

中图分类号: V260.5 文献标识码: A

Abstract: A semi-adaptive tessellation algorithm of trimmed surface is presented. By pre-dividing the parametric region of the surface, and introducing the concept "maximum normal curvature" at a point on the parametric surface, the method adopts "divide and conquer" approach triangulating the valid parametric region of the trimmed surface piecewise. Computing in high efficiency, the method can control triangulation density with respect to the change of normal curvature of the surface, and can avoid producing singular triangles and "cracks" in 3-D space.

Key words: semi-adaptive; trimmed surface; tessellation; CAD; surface modeling

衡量裁剪曲面三角化算法优劣的 3 个基本技术指标是: 整个三角化处理过程的运行速度; 产生的三角形平面片的质量; 产生的三角形平面片的数量。但近年发表的关于裁剪曲面三角化的文章[1~4]一般只重视前 2 个指标。作者认为不能只考虑三角化过程本身的运行速度, 还应考虑以三角化结果为输入数据的应用程序的运行速度。三角化只是手段和工具。如果一个曲面三角化算法只追求自身运行速度快, 则会产生过量的三角片, 这种'副作用'必然会严重影响后续应用程序的运行速度。

产生过量三角片的原因有 2 个方面:

(1) 把曲面的最大曲率作为整张曲面的曲率, 使得在比较平坦的区域产生的三角片数量严重过量; (2) 在二维参数空间进行三角化时, 计算三角形最大边长的误差估计公式都是通过不等式的不断放大得到的。为了最后能得到一个用已知参数表达的结果, 不等式的放大方法十分保守, 最后得到的结果已严重偏离实际值。

本文提出的"半自适应"三角化算法既有自适应方法的只产生少量三角片的优点, 又有非自适应方法那样的处理速度。该算法可用于 trimmed 曲面的真实感图形实时显示、曲面求交、数控加工刀具轨迹生成及干涉检查等方面。

设曲面 $S=S(u,v)$ $(u, v\in[0,1])$, 则算法的基本步骤为:

(1) 计算曲面的 u 向长度 l_u 与 v 向长度 l_v;

(2) 由 l_u, l_v 及设定基数 $G_{\min}$, 确定曲面参数域的 u, v 方向预剖分网格数 N_u, N_v;

(3) 求出曲面在每个预剖分网格内的最大法曲率 K, 由 K 确定此网格的均匀细分密度参数 D_g;

(4) 把每个预剖分网格划分为 1 个矩形内核和 4 个梯形区域, 并对每个梯形区域作特别的三角形网格剖分, 以避免相邻预剖分网格在交界处产生"裂缝";

收稿日期: 2000-06-27; 修订日期: 2000-11-20
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2001/03/0240/

(5) 对预剖分网格内每个单元矩形网格及单元三角形网格, 按文献[5]介绍的方法进行处理。最后将得到的裁剪曲面参数域上三角剖分结果, 按曲面定义映射到三维空间。

1　计算曲面的 u, v 向长度 l_u, l_v

在对参数曲面进行三角化时, 一般都假定参数域上形状良好的三角形映射到三维空间后仍能保持良好的形状。实际上有的产品的外形是一张长条形曲面, 其参数域上形状良好的三角形映射到三维空间后一般不再具有良好的形状, 甚至变成十分狭长的奇异三角形。为了保证三维空间的三角片质量, 需要考虑参数曲面沿 u,v 两个方向的长度比。

定义 1　设参数曲面 $S(u,v)$ 定义于规范区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上, $v_i = i/m$, $u_j = j/m$ $(i,j = 0, 1, 2, \cdots, m)$。取 $m+1$ 条 u 向等参数线 $S(u,v_i)$ 长度的平均值作为曲面的 u 向长度 l_u。类似地可定义曲面的 v 向长度 l_v。即

$$l_u = \frac{\sum_{i=0}^{m}\int \|\boldsymbol{S}_u(u,v_i)\|\,\mathrm{d}u}{m+1} \tag{1}$$

$$l_v = \frac{\sum_{j=0}^{m}\int \|\boldsymbol{S}_v(u_j,v)\|\,\mathrm{d}v}{m+1} \tag{2}$$

若计算弧长的定积分难以直接求出, 可以用逼近弧长的 N 个折线段的长度之和, 近似作为等参数线的长度。

$$l_u \approx \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{N}\|\boldsymbol{S}_v(u_k,v_i) - \boldsymbol{S}_u(u_{k-1},v_i)\|}{m+1} \tag{3}$$

$$l_v \approx \frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N}\|\boldsymbol{S}_v(u_j,v_k) - \boldsymbol{S}_u(u_j,v_{k-1})\|}{m+1} \tag{4}$$

2　确定曲面参数域的 u,v 方向预剖分网格数

设定预剖分网格数的基数 $G_{\min}$, 求出比例因子

$$e = \frac{\max(l_u,l_v)}{\min(l_u,l_v)} \tag{5}$$

取另一基数 $G_{\max} = \mathrm{int}(e\times G_{\min})$。这里函数 int 表示不小于自变量的最小整数。

现在可以确定曲面参数域的 u,v 方向预剖分网格数 N_u, N_v:

若 $l_u \geq l_v$, u 向预剖分网格数 $N_u = G_{\max}$, v 向预剖分网格数 $N_v = G_{\min}$; 否则, 取 $N_v = G_{\max}$, $N_u = G_{\min}$。

求出 u,v 方向预剖分网格数 N_u, N_v 之后, 将规范参数域初步均分成 $N_u\times N_v$ 个预剖分矩形网格。

3　确定预剖分网格内的最大法曲率 K

定义 2　参数曲面上一点处两个主曲率的绝对值最大者, 称为该点的最大法曲率, 记为 $K_{\max}$。

根据微分几何理论[6], 用 E, F, G; L, M, N 分别表示第 1 类与第 2 类基本量, 并记 $A = EG - F^2$, $B = -(EN - 2FM + GL)$, $C = LN - M^2$, 则由最大法曲率的定义, 从主曲率方程可以推出

$$K_{\max} = \frac{|B| + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{6}$$

要求出预剖分网格内的最大的最大法曲率 K 的精确值是极其困难的。可以在预剖分网格内分布若干个点, 求出其中最大的一个最大法曲率, 然后乘上一个大于 1 的系数作为 K 的近似值。一个简单而有效的方法是, 在预剖分网格 $[a,b]\times[c,d]$ 内均匀分布 $n\times n$ 个采样点 $p_t(u_i,v_j)$, $(i,j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$u_i = a + \frac{i}{(n+1)}(b-a), \tag{7}$$

$$v_j = c + \frac{j}{(n+1)}(d-c) \tag{8}$$

设点 $p_t(u_i,v_j)$ 的最大法曲率为 $K_{\max}(i,j)$, 取

$$K = \mathrm{coef}(n)\max_{1\leq i,j\leq n} K_{\max}(i,j) \tag{9}$$

其中: $\mathrm{coef}(n) = C + 1/n$, ($C > 1$ 为常数)

定义 3　称 $R = 1/K$ 为预剖分网格的最小曲率半径。

按定义 1 的方法计算曲面在预剖分网格 $[a,b]\times[c,d]$ 内的两个方向的最大边长, 取其中最大者作为该预剖分网格的最大边长, 记为 L。

定义 4　设曲面上曲线的逼近精度为 ϵ, 预剖分网格的最小曲率半径为 R。如图 1(a) 所示, 当 $\epsilon \leq R$ 时, $\theta = \arccos[(R-\epsilon)/R]$, 弦 p_1p_2 对应的劣弧称为单元弧长, 记作 ΔL, $\Delta L = 2R\theta$。当 $R < \epsilon \leq 2R$ 时, $\theta = \arccos[(\epsilon - R)/R]$, 弦 p_1p_2 对应的优弧为单元弧长, $\Delta L = 2R(\pi - \theta)$。当 $\epsilon > 2R$ 时, 规定 $\Delta L = 2R\pi$。

下面来确定预剖分网格的细分密度。

单元弧长 ΔL 就是三角形的最大边长。因此, 预剖分网格的子网格边长取为

$$L_g = (\sqrt{2}/2)\Delta L \tag{10}$$

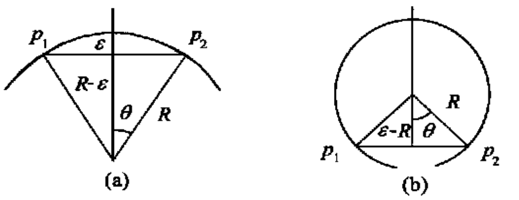

图 1 单元弧长

Fig. 1 Unit arc length

就能保证子网格沿其对角线分割成的两个三角形的最大边长为 ΔL, 于是预剖分网格的细分密度可取为

$$D_g = \text{int}\left(\frac{L}{L_g}\right) \tag{11}$$

即将预剖分网格均匀分成 $D_g \times D_g$ 个单元网格。

现在来分析一下参数曲面三角剖分的容差 T 与上述曲线的逼近精度 ϵ之间存在什么关系。

如图2(a), $\triangle ABC$ 小平面逼近三曲边曲面片 ABC, 曲面片上的 p 点到$\triangle ABC$ 平面片的距离为 d。设平面 π 是曲面在A 点的切平面, 且 C 点偏离平面 π的距离较 B 点更远, D 点是 C 点在平面 π 上的垂直投影点。不难看出, $d \leq \overline{CD}$。在图 2(b) 中, α_1 与 α_2 互为余角。

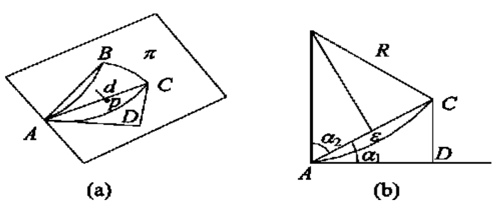

图 2 曲面上点到三角片的最大距离

Fig. 2 Maximum distance between a point on surface and triangle plane

$$\overline{CD} = \overline{AC}\sin(\alpha_1) \tag{12}$$

$$\overline{AC} = 2\sqrt{R^2 - (R - \epsilon)^2}, \tag{13}$$

$$\sin(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) = \overline{AC}/(2R) \tag{14}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC}^2/(2R) = 4(R^2 - (R - \epsilon)^2)/(2R) = 4\epsilon - 2\epsilon^2/R < 4\epsilon \tag{15}$$

所以, 若取 $\epsilon = T/4$, 三角形$\triangle ABC$ 平面片对三曲边曲面片 ABC 的逼近容差不超过 ϵ。

4 相邻预剖分网格的相容性

如果直接按细分密度 D_g 将预剖分网格细分为 $D_g \times D_g$ 个均匀单元网格, 那么相邻预剖分网格会因为细分密度不同在公共边界处不相容, 如图 3(a) 所示。解决这个问题的 1 个方法是: 将预剖分网格划分成 5 个区域, 如图 3(b) 所示, 中间 $(D_g - 2) \times (D_g - 2)$ 个单元网格组成的区域称为内核区, 内核区的上、下、左、右边界分别与预剖分网格的上、下、左、右边界构成了上、下、左、右 4 个梯形区域。为了保证划分的成立, 规定 $D_g \geq 2$。当 $D_g = 2$ 时, 内核区退化成一点。接下来的问题是如何细分这 4 个梯形区域。设预剖分网格 $G_{i,j}$ ($i = 1, 2, \cdots, N_u$; $j = 1, 2, \cdots, N_v$) 的细分密度为 $D_{gi,j}$, 其上梯形区与其上侧相邻的预剖分网格 $G_{i+1,j}$的下梯形区相邻, 具有公共边界。将公共边界均匀分割成 $\max(D_{gi,j}, D_{gi+1,j})$ 个子线段, 即在公共边界内均匀插入 $\max(D_{gi,j}, D_{gi+1,j}) - 1$ 个点, 然后用公共边界上的点与预剖分网格 $G_{i,j}$ 的内核区上边界上的点, 采用适当的方法构造三角形单元网格。其它梯形区域的处理方法完全类似。

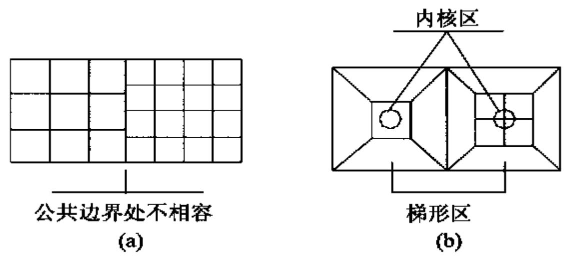

图 3 预剖分网格的划分

Fig. 3 Division of pre-dividing mesh

下面只介绍上梯形区的三角形分割方法。如图 4 所示, 设梯形区的上底上的点为 Top = {B[i]}($i = 1, 2, \cdots, n$), 下底上的点为 Bottom = {A[j]}($j = 1, 2, \cdots, m$), P 点的 u, v 坐标记为 $P.u$, $P.v$, 显然 $n - m \geq 2$。具体算法用伪 C 代码描述如下:

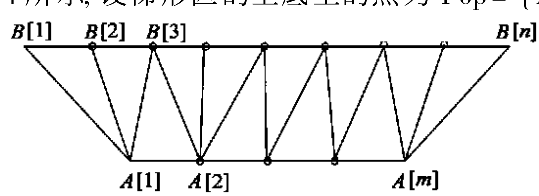

图 4 上梯形区的三角形分割方法

Fig. 4 Triangulation of upper trapezoid

```
jxqysjh(A, B, m, n)
double A[], B[];
int m, n;
  {
   int i, j, k, s, e;
  s = 1;
  for(j = 1; j < = m; j+ + )
   {
  if(j = = m)
   {
```

```
    for(i = s; i < n; i+ + )
       构造(△A[j]B[i]B[i+ 1];
    break;
   }
  for(i = s+ 1; i < = n; i+ + )
   {
    if(B[i].u > A[j+ 1].u)
     { e = i - 1;  break; }
   }
  for(k = s; k < e; k+ + )
       构造△A[j]B[k]B[k+ 1];
  构造△A[j]B[e]A[j+ 1];
        s = e;
      }
}
```

5　预剖分网格的三角化处理

如果一个预剖分网格在裁剪曲面的有效参数域之外,则弃之。如果预剖分网格在有效参数域之内,则吸收其所有单元矩形网格及单元三角形网格,并将单元矩形网格沿对角线划分为两个三角形网格。如果预剖分网格的外边界与有效参数域的边界相交,或包含后者的某个外环或内环,则需判断每个单元矩形网格及单元三角形网格相对有效参数域的位置关系,然后按文献[5]的方法处理即可。

6　从二维参数域到三维空间的映射

预剖分网格处理完之后,可以依曲面的定义,将每个三角形网格映射到三维空间。因映射过程不改变原拓扑关系,故预剖分网格内的每个点只需计算一次,只是预剖分网格边界上的点存在重复计算。

7　结论与实例

本文介绍的 trimmed 曲面三角化离散算法已用 C 语言编程,在南京航空航天大学开发的'超人'CAD/CAM 集成系统中实现。图 5 是用本文方法对一张 trimmed 曲面进行半自适应三角化离散的结果。

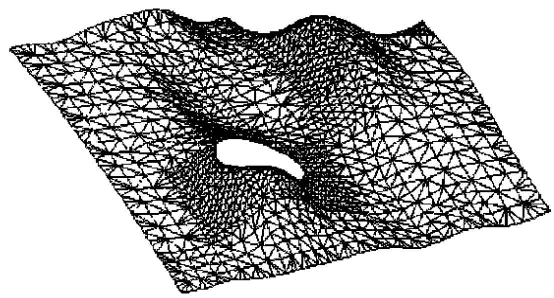

图 5　trimmed 曲面的三角化离散

Fig.5　Tessellation of trimmed surface

参　考　文　献

[1]　姚承悱. Bézier 曲面的适应性细分和三角化的四叉树方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1992, 4(4): 1～8.

[2]　季敏雯, 杨长贵, 孙家广. Trimmed NURBS 曲面参数域的快速三角化算法[J]. 计算机学报, 1996, 19(6): 450～456.

[3]　Sheng X, Hirsch B E. Triangulation of trimmed surfaces in parametric space[J]. CAD, 1992, 24(8): 437～444.

[4]　Piegl L, Richard A M. Tessellating trimmed NURBS surfaces[J]. CAD, 1995, 27(1): 16～26.

[5]　沈庆云, 周儒荣. 一种 trimmed NURBS 曲面的均匀三角化[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(5): 569～574.

[6]　吴大任. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986. 161～167.

作者简介:

沈庆云　男, 1964 年生, 博士, 讲师。主要研究方向: 机械 CAD/CAM 系统研究及其软件开发。

范彦斌　1962 年生, 博士, 副教授。主要研究方向: CAD/CAM, 计算机图形学现代制造技术。