

文章编号: 1000-6893(2001) 01-0064-05

齿轮减速器系统可变固有特性动力学研究

邵忍平, 沈允文, 孙进才

(西北工业大学 机械工程系, 陕西 西安 710072)

DYNAMIC ANALYSIS OF VARIABLE NATURAL CHARACTERISTIC FOR GEAR DECELERATOR

SHAO Ren-ping, SHEN Yun-wen, SUN Jin-cai

(Department of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

摘要: 考虑到齿轮传动啮合刚度的波动和传动误差的影响以及轴承支撑刚度的作用, 对二级齿轮减速器传动系统进行了理论建模和动态响应分析, 并与实验结果进行了比较。结果表明, 齿轮传动在单齿啮合区和双齿啮合区之间啮合刚度变化较大; 减速器系统的动态特性(固有频率、固有振型、阻尼等)随啮合周期而发生变化, 呈现出一种可变的动态固有特性。故对于系统进行研究时, 可分别按单齿区和双齿区平均啮合刚度进行分析, 一般可以满足实际工程要求。

关键词: 齿轮减速器; 时变啮合刚度; 传动误差; 轴承刚度; 动态固有特性; 动力学分析

中图分类号: TH113.1 文献标识码: A

Abstract: A gear decelerator is a complex elastic system with multiple transmission. Its dynamic characteristic appears as nonlinear varying phenomena because of the nonlinear influence of gear meshing stiffness and transmission error as well as the nonlinear action of bearing supporting stiffness. The system stiffness was analyzed always by a fixed-constant method; in fact, it did not accord with the practice of engineering. In this paper, the fluctuation of gear meshing stiffness, the influence of transmission error, and the action of bearing supporting stiffness are considered all together. And the theoretic modeling and dynamic response analysis are done for the transmission system with bi-grade taper cylinder gears. The nonlinear terms of the transmission error are dealt with the method of Fourier series expansion. Furthermore, the theoretic analysis is compared with the experimental results. It is shown that the meshing stiffness of gear transmission varies evidently between the single-toothed meshing zone and double-toothed meshing zone, but it varies slowly in the same meshing zone. The dynamic characteristics of the decelerator, i. e. the natural frequency, the mode shape and so on, vary with meshing period. It appears to be a variable natural characteristic. Therefore, the multiple gear transmission system shall be analyzed according to the mean meshing stiffness of the single-toothed meshing zone and double-toothed meshing zone respectively, and in doing so, it may meet the requirements of engineering.

Key words: gear decelerator; meshing stiffness; transmission error; bearing stiffness; dynamic natural characteristic; dynamic analysis

齿轮减速器是具有多级传动的复杂弹性系统, 由于其传动路线较长, 组成的环节较多, 加之齿轮啮合时的时变刚度和加工误差随啮合位置不同的非线性影响以及轴承随载荷等不同的非线性支承刚度的作用, 使系统的动态特性呈现非线性变化趋势。因此用以往的定常分析方法来研究^[1], 是不符合工程情况的。本文将齿轮啮合刚度按时变情况来处理, 将非线性传动误差, 按照 Fourier

级数展开, 并考虑了轴承支承刚度的影响, 建立了减速器系统动力学模型并进行了动力学分析, 计算了系统的固有特性并与实验进行了对比。

1 理论建模和动态响应分析

齿轮减速器一般具有多级齿轮传动, 现以二级齿轮传动系统为例进行研究。图 1 为二级圆锥圆柱齿轮减速器, 输入扭矩 T_1 , 输出扭矩 T_2 。

设各质量原件的位移分别为 $\theta_i (i = 1, \dots, 5)$, $z_1, y_i (i = 1, \dots, 6)$, $x_i (i = 3, \dots, 6)$, 各齿轮对的传动误差为 e_{11} 和 e_{12} , 各齿轮的基圆半径为 r_{1i}

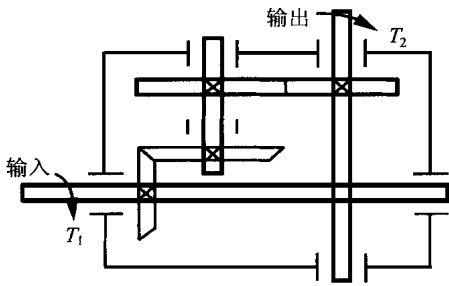


图 1 齿轮减速器简图

Fig. 1 Dynamic model of decelerator

($i = 2, \dots, 5$)。考虑到时变啮合刚度 K_{i1}, K_{i2} (随时间和啮合位置不同而变化) 和传动误差 e_{i1}, e_{i2} (随啮合位置不同而发生变化) 影响后, 根据力学原理, 可建立起下列振动微分方程

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K(t)x = F(t) \quad (1)$$

其中: M 为质量矩阵

$$M = \text{diag}[I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, m_2, m_2, m_3, m_3, m_4, m_4, m_5, m_5]$$

$$x = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ z_1 \ y_1 \ y_3 \ x_3 \ y_4 \ x_4 \ y_6 \ x_6]^T$$

$$F(t) = [T_1, r_{b2} \sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1}, -r_{b3} \sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1}, r_{b4} \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2}, -r_{b5} \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2}, -T_2, \sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1}, 0, -\sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1}, 0, \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2}, 0, -\sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2}, 0]^T$$

K_{i1} 和 K_{i2} ($i = 1, 2$) 分别为第 1 级和第 2 级齿轮副啮合刚度离散值, $i = 1$ 为双齿啮合刚度, $i = 2$ 为单齿啮合刚度; n 和 N 分别为同时啮合的齿对数 ($n = 2, N = 2$); C 为阻尼矩阵, 为 13 阶带状矩阵;

由于啮合刚度 K_i 是时间的周期函数^[2], 在一个啮合周期内随啮合位置不同而发生变化, 故将其分成为定常部分 K 和波动部分 ΔK 来处理即

$$K_{i1} = \bar{K}_{i1} + \Delta K_{i1}(t), \quad K_{i2} = \bar{K}_{i2} + \Delta K_{i2}(t),$$

$$K(t) = K + \Delta K(t)$$

$$K(t) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_{13 \times 13}$$

其中:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -K_{\theta} & -K_{\theta} & 0 \\ -K_{\theta} & K_{\theta} + K_{t1}r_{b2}^2 & -K_{t1}r_{b3}r_{b2} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{t1}r_{b2} \\ -K_{\theta} & 0 & -K_{t1}r_{b3} \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{t1}r_{b2} & 0 \\ 0 & K_{t1}r_{b3} & 0 \end{bmatrix}; \quad K_{14} = [0]_{3 \times 4}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{t1}r_{b2} & -K_{t1}r_{b3} \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} K_{\theta} + K_{t2}r_{b4}^2 & -K_{t2}r_{b5}r_{b4} & 0 \\ -K_{t2}r_{b5}r_{b4} & K_{\theta} + K_{t2}r_{b5}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{z1} + K_{t1} \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{t1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{24} = \begin{bmatrix} K_{t2}r_{b4} & 0 & -K_{t2}r_{b4} & 0 \\ -K_{t2}r_{b5} & 0 & K_{t2}r_{b5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{t1}r_{b2} & K_{t1}r_{b3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{t1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = \begin{bmatrix} K_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y3} + K_{t1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{x3} \end{bmatrix}; \quad K_{34} = [0]_{3 \times 4}$$

$$K_{41} = [0]_{4 \times 3}$$

$$K_{42} = \begin{bmatrix} K_{t1}r_{b4} & -K_{t2}r_{b5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K_{t2}r_{b4} & -K_{t2}r_{b5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_{43} = [0]_{4 \times 3}$$

$$K_{44} = \begin{bmatrix} K_{y4} + K_{t2} & 0 & -K_{t2} & 0 \\ 0 & K_{x4} & 0 & 0 \\ -K_{t2} & 0 & K_{y6} + K_{t2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x6} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

相应地: $x = \bar{x} + \Delta x$, $F(t) = \bar{F} + \Delta F(t)$, 由于 $\ddot{x} = \Delta \ddot{x}$, $\ddot{\bar{x}} = \Delta \ddot{\bar{x}}$, $F = K \bar{x}$, 则: $K(t)x = K\Delta x + K\bar{x} + \Delta K(t)\bar{x} + \Delta K(t)\Delta x$

略去二阶微量 $\Delta K(t)\Delta x$, 那么式(1)可表示为 $M\Delta \ddot{x} + C\Delta \dot{x} + \bar{K}\Delta x = \Delta F(t) - \Delta K(t)\bar{K}^{-1}\bar{F}$

(2)

式中: $\bar{F} = [T_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -T_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$;

$$r_{b4} \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2} - r_{b5} \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2} - \sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1} = 0$$

$$-\sum_{i=1}^n K_{i1} e_{i1} = 0 \quad \sum_{i=1}^N K_{i2} e_{i2} = 0 \quad -\sum_{i=1}^n K_{i2} e_{i2} = 0 \quad 0]^T$$

那么: $\Delta F(t)$ 和 $\Delta K(t)$ 是随啮合点位置不同而取不同的值, 在该两项作用下系统发生强迫振动。在此 $\Delta K(t)$ 可用 K_{11} 和 K_{12} 的微分来近似表示即

$$\Delta K(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial K_{11}} \Delta K_{11} + \frac{\partial K(t)}{\partial K_{12}} \Delta K_{12} \quad (3)$$

将一个啮合周期 T_z 分成若干个啮合时间段 ΔT_z , 在每个 ΔT_z 内认为 ΔK_{11} 和 ΔK_{12} 是定常值, 故可得到各段 ΔT_z 内的 $\Delta K(t)$ 值。

由于系统是两级齿轮传动, 故把式(2)右端激励项分成两部分即: 由 e_{11} 的激励项 ΔP_1 和 e_{12} 的激励项 ΔP_2 组成, 将式(3)代入得

$$\Delta F(t) - \Delta K(t) \bar{K}^{-1} \bar{F} = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \Delta P \quad (4)$$

$$\text{式中: } \Delta P_1 = \Delta F_1(t) - \left[\frac{\partial K(t)}{\partial K_{11}} \Delta K_{11} \right] \bar{K}^{-1} \bar{F};$$

$$\Delta P_2 = \Delta F_2(t) - \left[\frac{\partial K(t)}{\partial K_{12}} \Delta K_{12} \right] \bar{K}^{-1} \bar{F};$$

K_{11} , K_{12} , e_{11} , e_{12} 都随不同啮合点而取不同的数值, 故对于由传动误差引起的激励项, 属于非线性的, 在此采用傅立叶级数将其展开成各级啮合频率 ω_1 和 ω_2 的谐波形式^[3]即

$$\Delta P_1 = \sum_{j=1}^L [A_j \cos(j\omega_1 t) + B_j \sin(j\omega_1 t)]$$

$$\Delta P_2 = \sum_{j=1}^M [C_j \cos(j\omega_2 t) + D_j \sin(j\omega_2 t)]$$

$$(L = 1, 2, 3, \dots; M = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

$$\text{式中: } A_j = \frac{2}{T_{z1}} \int_0^{T_{z1}} \Delta P_1 \cos(j\omega_1 t) dt;$$

$$B_j = \frac{2}{T_{z1}} \int_0^{T_{z1}} \Delta P_1 \sin(j\omega_1 t) dt;$$

$$C_j = \frac{2}{T_{z2}} \int_0^{T_{z2}} \Delta P_2 \cos(j\omega_2 t) dt;$$

$$D_j = \frac{2}{T_{z2}} \int_0^{T_{z2}} \Delta P_2 \sin(j\omega_2 t) dt.$$

$$\text{那么 } \Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \sum_{j=1}^L [A_j \cos(j\omega_1 t) + B_j \sin(j\omega_1 t)] + \sum_{j=1}^M [C_j \cos(j\omega_2 t) + D_j \sin(j\omega_2 t)] \quad (6)$$

对于任一阶频率 $\omega = j\omega$ 的激励, 系统的响应为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= E_j \cos(\omega t) + F_j \sin(\omega t) \\ \Delta x_2 &= G_j \cos(\omega t) + H_j \sin(\omega t) \\ \{\Delta x\}_j &= \{\Delta x_1\} + \{\Delta x_2\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中: $\omega_1 = j\omega_1$; $\omega_2 = j\omega_2$ 。

将 Δx_1 和 Δx_2 分别代入微分方程式(2)即

$$M\Delta \ddot{x} + C\Delta \dot{x} + K\Delta x = \Delta P$$

其方程两端的正余弦系数相等后得

$$\begin{bmatrix} K - \omega_1^2 M & \omega_1 C \\ -\omega_1 C & K - \omega_1^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_j \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} K - \omega_2^2 M & \omega_2 C \\ -\omega_2 C & K - \omega_2^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_j \\ H_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_j \\ D_j \end{Bmatrix} \quad (9)$$

那么通过求解方程组(8)和(9), 可得到系数 E_j , F_j , G_j 和 H_j , 由此得到振动方程的通解(响应)为

$$\Delta x = \sum \Delta x_j \quad (10)$$

2 系统固有特性计算

输入各参数为: 转动惯量(单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) $I_1 = 0.16931$, $I_2 = 5.67766 \times 10^{-4}$, $I_3 = 1.086324 \times 10^{-3}$, $I_4 = 4.846015 \times 10^{-3}$, $I_5 = 1.564542 \times 10^{-3}$; 质量(单位为 kg) $m_2 = 2.60874$, $m_3 = 1.74783$, $m_4 = 3.43439$, $m_5 = 4.27211$; 扭转刚度(单位为 $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$) $K_{\theta 1} = 2.3487168 \times 10^4$, $K_{\theta 2} = 10.69318 \times 10^4$, $K_{\theta 3} = 9.26741187 \times 10^4$; 轴承支撑刚度与所受载荷等成非线性关系^[4], 本系统的传递功率和转速是定常的, 故通过使用软件计算得到其各轴承刚度为(单位: N/m): $K_{z1} = 5.10 \times 10^7$, $K_{y1} = 3.46 \times 10^7$, $K_{y3} = 4.95 \times 10^7$, $K_{x3} = 3.63 \times 10^7$, $K_{y6} = 5.24 \times 10^7$, $K_{x6} = 4.68 \times 10^7$, 为了缩短篇幅, 本文没有给出其它载荷下轴承刚度数值。

系统传递的功率 $P = 7.5 \text{ kW}$, 输入轴转速为 $780 \text{ r}/\text{min}$, 扭矩 $T_1 = 91.827 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。齿轮传动齿数: 第 1 级 $z_1 = 28$, $z_2 = 35$, 第 2 级 $z_3 = 60$, $z_4 = 40$ 。模数: 第 1 级 $m = 2.5$, 第 2 级 $m = 2.0$ 。

首先按文献[5], 根据 Weber 公式来计算一对齿轮不同啮合点公法线变形量, 从而可得到齿轮副啮合刚度的离散值, 分为单齿和双齿啮合区, 可求得第 1 级和第 2 级传动单齿啮合刚度和双齿啮合刚度的变化规律, 在各啮合周期 T_{z1} 和 T_{z2} 内按照单双齿啮合分配时间得到的刚度变化如图 2 和 3 所示。从图中可见, 无论在单齿啮合区还是双齿啮合区, 在同一啮合区内啮合刚度变化不大, 但在不同的啮合区啮合刚度有较大的变化。

为了减少计算量, 在此将每一级传动分为单齿啮合和双齿啮合两种平均啮合刚度来处理, 那么整个系统可按下列 5 种情况来计算其固有特性: (1) 两级齿轮传动均按单齿啮合计算; (2) 两级传动均按双齿啮合计算; (3) 第 1 级按单齿、第 2 级按双齿啮合计算; (4) 第 1 级按双齿、第 2 级

按单齿啮合计算; (5) 两级按各自的平均啮合刚度计算。即考虑单齿和双齿区啮合刚度, 按 $\frac{1}{T_{zi}} \int_0^{T_{zi}} K_{i} dt$ 来平均计算。

这样求得的系统固有频率如表 1 所示。另外求得系统的高阶固有频率与啮合周期(时间)的关系

系如图 4 和图 5 所示。可见系统的固有频率随时间而发生变化, 表现出一种动态现象。5 种情况下前 11 阶固有频率有较小的变化范围, 基本上稳定在某一数值附近, 唯有高阶频率 12 和 13 阶有较大的变化范围, 呈现出一种可变的动态固有频率现象。由于固有频率变化, 系统的振型也在变化,

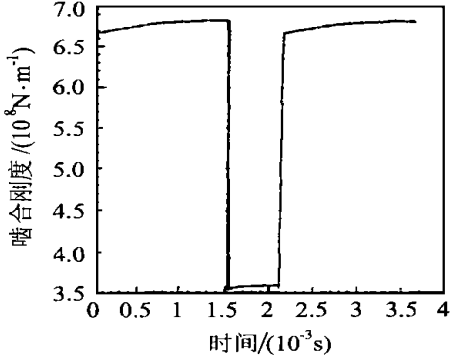


图 2 第 1 级单齿啮合刚度

Fig. 2 First grade meshing stiffness with meshing period

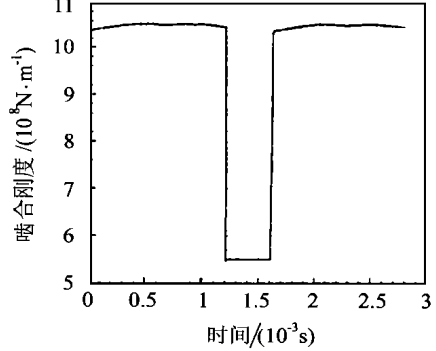


图 3 第 1 级双齿啮合刚度

Fig. 3 Second grade meshing stiffness with meshing period

表 1 系统固有频率理论值

Table 1 Natural frequency of system (Theory)

单位: Hz

阶次	1	2	3	4	5	6	7
1	37.43627	353.14894	415.45941	493.95776	508.07681	516.46127	583.09326
2	37.63849	353.25376	415.89941	494.78517	508.08542	516.65381	583.68754
3	37.51087	353.02531	415.89303	494.19928	508.07824	516.49254	583.34271
4	37.56461	353.18245	415.46752	494.55196	508.08113	516.52464	583.45717
5	37.49113	353.17162	415.83041	494.22485	508.07962	516.54124	583.56723
阶次	8	9	10	11	12	13	
1	712.20257	877.01113	948.12781	1503.04414	5486.62772	7823.95751	
2	712.47088	879.34319	951.39465	1505.82560	7498.51562	10662.5980	
3	712.34875	878.26147	951.38433	1503.54473	7496.33911	7825.87084	
4	712.36439	878.21831	948.14267	1505.33130	5486.96355	10662.55005	
5	712.35497	878.11254	950.69243	1504.59281	7047.94318	9939.20469	

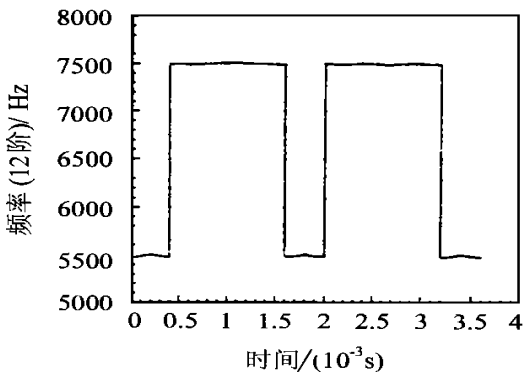


图 4 固有频率(第 12 阶)与啮合周期关系

Fig. 4 Natural frequency (12-th order) with meshing period

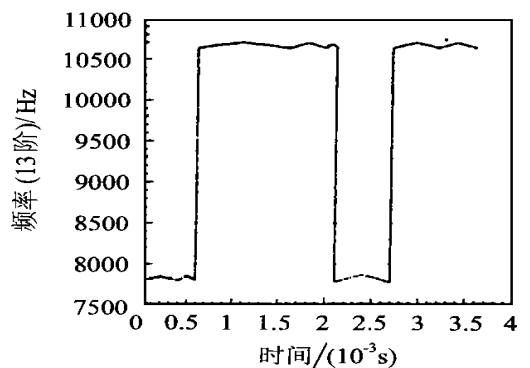


图 5 固有频率(第 13 阶)与啮合周期关系

Fig. 5 Natural frequency (13 order) with meshing period

图6~图7给出了系统按第1种情况计算的部分振型图。另外通过对系统扭振建模理论分析^[3]可预测出:在考虑到各种刚度以及阻尼下的第2阶、7阶、9阶、12阶和13阶频率应为此时系统扭振固有频率,那么其余各阶应为横向振动固有频率。

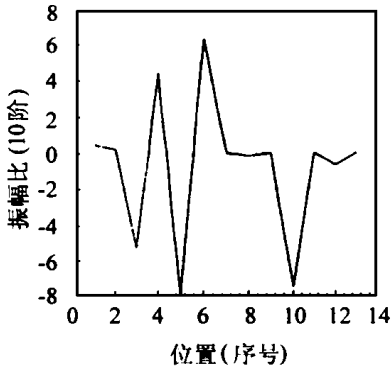


图6 第10阶振型($\omega_{10} = 948.13\text{Hz}$)

Fig.6 Vibration mode 10-th order, $\omega_{10} = 948.13\text{Hz}$

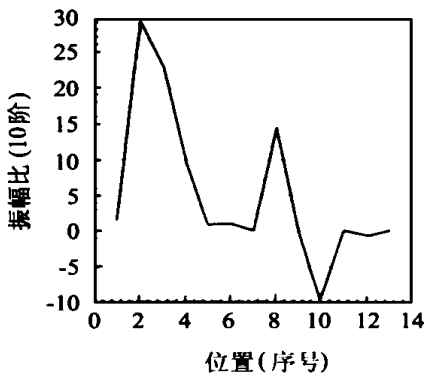


图7 第13阶振型($\omega_{13} = 7823.95\text{Hz}$)

Fig.7 Vibration mode 13-th order, $\omega_{13} = 7823.95\text{Hz}$

由此可见,按齿轮副的单双齿平均啮合刚度计算,对系统低阶固有频率影响不大,而对高阶频率影响较大。所以对于齿轮传动系统进行分析时,分别按单齿啮合区和双齿啮合区平均啮合刚度计算,可以满足工程要求。

3 减速器的实验测定

在图1的减速器输入轴上装上圆盘,用于激励系统。首先来测定输入端与输出端之间的转动惯量、扭转刚度。其后对系统进行激励来拾取其扭振响应信号,通过CRAS专用分析软件来分析处理,通过导纳圆拟合法可识别出减速器的前三阶固有频率、阻尼比和残数(可求振型),如表2所示,用于与前节的理论分析结果进行对比。其具体过程可参考文献[6]。

第2阶、第7阶和第9阶数值与表2的实验值是一致的,说明理论分析是合理的,所得的结果是正确的,可以用该方法对多级齿轮传动系统进行研究。

表2 系统扭振前三阶实验值

Table 2 The first 3 order natural characteristics of torsional vibration(Experiment)

阶次	频率/Hz	阻尼比/%	残数
1	345.00	3.99	-0.3164
2	590.00	4.95	0.2760
3	870.00	2.87	-0.1411

参考文献

- [1] Vinayak H, Singh R. Dynamic analysis of multi-Mesh geared systems: modal studies[R]. AIAA-94-2934, New York: AIAA, 1994.
- [2] Sho H. Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces[J]. Bulletin of JSME, 1995, 38(1): 112~121.
- [3] 方宗德,沈允文.斜齿轮传动动态特性的理论与实验研究[A].见:机械传动学会齿轮专业委员会编.第二届全国齿轮动力学学术会议论文集[C].武昌:齿轮专业委员会,1991.52~59.
- [4] 邵忍平.齿轮传动系统振动特性辨识及声辐射机理研究[D].西安:西北工业大学,1999.
- [5] 黄镇东,何大为.机械动力学[M].西安:西北工业大学出版社,1989.161~170.
- [6] 邵忍平,沈允文.齿轮减速器扭振特性实验辨识及简化动力模型研究[J].机械传动,1996,20(3):20~23.

作者简介:



邵忍平 1962年7月生,博士,副教授。从事机械动力学、机械振动与信号处理和振动噪声与控制方面的研究,获省、部级奖3项,发表论文28篇。

电话:(029)8493928;

Email:shaorp@hippo.nwpu.edu.cn



沈允文 1936年4月生,教授、博士生导师。研究领域为机械设计及理论,获国家级奖2项、省部级奖14项,发表论文150多篇。



孙进才 1938年7月生,教授、博士生导师。研究方向为噪声控制、水声信号处理和声纳技术。获省、部级奖5项,发表论文近100篇,其中国外重要杂志16篇。

可见前节理论结果的前3阶扭振固有频率即