

文章编号: 1000-6893(2001)01-0006-04

定常幅值小推力登月飞行器轨道研究

王 杰, 崔乃刚, 刘 瞰

(哈尔滨工业大学 飞行器设计教研室, 黑龙江 哈尔滨 150001)

ON CONSTANT-AMPLITUDE LOW-THRUST LUNAR PROBE TRAJECTORIES

WANG Jie, CUI Naigang, LIU Dun

(Laboratory of Flight Dynamics & Control, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

摘 要: 进行了基于平面三体模型的登月飞行器轨道控制方法的研究; 研究了从近地低轨道到近月低轨道的飞行轨道; 给出了在地球逃逸段、惯性漂移段和月球捕获段的运动轨迹和关键点的参数。提出使用“远地点可达”概念完成了地球逃逸段发动机推力终点的选择和使用飞行器相对月心能量完成了在月球捕获段止推发动机工作初始点的选择。

关键词: 月球探测器; 登月轨道; 小推力; N 体问题; 最优控制

中图分类号: V412.4⁺ **文献标识码:** A

Abstract: The flight trajectories from low earth parking orbit (LEO) to low lunar parking orbit (LLO) based on a planar three-body model are studied. Trajectories and some key parameters of the three stages, the earth escape stage, coast arc stage, and lunar capture stage, are presented as well. The concept of “coverage apogee” and the selenocentric energy are first, respectively, introduced to accomplish the terminal point determination of the earth escape stage and the initial point determination of the lunar capture stage.

Key words: lunar probe; lunar trajectories; low thrust; problem of N bodies; optimal control

以核裂变火箭发动机、电弧加热发动机、磁等离子体发动机和静电离子发动机为代表的小推力发动机作为最有前途的一代发动机, 在航天领域日益受到越来越多的重视。与传统的以化学推进剂为燃料的发动机相比, 它具有比冲大、推力小、作用时间长和可节省较多燃料的特点, 因此将被广泛地应用于长期的弱重力梯度场(非起飞和着陆段)飞行中, 尤其是真空飞行段^[1]。

与传统的飞行器轨道研究相比, 小推力发动机飞行器轨道研究也有很大的不同。传统的轨道研究由于发动机工作时间较短, 一般可忽略不计, 可以将其作用结果考虑为速度脉冲, 通过基于二体模型的解析法或考虑多种摄动因素后用数值法进行求解^[2,3]; 小推力发动机飞行器由于受到长期的发动机推力作用影响, 轨道的变化是一个“渐变”的过程, 因此对飞行器运动的控制也是一个长期的不可忽略的过程。目前对小推力飞行器的轨道研究主要是应用最优控制理论进行研究^[4,5]。

本文将飞行器的轨道划分为 3 个阶段。第一阶段为飞行器从地球附近的环绕轨道经过发动机

持续工作时间段 t_{escape} 的过程; 当达到一定条件时, 发动机停止工作, 飞行器在地月引力的作用下继续向月飞行; 在能够被月球捕获的某一时刻, 发动机再次工作一个时间段 t_{capture} , 通过衰减飞行器相对月球的运动速度, 在最终时刻 t_f 之后, 形成环绕月球运动的卫星。

1 近地段(地心逃逸段)轨道

在地月固联相对坐标系中, 不计大气阻力的以地球为中心引力星体、月球为摄动星体的飞行器三体问题的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{r1} &= -\frac{\mu_1}{r_1^2} + \frac{v_{\theta 1}^2}{r_1} - \frac{\mu_2(r_1 - D \cos \theta)}{r_2^3} - \\ &\quad \frac{\mu_2 \cos \theta}{D^2} + 2\omega_{\theta 1} + \omega^2 r_1 + a_1 \sin u \\ \dot{v}_{\theta 1} &= -\frac{v_{r1} v_{\theta 1}}{r_1} - \frac{\mu_2 D \sin \theta}{r_2^3} + \\ &\quad \frac{\mu_2 \sin \theta}{D^2} - 2\omega_{r1} + a_1 \cos u \\ \dot{r}_1 &= v_{r1}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_{\theta 1}}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: μ_1 为地球引力常数, $\mu_1 = Gm_e$; μ_2 为月球引力常数, $\mu_2 = Gm_m$; r_1 为飞行器到地心距离; θ 为地月连线与飞行器到地心连线间的夹角; v_{r1} 和 $v_{\theta 1}$

为飞行器沿 r_1 和垂直于 r_1 方向的速度分量; r_2 为飞行器到月心距离, $r_2 = r_{\text{moon-s/c}} = (r_1^2 - D r_1 \cos \theta + D^2)^{1/2}$; ω 为月球绕地球的公转角速度; D 为地月平均距离; $a_1(t)$ 为推力加速度, $a_1(t) = T / (m_0 - \dot{m} t)$, $0 \leq t \leq t_{\text{escape}}$; T 为发动机推力, 幅值恒定; m_0 为飞行器初始质量, $m_0 = m_{\text{LEO}}$; \dot{m} 为发动机燃料消耗率。

考虑到飞行器在相对坐标系中的初始条件为飞行器在圆形的环绕轨道运动, 有

$$\left. \begin{aligned} v_{r1}(0) &= 0 \\ v_{\theta1}(0) &= \sqrt{\frac{\mu_1}{r_{\text{LEO}}}} - \omega r_{\text{LEO}} \\ r_1(0) &= r_{\text{LEO}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: r_{LEO} 为初始轨道地心距。

引用二体模型中的概念, 为使飞行器的“远地点”最终能够达到月球附近, 末端条件可以写成

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{r}{2 - \sigma} \{ 1 + [1 + \sigma(\sigma - 2) \cos^2 \beta]^{1/2} \} - \\ (D - r_{\text{mc}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: D 为地月平均距离; $\sigma = rv^2/\mu$, μ 为中心引力体引力常数, r 为飞行器地心距, v 为飞行器在惯性坐标系中的速度; β 为飞行器在惯性坐标系中的发射角(高低角); r_{mc} 为理想远地点距月心距离; 应有 $|r_{\text{mc}}| \leq r_{\text{SOI}}$, r_{SOI} 为月球影响球半径; 如果远地点可达月球影响球, 则有 $r_{\text{mc}} = r_{\text{SOI}}$; 对于直接“瞄准”月球发射的飞行器, 有 $r_{\text{mc}} = 0$ 。

列写哈密尔顿函数为^[6,7]

$$H = \lambda_{r1} \dot{v}_{r1} + \lambda_{\theta1} \dot{v}_{\theta1} + \lambda_{r1} \dot{r}_1 + \lambda_{\theta1} \dot{\theta}_1$$

依据庞德里亚金极值原理, 得到控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4)$$

可以得到最优推力控制角有

$$u^* = \arctan(-\lambda_{r1} / -\lambda_{\theta1}) \quad (5)$$

伴随方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_{r1} &= -\frac{\partial H}{\partial r_1} = \lambda_{\theta1} \left[\frac{v_{\theta1}}{r_1} + 2\omega \right] - \lambda_{r1} \\ \dot{\lambda}_{\theta1} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = \lambda_{r1} \left[-2 \frac{v_{\theta1}}{r_1} - 2\omega \right] + \\ &\quad \frac{\lambda_{\theta1} v_{r1}}{r_1} - \frac{\lambda_{\theta1}}{r_1} \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial r_1} = \\ \lambda_{\theta1} &\left[-\frac{v_{r1} v_{\theta1}}{r_1^2} - \frac{3\mu_2(r_1 + D \cos \theta) D \sin \theta}{r_2^5} \right] + \\ \lambda_{r1} &\left[-\frac{2\mu_1}{r_1^3} + \frac{v_{\theta1}^2}{r_1^2} - \omega^2 + \frac{\mu_2}{r_2^3} - \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{3\mu_2(r_1 + D \cos \theta)^2}{r_2^5} \right] + \lambda_{\theta1} \frac{v_{\theta1}}{r_1^2} \\ \dot{\lambda}_{\theta1} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = \lambda_{r1} \left[\frac{\mu_2 D \sin \theta}{r_2^3} - \frac{\mu_2 \sin \theta}{D^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3\mu_2(r_1 + D \cos \theta) D r_1 \sin \theta}{r_2^5} \right] + \\ \lambda_{r1} &\left[\frac{\mu_2 D \cos \theta}{r_2^3} - \frac{3\mu_2 D^2 r_1 \sin^2 \theta}{r_2^5} - \frac{\mu_2 \cos \theta}{D^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

贯截条件为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{r1}(t_f) &= \xi \frac{\partial \psi}{\partial r_1}, \quad \lambda_{\theta1}(t_f) = \xi \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \\ \lambda_{r1}(t_f) &= \xi \frac{\partial \psi}{\partial r_1}, \quad \lambda_{\theta1}(t_f) = \xi \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: ξ 为拉格朗日乘子。

另外, 在末端还应满足

$$H(t_f) = -1 \quad (8)$$

2 惯性漂移段(Coast Arc)登月飞行器的轨道

作为登月飞行器轨道中一个重要环节, 飞行器在地球逃逸段和被月球捕获阶段这两个受控飞行阶段之间, 有一段从地球到月球的无控飞行段。其动力学方程式与式(1)所描述的地心三体动力学方程式非常类似, 只是没有控制力项。因此, 在这个阶段发动机不工作, 也就没有燃料损失, 这里直接列写此阶段的动力学方程。

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{r1} &= -\frac{\mu_1}{r_1^2} + \frac{v_{\theta1}^2}{r_1} - \frac{\mu_2(r_1 - D \cos \theta)}{r_2^3} - \\ &\quad \frac{\mu_2 \cos \theta}{D^2} + 2\omega v_{\theta1} + \omega^2 r_1 \\ \dot{v}_{\theta1} &= -\frac{v_{r1} v_{\theta1}}{r_1} - \frac{\mu_2 D \sin \theta}{r_2^3} + \frac{\mu_2 \sin \theta}{D^2} - 2\omega v_{r1} \\ \dot{r}_1 &= v_{r1}, \quad \dot{\theta}_1 = v_{\theta1} / r_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中各变量的定义和前一节类似。

研究飞行器距离月心较近的漂移轨道时(图1), 不难看出, 飞行器轨道相对于月心的能量始终大于零; 即: 飞行器最终如果不进行制动, 将飞出月球的影响球(或击中月球)。这一结果与所知的登月飞行器轨道的常识是吻合的: 所有从地球飞入月球影响球无控飞行器的轨道都是双曲线。而且, 飞行器如果不进行制动, 其相对月心的能量基本保持不变。

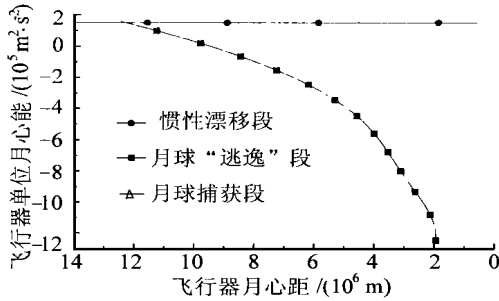


图1 月球“逃逸”段和捕获段飞行器在月心相对坐标系中的月心能比较

Fig 1 Energy of the coast arc stage and lunar capture stage in the selenocentric relative coordinate system

3 月球“逃逸”段轨道

实际近月段飞行过程中, 飞行器是一个在反推控制力作用下的下降过程, 这涉及下降段初始点的选取问题, 实际的仿真结果也表明, 如果止推条件选择不当, 飞行器不仅不能获得应有的速度形成环月轨道, 还可能或者以较大速度撞击在月球上, 或者逃逸出月球影响球。可作如下假设: 飞行器从近月的低轨道起飞, 质量不断增长(燃料消耗率为负), 在推力作用下逃逸。这个假设不仅要求飞行器在推力的终点达到和上节中漂移段末端具有相同的条件, 而且必须满足在推力终点飞行器的质量和地球逃逸段末端质量 m_{escape} 相吻合(因为漂移段无质量损失), 这可通过猜测和调整在月球低轨道时飞行器初始质量 m_{LLO} 来满足。

在月地固联坐标系中, 以月球为中心引力星体, 地球为摄动星体作用下的飞行器三体问题的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_2 &= -\frac{\mu_2}{r_2^2} + \frac{v_\theta^2}{r_2} - \frac{\mu_1(r_2 + D \cos \theta)}{r_1^3} + \frac{\mu_1 \cos \theta}{D^2} + 2\omega_\theta + \omega^2 r_2 + a_2 \sin u_2 \\ \ddot{\theta} &= -\frac{v_r v_\theta}{r_2} + \frac{\mu_1 D \sin \theta}{r_1^3} - \frac{\mu_1 \sin \theta}{D^2} - 2\omega r_2 + a_2 \cos u_2 \\ \dot{r}_{21} &= v_r, \quad \dot{\theta}_2 = v_\theta / r_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $\mu_1, \mu_2, r_1, \omega$ 和 D 的定义与上节类似; $a_2(t)$ 为推力加速度, $a_2(t) = T / (m_{\text{LLO}} - m \dot{t}), 0 < t$

m_{escape}

初始条件为

$$\left. \begin{aligned} v_{r2}(t_0) &= 0 \\ v_\theta(t) &= \sqrt{\frac{\mu_2}{r_{\text{LLO}}}} - \omega r_{\text{LLO}} \\ r_2(t_0) &= r_{\text{LLO}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: r_{LLO} 为低月轨道半径。

图1给出了月球“逃逸”段飞行器相对于月心的单位质量能量。可以看出在逃逸过程中, 飞行器的能量随着距月心距离的增加而增大, 并和漂移段的能量曲线相交于一点。这一点就是在下一节满足最终被月球捕获的反作用推力发动机工作初始关键点。

4 近月段(月球捕获段)轨道

飞行器月球捕获段的动力学方程和上节中所述在月地固联坐标系中, 以月球为中心引力星体, 地球为摄动星体作用下的飞行器三体问题的动力学方程(10)一致, 这里不再赘述。所需要注意的是推力加速度和上节中所述的不同, 应为

$$a_2(t) = \frac{T}{m_{\text{escape}} - m \left[\frac{t - (t_f - t_{\text{capture}})}{t_f - t_{\text{capture}}} \right]} \quad (12)$$

方程式在捕获段初始点的初值为上节中漂移段的终点值。

终端约束条件为

$$\Psi(v_r, v_\theta, r_f, t_f) = \begin{cases} v_{r2}(t_f) = 0 \\ v_\theta(t_f) + \sqrt{\frac{\mu_2}{r_{\text{LLO}}}} - \omega r_{\text{LLO}} = 0 \\ r_2(t_f) - r_{\text{LLO}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

图2给出了月球捕获段飞行器在地心惯性系中的运动轨迹。

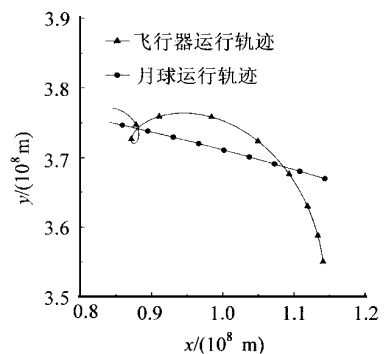


图2 月球捕获段飞行器在地心惯性坐标系中的运动轨迹

Fig 2 Trajectory of the lunar capture stage in the geocentric inertial coordinate system

图 1 是在水平推力作用下, 月球“逃逸”段和捕获段飞行器在月心相对坐标系中相对于月心的单位质量能量的比较曲线。可以看出, 在捕获过程中, 飞行器的能量从漂移段的能量曲线中一点(反作用推力发动机工作初始点)开始, 随着距月心距离的减少而降低; 并且和“逃逸”段的能量增长曲线吻合的较好。通过能量的降低, 飞行器最终成为一颗环绕月球的卫星。

5 仿真结果

初始地心环绕低轨道高度 $n_{LEO} = 200\text{km}$; 发动机推力 $T = 9\text{N}$; 环绕轨道初始质量 $m_{LEO} = 300\text{kg}$; 发动机燃料质量损失率 $\dot{m} = 4.6 \times 10^{-4}\text{kg/s}$; 发动机比冲 $I_{sp} = 2000\text{s}$ 。可以计算求得, 飞行器在初始轨道时推重比 $T/W = 3 \times 10^{-2}\text{m/s}^2$ 。

飞行器在近地段发动机工作时间约为 1.953d (168720s), 此过程中, 飞行器环绕地球 10.88 圈; 在距离地心大约 $7.278 \times 10^7\text{m}$ 处停止工作; 此时, 飞行器质量约为 222.38kg。接着, 飞行器完成了无控的惯性漂移段飞行, 此阶段飞行器共飞行 3.558d (307440s)。在距离地心约 $3.728 \times 10^8\text{m}$ (月心距约为 $2.00 \times 10^7\text{m}$) 处, 发动机再次工作约 0.356d (30720s); 在距月面约 $3.82 \times 10^5\text{m}$ 处, 发动机停止工作。整个飞行过程中, 飞行器发动机工作时间为 2.308d (199440s); 到达月心捕获段终点飞行器质量 208.26kg。

图 3 为分别在地心逃逸段、漂移段和月心捕获段 3 个阶段飞行器在地心惯性坐标系中的完整运动轨迹。

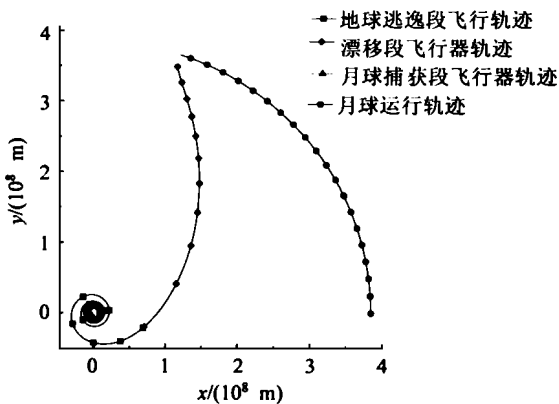


图 3 三个阶段飞行器在地心惯性坐标系中的完整运动轨迹

Fig. 3 Trajectory of the three stages in the geocentric inertial coordinate system

6 结论

本文进行了基于平面三体模型的登月飞行器控制方法的研究。仿真结果表明了使用“远地点可达”概念完成了地球逃逸段发动机推力终点选择和使用飞行器相对月心能量完成了在月球捕获段止推发动机工作初始点选择的有效性。仿真结果还表明将小推力发动机应用于登月飞行具有比使用传统的常规化学火箭的登月飞行节省燃料、增大有效载荷的优点。

参考文献

- [1] Sutton G P. 火箭发动机[M]. 北京: 宇航出版社, 1991. 23~36
- [2] 崔乃刚, 王巍, 陕晋军, 等. 向月飞行的轨道和导航[A]. 见中国宇航学会航天运载系统第二届专业委员会第四次学术交流研讨会论文集[C]. 北京: 北京运载火箭技术研究院, 1997.
- [3] 郝晓宁, 朱文耀. 探测器垂直击中月球的轨道设计[J]. 空间科学学报, 1998, 18(2): 161~166
- [4] Pierson B L, Kluever C A. Three-stage approach to optimal low-thrust earth-moon trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(6): 1275~1282
- [5] 严辉, 吴宏鑫, 吴新珍. 小推力轨道优化问题[J]. 中国空间科学技术, 1998, 18(2): 8~13
- [6] 蔡宣三. 最优化与最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982. 458~468
- [7] Bryson A E, Ho Y C. Applied optimal control [M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975. 66~69.

作者简介:



王 巍 1974 生, 男, 北京人, 哈尔滨工业大学航天工程与力学系飞行器设计教研室博士研究生, 1996 年和 1998 年在哈尔滨工业大学分别获得工程力学学士学位和空间飞行器设计硕士学位。主要从事飞行器轨道动力学与控制方向研究。Email: wj@aero.hit.edu.cn



崔乃刚 1965 生, 男, 辽宁沈阳人, 哈尔滨工业大学航天工程与力学系教授、博士生导师, 博士, 1996 年在哈尔滨工业大学获得飞行器制导、控制及仿真学科博士学位, 主要研究领域为飞行器飞行力学与控制、滤波理论及在飞行器控制方面的应用。Email: cng@aero.hit.edu.cn



刘 墩 1932 生, 男, 北京人, 哈尔滨工业大学航天工程与力学系教授、博士生导师, 1954 年毕业于哈尔滨工业大学机械设计专业, 主要研究领域为飞行器动力学与控制、精密机械设计等。Email: liudun@hope.hit.edu.cn