文章编号: 1000-6893(2000)06-0488-04

# 工程数值优化方法研究进展

夏人伟
(北京航空航天大学, 北京 100083)

# ADVANCES IN NUMERICAL OPTIMIZATION METHODS

XIA Ren-wei
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**摘 要**: 回顾与分析了工程数值优化方法研究的发展历程, 着重介绍与讨论了优化问题的几种数学列式、近似问题的保真度与近似函数, 以及复杂优化问题的求解策略等。指出优化问题的对偶列式变式 DFOP-V2 与高精度多点近似函数和二级近似概念结合而产生的数值优化解法, 具有通用性, 高的计算效率, 并易于与市场现有分析软件结合使用等显著优点。

**关键词**: 优化理论; 数学规划; 近似概念
**中图分类号**: V214.19 **文献标识码**: A

**Abstract**: This paper reviews mainly the advances in numerical optimization methods developed since the late eighties of the 20th century for complex optimization problems in engineering. It focuses on several critical aspects of the optimization methodology including mathematical formulations, approximation functions and solution strategies for optimization problems. And a concept of fidelity for approximate problems and its significance are presented and discussed. It is pointed out that the formulation DFOP-V2 based on the dual theory and envelope function is superior to other formulations in respects of simplifying optimization procedure and raising computational efficiency, especially for large scale problems; as compared with Taylor expansions, multi-point approximate functions may approach the original functions with high quality in a wide region of design variable space; and the solution strategy of two-level approximation concept is much beneficial to solving complex problems with high non-linearity. Suggestions are given for further developing numerical optimum methods which are of convenience and efficiency in applications for engineers.

**Key words**: optimization; mathematical programming; approximation concepts

1960 年, Schmit[1] 提出将结构分析的有限元素法与数学规划法结合, 以处理含不等式约束条件的结构优化问题, 从而奠定了工程数值优化方法的基础。近 40 年来, 数值优化方法的研究与应用受到学术与工程界的广泛重视并取得长足进展。数值优化方法与电子计算机结合可以有效地求出优化解, 这种优化技术特别适用于航空、航天、船舶、车辆和桥梁等领域的复杂工程设计问题。

众所周知, 相对于分析问题而言, 优化问题是逆问题, 其求解远较前者复杂困难得多, 它的基本原因是优化问题的可行解有无穷多个, 而要在此可行解集合中求出优化解, 一般只能用数学规划法来处理, 而非解析法。亦即在变量空间中按某种规律进行搜索, 逐步达到优化解。这是一种十分浩繁的计算过程, 特别是当变量众多、且函数为非线性隐函的情况下尤其如此。

早期的研究[2~8]表明, 直接利用数学规划法求解优化问题, 虽然在理论上具有普遍的适用性, 但由于计算效率太低而没有实用价值。此后, 国内外众多学者开展了大量的研究工作, 他们共同追求的目标就是发展与建立既具有通用性, 又具有高的计算效率的优化方法, 以有利于实际应用。20 世纪 60 年代后期, 出现了优化准则法[9~16], 它是依据所要解决问题的物理性质设立某种准则, 并据此建立优化迭代算式, 或依据数学规划中的 Kuhn-Tucker 条件建立优化迭代式, 因而可以分为两类, 即直观的准则法和理性的准则法。由于这种方法引入了某种物理假设或数学近似, 其计算比较简单, 特别是其迭代次数与变量数目没有直接关系, 故适用于大型优化问题的求解。但直观的优化准则法一般没有通用性, 其收敛性也没有保证。以后的研究表明[17, 18], 理性的优化准则法可

收稿日期: 1999-09-15; 修订日期: 2000-01-12
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2000/06/0488/

以说是对偶空间的数学规划法。尽管优化准则法在一段时期曾经受到相当重视并起到一定作用,但就其本质与价值而言,它是一种过渡性的产物。1974 年,Schmit 和 Farshi[19]提出了近似概念法,从而为基于数学规划有效求解数值优化问题展示了新的前景。其基本思想是:对于含有多变量、多约束,且约束为非线性隐函情况的优化问题,采用变量链化技术减少变量数目;采用约束暂时删除技术减少约束数目;并对保留下的那些约束,称为有效约束,用显式近似函数取代,从而得到规模较小的,且为显式的近似优化问题。解序列近似优化问题,其解的序列收敛于原优化问题的解。每一阶段近似优化问题的求解,基于数学规划法,仍然是在变量空间逐步搜索与逼近的过程,但不需要精确的有限元分析,只是每一新阶段近似问题建立时,精确有限元分析才是必要的。显然,近似优化问题的保真度越高,达到收敛所需的序列近似优化问题的阶段数目就越少,执行精确有限元分析的次数就越少,优化过程的计算效率就越高。这里说的保真度,是指近似优化问题中有效约束集合的完整性,以及近似函数的精确性,而与变量是否链化无关。因为变量链化技术,与其说是简化问题的需要,不如说是为反映问题实际情况的需要,除计算量有差异外,它对构成近似问题的质量没有本质上的影响。所以,如何提高近似优化问题的保真度,实际上成为许多学者多年来的研究方向。

本文针对提高数值优化方法的通用性与计算效率,着重介绍与讨论几个相关问题,并提出建议。

## 1　优化问题的数学列式

优化问题可以用等价的,但不同形式的数学列式来描述[20~24]。不同的数学列式会影响求解的内容、条件与计算效率,因而研究它们的特征具有十分重要的意义。

### 1.1　优化问题基本列式(BFOP)

$$\min_{x} f(x)$$

$$\text{s.t.}\ g_j(x) \le 0 \qquad j = 1, \cdots, J$$

其中:变量 x 为待求的 $n$ 维向量;$f(x)$ 为目标函数;$g_j(x)$ 为约束函数,通常为隐式的非线性函数。BFOP 的优点是其所表述的优化概念十分清晰,易为人们理解与接受,但直接求解此种列式的问题,由于变量多、约束数目多、计算效率很差。

### 1.2　优化问题基本列式的变式(BFOP-V)

$$\min_{x} f(x)$$

$$\text{s.t.}\ g_{\max}(x) \le 0$$

其中:$g_{\max}(x) = \max\{g_j(x)\}$。BFOP-V 的优点是约束条件只有一个,但该约束函数 $g_{\max}(x)$ 是非光滑的,且变量空间仍是高维的。

### 1.3　优化问题的对偶列式(DFOP)

$$\max_{\lambda \in D} d(\lambda)$$

其中:$d(\lambda) = \min_{x}\left\{ f(x) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j g_j(x) \right\}$;$\lambda$ 为待求的对偶变量向量;$D$ 为满足条件 $\lambda_j \ge 0,\ j \in J$ 的集合。DFOP 的优点是:它是准无约束优化问题,而且当约束数目小于变量数目时,解此种列式的优化问题,计算效率会较高。

### 1.4　优化问题对偶列式的变式(DFOP-V1)

$$\max_{\lambda \to 0} d(\lambda)$$

其中:$d(\lambda) = \min_{x}\{ f(x) + \lambda g_{\max}(x) \}$

DFOP-V1 是与 BFOP-V 对应的,是仅含一个对偶变量的准无约束优化问题。无论所讨论的优化问题有多少个变量和约束,都可以归结为 DFOP-V1 的求解。它显然较其它几种列式更具有简化求解过程,提高计算效率的优点。但是,由于 $g_{\max}(x)$ 为非光滑函数,不便采用基于函数与其梯度信息的有效算法,因之给出一个相应的光滑函数来替代 $g_{\max}(x)$ 是必要的。为此采用包络函数[25]。

$$E(x) = \frac{1}{P} \ln\left\{ \sum_{j=1}^{J} \exp[P g_j(x)] \right\}$$

它与 $g_{\max}(x)$ 的关系为

$$g_{\max}(x) \le E(x) \le g_{\max}(x) + \ln(J)/P$$

当 $P \to \infty$ 或取足够大时,有

$$E(x) \approx g_{\max}(x)$$

于是 DFOP-V1 可以改写为 DFOP-V2,即

$$\max_{\lambda > 0} d(\lambda)$$

其中:$d(\lambda) = \min_{x}[ f(x) + \lambda E(x) ]$

显然,DFOP-V2 是一种理想的数学列式,它保留了 DFOP-V1 的全部优点,且函数是光滑的。现问题归结为如何求解 DFOP-V2。

由于函数 $E(x)$ 为非线性隐函数,直接求解是困难的,因此应引入近似概念,建立高保真度的序列近似问题。从 DFOP-V2 可以看出,原优化问题

的变量数目与约束数目对于其规模与寻优途径没有影响,这有利于采用完整的有效约束集合或全部约束集合。因此,当前决定近似问题保真度的唯一因素就是 $E(x)$ 的近似函数精度。

## 2 近似函数

自从提出近似概念与数学规划法结合的方法[19]之后,近似函数就成为优化领域的一个主要研究方向。早期的工作是基于线性泰勒展开式及其改进形式,如先后建立的逆近似[22, 26, 27],逆近似与线性近似混合的保守近似[28, 29],以及移动渐近线法(MMA)[30]等。另外,应用二阶泰勒展开式显然可以提高精度,但其二阶导数的计算是十分浩繁的工作,因而采用得不多。1978年,Miura和Schmit[31]将其用于处理具有频率约束的问题,但计算效率不高。1981年文献[32]和以后的文献[33]将二阶泰勒展开式用于含应力与位移约束的优化问题,并提出依据圣维南原理简化二阶导数计算与将Hessian矩阵转变为对角矩阵的方法。1988年Fleury[34]亦采用二阶泰勒展开式并假设Hessian矩阵仅保留对角项。采用基于一阶泰勒展开式或二阶泰勒展开式的近似优化问题序列,除非原问题本身是接近线性或二次非线性的,否则不会具有良好的收敛性。

采用多点近似函数可以在变量空间较大范围内以较高精度接近原函数。1987年,Haftka等[35]引入Hermite插值多项式,它通常对内插情况具有较高精度,而对外插情况精度则不理想。同年,黄季墀[36]利用优化过程中当前点的函数值与梯度信息和前一点的函数值信息,以改善近似函数的精度。1990年,Fadel等[37]做了类似的工作。同年,黄海[38]利用多点的函数值与梯度信息,建立了多点近似函数。1991年,汪丽萍[39]建立了基于多元样条函数的近似式。

利用多点信息建立的近似函数,与基于泰勒展开近似式相比,对改善复杂优化问题迭代过程的收敛性更为有效。显然,若多点近似函数接近原函数的变量区间越宽、精度越高,则收敛性越好。

## 3 求解策略

求解策略对复杂优化问题的解算过程与计算效率具有重要作用。所谓复杂优化问题,是指具有多变量、多约束、高次非线性隐函数的优化问题,求解策略与所采取的优化问题数学列式与优化算法有密切关系。

由Schmit等人[19]提出的常规的近似概念法是一种求解策略,并已普遍为人们接受。它与优化问题的基本列式(BFOP)和对偶列式(DFOP)结合[20, 22],已有效地应用于一些结构优化问题的求解,特别是后者,其效果更为显著。但是,二者的寻优过程仍然是在多维空间进行。另外,按常规的近似概念,不便采用高精度的复杂非线性近似函数,如多点近似函数。因其相应的近似问题仍然复杂,特别是对偶近似问题,此时难以建立变量 $x$ 与对偶变量 $\lambda$ 之间的显式函数关系,从而无法按对偶方法求解。也就是说,在应用常规近似概念的情况下,一般只能采用精度较低、变量可分离的近似函数,形成保真度较低的近似问题序列,因而导致收敛较慢,精确有限分析次数增多。

1990年,文献[40]提出二级近似概念求解策略,它首先有效地解决了组合梁结构的优化问题,其后[41]推广于求解一般复杂优化问题,基本思想是:第1级近似的目的是通过建立精度尽可能高的非线性显式近似函数,将原问题转化为具有高保真度的显式近似问题序列。显然,若该显式近似问题可解,则保真度越高,收敛越快,所需精确有限元分析次数就越少,这正是所要求的。但这样的第1级近似问题一般不便应用高效率的算法求解。为此建立第2级近似问题序列,以求得第1级近似问题的解。构造第2级近似问题时,不追求高保真度,但要便于解算,这是因为其原问题是显式的,无需耗时的有限元分析,即使求解过程收敛较慢,但计算量有限。这种2级近似概念求解策略,除优化问题外,对于其它数值非线性问题亦有应用前景。

## 4 结 论

以上介绍与讨论了数值优化方法的若干重要问题及其发展历程。经过众多学者长期努力与探索,现在方便且有效地求解复杂数值优化问题并应用于工程实际已成为可能,就像有限元素法的情况那样。值得指出,综合运用优化问题对偶列式DFOP-V2、高精度多点近似函数与2级近似概念,可以直接给出优化解的迭代算式[42]。它是显式的,十分便于计算,且有通用性,适合于大型复杂优化问题的求解。所以一旦某一形式的高精度多点近似函数给定,则根据相应的优化解迭代算式编制的计算程序,就可以当成“黑匣子”对待,它可以方便地与现有市场上的分析软件结合使用。这对于将优化方法推广应用于工程问题、为广大

工程技术人员接受, 具有重要意义。

## 参 考 文 献


[1] Schmit L A. [A]. In: Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation[C]. New York: American Society of Civil Engineers, 1960. 105～122.

[2] Schmit L A, Kicher T P, Morrow W M. [J]. AIAA J, 1963(1): 2820～2836.

[3] Tocher J L, Karnas R N. [R]. AIAA Paper 73-361, 1971.

[4] Kowalik J. [R]. AGARD-CP-36-70. 1970. 2. 1～2. 17.

[5] Fox R L. [J]. AIAA J, 1968, 3 (8): 1517～1518.

[6] Schmit L A. [R]. AGARD-CP-36-70, 1970. 1. 1～1. 27.

[7] Karnes R N, Tocher J L. [R]. Boeing Report D6-23359, 1968.

[8] 张承煦, 夏人伟. [J]. 航空学报, 1979(1): 38～47.

[9] Prager W, Taylor J E. [J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35 (1): 102～106.

[10] Venkayya V B. [J]. Computers and Structures J, 1971, 1: 265～309.

[11] Gallatly R A, Berke L, Gibson W. [A]. In: Proceedings of 3rd Conf [C]. On Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, OH, 1971.

[12] Venkayya V B, Khot N S, Berke L. [R]. AGARD-CP-123, 1973.

[13] Berke L, Khot N S. [R]. AGARD-LS-70, 1974.

[14] Dobbs M W, Nelson R B. [J]. AIAA J, 1976, 14: 1436～1443.

[15] Khot N S, Berke L, Venkayya V B. [A]. In: Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AMS 20th Conference[C]. St Louis Mo, 1979.

[16] Khot N S, Berke L, Venkayya V B. [J]. AIAA Journal, 1979, 17: 182～190.

[17] Fleury C, Sander G. [A]. In: Proceedings of symposium on applications of computer method in engineering[C], University of Southern California, Los Angeles, CA, 1977. 507～520.

[18] 钱令希. 工程结构优化设计[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983.

[19] Schmit L A, Farshi B. [J]. AIAA Journal, 1974, 12(5): 692～699.

[20] Schmit L A, Miura H. [R]. NASA CR-2552. 1976.

[21] Wismer D A, Chattergy R. Introduction to nonlinear optimization, a problem solving approach [M]. North-Holland, New York, 1978.

[22] Schmit L A, Fleury C. [J]. AIAA J, 1980, 18: 1252～1260.

[23] Li X S. [J]. Sci China A, 1991, 34: 1467～1473.

[24] Kirsch U, Rozvany G I N. [J]. Structural Optimization J, 1994, 7: 32～41.

[25] Kresselmeier G, Steinhauser R. [A]. In: Proc. IFFAC Symp. On computer aided design of control system, Zurich, Switzerland[C], 1979, 113～117.

[26] Storaasli O O, Sobieszczanski-Sobieski J. [J]. AIAA J, 1974, 12: 231～233.

[27] Noor A K, Lowder H E. [J]. Comp. & Struct. J, 1975, 5: 9～12.

[28] Starnes J H, Jr, Haftka R T. [J]. Journal of Aircraft, 1979, 16: 564～570.

[29] Ding Y, Esping B J D. [A]. In: Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS 27th Structures Structural Dynamics and Materials Conf Part 1[C]. San Antonio, TX USA 1986: 262～275.

[30] Svanberg K. [J]. Int J Num Meth Eng, 1987, 24: 359～373.

[31] Miura H, Schmit L A. [J]. Int J Num Meth, Eng, 1978, 13: 337～351.

[32] XIA Ren-wei, Hsu P T, Chen M M. [A]. In: Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design[C], Tucson, Arizona, USA, 1981: 13. 7～13. 11.

[33] XIA Ren-wei, Liu Peng. [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering J, 1987, 65: 101～114.

[34] Fleury C. [A]. In: Proc Fourth SAS-World Conf[C]. 1988. 374～383.

[35] Haftka R T, *et al*. [J]. Comp Meth Appl Mech Eng J, 1987, 60: 289～301.

[36] 黄季墀. 含自适应能力结构综合方法的研究及工程应用[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1987.

[37] Fadel G M, *et al*. [J]. Structural Optimization J, 1990, 2: 117～124.

[38] 黄海. 2 级多点逼近结构优化方法的研究及其应用[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1990.

[39] 汪丽萍. 夹心复合材料锥壳力学分析及优化方法研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1991.

[40] ZHOU Ming, XIA Ren-wei. [J]. Int J Num Meth Eng, 1990, 29: 1681～1699.

[41] HUANG Hai, XIA Ren-wei. [J]. Structural Optimization J, 1995, 9: 38～45.

[42] 夏人伟, 陈少军, 黄海. [J]. 航空学报, 1997, 18(3): 262～266.

[43] Barthelemy J F M, Haftka R T. [J]. Structural Optimization J, 1993, 5: 129～144.



**作者简介:**

夏人伟　男, 教授, 66 岁。主要研究方向: 结构力学、优化理论、飞行器设计。