山东科学
SHANDONG SCIENCE

第24卷 第6期 2011年12月出版
Vol.24 No.6 Dec.2011

DOI:10.3976/j.issn.1002-4026.2011.06.001

PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群的结构

付国文,李刚

(山东师范大学数学科学学院,山东 济南 250014)

摘要:本文首先定义了 S 上的$\overline{\mathscr{L}}^U$ 关系,借助正规带和通过对 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群的刻划,最终得到了 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群的一个结构定理。

关键词:PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群;C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群;正规带;织积

中图分类号:O152.7 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-4026(2011)06-0001-04

Structures of PI-strongly $\overline{\mathscr{L}}^U$-abundant semigroups

FU Guo-wen, LI Gang

(School of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

Abstract: We initially define a $\overline{\mathscr{L}}^U$ relationship of S, and then acquire a structure theorem of PI-strongly $\overline{\mathscr{L}}^U$-abundant semigroups by normal band and the description for C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-abundant semigroups.

Key words: PI-strongly $\overline{\mathscr{L}}^U$-abundant semigroups; C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-abundant semigroups; normal band; spined products

1 引言与预备知识

令 S 是以 $E(S)$ 的某个子集 U 为投射集的半群,即 $U\subseteq E(S)$,$\forall a\in S$,记 a 的幂等元集为 $U_a=\{u\in U\mid ua=au=a\}$。

定义 S 上的$\overline{\mathscr{L}}^U$ 关系为:

$$\overline{\mathscr{L}}^U=\{(a,b)\in S\times S\mid(\forall u,v\in U^1)\,au=av\Leftrightarrow bu=bv\},$$

用$\overline{L}_a^U$ 表示 S 中包含 a 所在的$\overline{\mathscr{L}}^U$-类。

定义 1.1 半群 S 称为$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,若 $\forall a\in S$,$\overline{L}^U\cap U\neq\varnothing$;若 U 为中心,则称 S 为 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。

以下说 S 是$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群意指 $\exists U\subseteq E(S)$,使 S 是$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。

定义 1.2 半群 S 称为强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,如果 S 为$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,且 $\forall a\in S$,$|\overline{L}_a^U\cap U_a|=1$;此唯一元记为 a^U。

定义 1.3[1] 令 M,T 是半群,且 H 是 M,T 的公共同态像,如果 $S=\{(a,b)\in M\times T\mid a\varphi=b\psi\}$,其中 $\varphi:M$

收稿日期:2011-05-18
基金项目:山东省中青年科学家科研奖励基金(2008BS01016)
作者简介:付国文(1986-),女,硕士研究生,研究方向为代数半群。Email:fuguowen8608@163.com

$\to H$ 和 $\psi:T\to H$ 是半群满同态,则称 S 是半群 M 和 T 关于 H,φ,ψ 的织积,记作 $S=M\times_{(H,\varphi,\psi)}T$。

定义 1.4[2] 令 S 为半群,称 S 满足置换恒等条件,如果有文字集$\{1,2\cdots n\}(n\geqslant 2)$上的非恒等置换 σ,使满足恒等式:

$$x_1x_2\cdots x_n=x_{1\sigma}x_{2\sigma}\cdots x_{n\sigma}$$

定义 1.5 称 S 为 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,若 S 为满足置换恒等条件的强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。

引理 1.6 若 S 为强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,则对任意的 $u,v\in U$,$u\ \overline{\mathscr{L}}^U v$ 当且仅当 $u\ \mathscr{L}^U v$。

证明 若 $u\ \mathscr{L}^U v$,则 $uv=u,vu=v$,对任意 $g,h\in U$,若 $ug=uh$ 可得 $vug=vuh$ 即 $vg=vh$,反之也成立。另一方面,若 $u\ \overline{\mathscr{L}}^U v$,则由 S 为强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,可得 $uv=u,vu=v$,即 $u\ \mathscr{L}^U v$。

引理 1.7[3] 带 B 是一个满足置换恒等条件的带$\Leftrightarrow B$ 为正规带。

引理 1.8[4] 如果 S 是一个含幂等元且满足置换恒等条件的半群,则 $E(S)$是正规带。

推论 1.9 如果令 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,则 U 是一个正规带。

证明 由定义 1.5 和引理 1.7,1.8 即得。

未说明的其他概念和术语见文献[5-6]

2 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群的结构

以下均假设$\overline{\mathscr{L}}^U$ 为同余。

引理 2.1 令 S 为 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群当且仅当 $S=[Y;S_\alpha;\Phi_{\alpha,\beta}]$,其中 S_α 为幺半群。

证明 必要性:设 S 为 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,若 $a\ \overline{\mathscr{L}}^U b\ \overline{\mathscr{L}}^U u$,则由$\overline{\mathscr{L}}^U$ 为同余,可得 $ab\ \overline{\mathscr{L}}^U ub=bu\ \overline{\mathscr{L}}^U u$,故$\overline{\mathscr{L}}^U_u$ 为 S 的一个幺子半群。所以 $S=\cup_{u\in U}\bar{L}^U_u$。对于 $u,v\in U,u\geqslant v$,作映射

$$\Phi_{u,v}:\bar{L}^U_u\to\bar{L}^U_v,a\to av(a\in\overline{\mathscr{L}}^U_u),$$

易知 $\Phi_{u,v}$是从$\bar{L}^U_u$ 到$\bar{L}^U_v$ 的同态,且是良定义的,$\Phi_{u,v}$是$\bar{L}^U_u$ 的自同态。若 $u\geqslant v\geqslant w,a\in\bar{L}^U_u$,则

$$a\Phi_{u,v}\Phi_{v,w}=av\Phi_{v,w}=avw=aw=a\Phi_{u,w},$$

所以 $\Phi_{u,v}\Phi_{v,w}=\Phi_{u,w}$,又对任意的 $a\in\bar{L}^U_u,b\in\bar{L}^U_v$,

$$ab=aubv=abuv=auvbuv=a(\Phi_{u,uv})b(\Phi_{v,uv}),$$

所以 $\Phi_{u,v}$是 S 上的结构同构,$S=[U;\bar{L}^U_u;\Phi_{u,v}]$。

充分性:令 $S=[Y;S_\alpha;\psi_{\alpha\beta}]$,其中 S_α 是幺半群,1_α 为 S_α 中的单位元,令 $U=\{1_\alpha|\alpha\in Y\}$。对于 $a\in S_\alpha$,$1_\beta\in S_\beta,1_\gamma\in S_\gamma$,

$$a1_\beta=a1_\gamma\Leftrightarrow\alpha1_\beta=\alpha1_\gamma b,1_\alpha1_\beta=1_\alpha1_\gamma,$$

所以 $a\ \overline{\mathscr{L}}^U 1_\alpha$ 故 S 为一个$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。对任意的 $a\in S_\alpha,1_\gamma\in S_\gamma$,则

$$a1_\gamma=a\psi_{\alpha,\alpha\gamma}1_\gamma\psi_{\gamma,\alpha\gamma}=1_\gamma\psi_{\gamma,\alpha\gamma}a\psi_{\alpha,\alpha\gamma}=1_\gamma a,$$

所以 S 为 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。

引理 2.2 令 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,则$\forall a,b\in S$,有$(ab)^U=a^Ub^U$。

证明 设 $a,b\in S$,令 $\kappa=\min\{i|i\sigma\neq i;1\leqslant i\leqslant n\}$,$m=\kappa\sigma$,则 $\kappa\sigma>\kappa$,根据

$$ab=aa^Ub^Ubb^U=a(a^U)^{\kappa-1}a^U(b^U)^{m-\kappa-1}b(b^U)^{n-m}=a(a^U)^{\kappa-1}bb^Ua^Ub^U=aba^Ub^U$$

及其对偶形式有 $a^Ub^Uab=ab$,由于$\overline{\mathscr{L}}^U$ 为同余,有 $a\ \overline{\mathscr{L}}^U a^U,b\ \overline{\mathscr{L}}^U b^U$ 可得 $ab\ \overline{\mathscr{L}}^U a^Ub^U$,又 S 是一个强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,所以$(ab)^U=a^Ub^U$。

引理 2.3 令 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,$u\in U$,令 $Su=\{a\in S|a^U=u\}$,则 S_u 是一个交换幺半群。

证明 $\forall a,b\in S_u$,由引理 2.2,知$(ab)^U=a^Ub^U$ 即 $ab\in S_u$,故 S_u 是 S 的一个子半群,且 u 是 S_u 的单位元。所以 S_u 是 S 的幺半群,又因 S 是 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,由恒等置换条件易知 S_u 可交换。

定理 2.4 令 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,$U=[Y;U_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta}]$,对任意的 $\alpha\in Y$,取 $u_\alpha\in U_\alpha$;则集合

$T=\cup_{\alpha\in Y}S_{u_\alpha}$关于二元运算

$$(\forall x\in S_{u\alpha},y\in S_{u\beta})x\cdot y=u_{\alpha\beta}xyu_{\alpha\beta}$$

形成一个交换 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群 $T=[Y;S_{u_\alpha};\psi_{\alpha,\beta}]$。

证明　若 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群，由推论 1.9 知 U 是正规带。设 $x\in S_{u_\alpha},y\in S_{u_\beta},z\in S_{u_\gamma}$，

$$(u_{\alpha\beta}xyu_{\alpha\beta})^U=u_{\alpha\beta}x^Uy^Uu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta},$$

从而 $x\cdot y\in S_{u_{\alpha\beta}}$且

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\cdot z&=u_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta}xyu_{\alpha\beta}zu_{\alpha\beta\gamma}=u_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta}xy(xy)^Uu_{\alpha\beta}z^Uzu_{\alpha\beta\gamma}\\&=u_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta}xy(xy)^U(z)^Uzu_{\alpha\beta\gamma}=u_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta}(xyz)^Uxyzu_{\alpha\beta\gamma}\\&=u_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta}xyzu_{\alpha\beta\gamma}=u_{\alpha\beta\gamma}xyzu_{\alpha\beta\gamma}。\end{aligned}$$

同理可证 $x\cdot(y\cdot z)=u_{\alpha\beta\gamma}xyzu_{\alpha\beta\gamma}$，故 T 关于上述乘法形成一个半群。故 $S=[Y;S_{u_\alpha}]$。

对于 $\alpha\geqslant\beta$，作 $\psi_{\alpha,\beta}:S_{u_\alpha}\to S_{u_\beta},a\to u_\beta au_\beta$。若 $a\in S_{u_\alpha}$，则 $a^U=u_\alpha$，据引理 2.2 知

$$(u_\beta au_\beta)^U=(u_\beta)^Ua^U(u_\beta)^U=u_\beta a^Uu_\beta=u_\beta u_\alpha u_\beta=u_\beta,$$

从而 $\psi_{\alpha,\beta}$是良定义的，若 $a\in S_{u_\alpha},b\in S_{u_\beta}$，则

$$\begin{aligned}(a\cdot b)\psi_{\alpha,\beta}&=u_\beta abu_\beta=u_\beta a(bu_\beta)^Ubu_\beta,\\&=u_\beta au_\alpha u_\beta bu_\beta=u_\beta au_\beta u_\beta u_\beta bu_\beta\\&=a\psi_{\alpha,\beta}\cdot b\psi_{\alpha,\beta}。\end{aligned}$$

所以 $\psi_{\alpha,\beta}$是一个同态。若 $a\in S_{u_\alpha}$，则 $a\psi_{\alpha,\alpha}=u_\alpha au_\alpha=a$，所以 $\psi_{\alpha,\alpha}$为 S_{u_α}上的自同态。又若 $a\in S_{u_\alpha},\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$，则

$$\begin{aligned}a\psi_{\alpha,\beta}\psi_{\beta,\gamma}&=(u_\beta au_\beta)\psi_{\beta,\gamma}=u_\gamma u_\beta au_\beta u_\gamma\\&=u_\gamma u_\gamma u_\beta u_\alpha au_\alpha u_\beta u_\gamma u_\gamma\\&=u_\gamma u_\beta u_\gamma au_\gamma u_\beta u_\gamma\\&=a\psi_{\alpha,\gamma},\end{aligned}$$

即对于 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$ 有 $\psi_{\alpha,\beta}\psi_{\beta,\gamma}=\psi_{\alpha,\gamma}$。若 $a\in S_{u_\alpha},b\in S_{u_\beta}$，则

$$\begin{aligned}a\psi_{\alpha,\alpha\beta}\cdot b\psi_{\beta,\alpha\beta}&=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}\cdot u_{\alpha\beta}bu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}bu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}a(u_{\alpha\beta}a)^Uu_{\alpha\beta}bu_{\alpha\beta}\\&=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}u_\alpha u_{\alpha\beta}u_\beta bu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta bu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}u_\alpha bu_{\alpha\beta}\\&=u_{\alpha\beta}a\ (u_{\alpha\beta}a)^ubu_{\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}abu_{\alpha\beta}=a\cdot b,\end{aligned}$$

故 $T=[Y;S_{u_\alpha};\psi_{\alpha,\beta}]$。对于任意 $a\in S_{u_\alpha},b\in S_{u_\beta}$，据引理 2.3，

$$\begin{aligned}a\cdot b&=a\psi_{\alpha,\alpha\beta}\cdot b\psi_{\beta,\alpha\beta}=u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}bu_{\alpha\beta}\\&=u_{\alpha\beta}bu_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}au_{\alpha\beta}=b\psi_{\beta,\alpha\beta}\cdot a\psi_{\alpha,\alpha\beta}\\&=b\cdot a,\end{aligned}$$

由引理 2.1 知 T 是 C-$\overline{\mathscr{L}}^{U'}$-富足半群，又易知 T 是交换的，故 T 可形成一个交换 C-$\overline{\mathscr{L}}^{U'}$-富足半群。

定理 2.5　半群 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群$\Leftrightarrow S$ 是某正规带 $B=[Y;U_\alpha;\psi_{\alpha,\beta}]$和一个交换 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群 $T=[Y;T_\alpha;\psi_{\alpha,\beta}]$关于半格 Y 的织积 $B\times_YT$。

证明　必要性：设 S 是一个 PI-强$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群，令 $B=U=[Y;U_\alpha;\psi_{\alpha,\beta}]$，$T=[Y;S_{u_\alpha};\psi_{\alpha,\beta}]$为构造定理 2.4中的交换 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群，其中 $U'=\{u_\alpha\mid\alpha\in Y\}$。定义：

$$\eta:S\to B\times_YT,a\to(a^U,u_\alpha au_\alpha)(a^U\in U_\alpha),$$

则显然 η 是良定义的。如果 $a,b\in S$ 使 $a\eta=b\eta$，则$\exists\alpha\in Y,a^U,b^U\in U_\alpha$，有

$$a=a^Uu_\alpha a^Uaa^Uu_\alpha a^U=a^Uu_\alpha au_\alpha a^U=b^uu_\alpha bu_\alpha b^U=b^Uu_\alpha b^Ubb^Uu_\alpha b^U=b$$

故 η 为单射。对任意的$(u,x)\in B\times_YT,u\in U_\alpha$，有

$$(uxu)\eta=((uxu)^U,u_\alpha uxuu_\alpha)=(ux^Uu,u_\alpha uu_\alpha xu_\alpha uu_\alpha)=(u,x)。$$

故 η 为满射。此外对任意的 $a,b\in S,a^U\in U_\alpha,b^U\in U_\beta$,

$$\begin{aligned}(ab)\eta &= ((ab)^U,u_{\alpha\beta}abu_{\alpha\beta}) = (a^Ub^U,u_{\alpha\beta}u_\alpha(ab)^Uab(ab)^Uu_\beta u_{\alpha\beta})\\ &= (a^Ub^U,u_{\alpha\beta}u_\alpha abu_\beta u_{\alpha\beta}) = (a^Ub^U,u_{\alpha\beta}u_\alpha aa^Uu_\alpha u_\beta b^Ubu_\beta u_{\alpha\beta})\\ &= (a^Ub^U,u_{\alpha\beta}u_\alpha au_\alpha u_\beta bu_\beta u_{\alpha\beta}) = (a^Ub^U,u_\alpha au_\alpha\cdot u_\beta bu_\beta)\\ &= (a^U,u_\alpha au_\alpha)(b^U,u_\beta bu_\beta) = a\eta\cdot b\eta\end{aligned}$$

故 η 为同构。

充分性:设 $S=B\times_Y T$,其中 $B=[Y:B_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta}]$ 为一个正规带,$T=[Y;T_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta}]$ 为一个交换 C-$\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,T_α 为幺半群。由正规带的定义可知 S 满足置换恒等:$x_1x_2x_3x_4=x_1x_3x_2x_4$。下证 S 是强 $\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群,其中 $U=\{B_\alpha\times\{1_{T_\alpha}\}\mid\alpha\in Y\}$。设 $(u,t)\in S$ 为 $B_\alpha\times T_\alpha$ 的任意元,若 $(v,1_{T_\beta})\in B_\beta\times\{1_{T_\beta}\}$,$(g,1_{T_\gamma})\in B_\gamma\times\{1_{T_\gamma}\}$ 则

$$\begin{aligned}(u,t)(v,1_{T_\beta}) &= (u,t)(g,1_{T_\gamma})\\ &\Leftrightarrow uv=ug,t1_{T_\beta}=t1_{T_\gamma},\alpha\beta=\alpha\gamma\\ &\Leftrightarrow uv=ug,1_{T_\alpha}1_{T_\beta}=1_{T_\alpha}1_{T_\gamma}\\ &\Leftrightarrow (u,1_{T_\alpha})(v,1_{T_\beta})=(u,1_{T_\alpha})(g,1_{T_\gamma})。\end{aligned}$$

因此 $(u,t)\overline{\mathscr{L}}^U(u,1_{T_\alpha})$。显然 $(u,1_{T_\alpha})(u,t)=(u,t)$。若有 $(v,1_{T_\delta})\overline{\mathscr{L}}^U(h,1_{T_\delta})$,$(h,1_{T_\delta})(u,t)=(u,t)$ 则

$$(h,1_{T_\delta})(u,t)=(u,t)(h,1_{T_\delta})=(u,t),$$

从而由 $uh=hu=u$,$(u,1_{T_\alpha})\overline{\mathscr{L}}^U(g,1_{T_\delta})$ 知

$$(h,1_{T_\delta})(u,1_{T_\delta})=(h,1_{T_\delta}),$$

得 $hu=h$ 从而有 $u=h$,故 $\alpha=\delta$,$1_{T_\alpha}=1_{T_\delta}$,因此 $(h,1_{T_\delta})=(u,1T_\alpha)$。综上可知 S 是一个 PI-强 $\overline{\mathscr{L}}^U$-富足半群。

参考文献:

[1]张晓敏. 完备 wrpp 半群[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(2):214-220.

[2]李俊峰,杨棣. *PI*-强 wrpp 半群的结构[J]. 湖南师范大学自然科学学报,2005,28(1):21-23.

[3]郭小江. *PI*-强 rpp 半群的构造[J]. 科学通报,1996,41(18):1647-1650.

[4]YAMADA M. Regular semigroups whose idempotents satisfy permutation identities[J]. Pacific Math,1967,21(2):371-392.

[5]HOWIE J M. Foundational of semigroup theory[M]. Oxford:Clarendon Press,1995.

[6]LI G,GUO Y Q,SHUM K P. Quasi-C-Ehresmann semigroups and their subclasses[J]. Semigroup Forum,2005,70(3):369-390.

[7]GUO X. Abundant semigroups whose idempotents satisfy permutation identities[J]. Semigroup Forum,1997,54(1):317-326.