

文章编号: 1000-6893(2000)05-0439-03

运动激波自适应网格算法中权函数问题的研究

康红文, 王鹏云

(中国气象科学研究院, 北京 100081)

STUDY ON WEIGHT FUNCTION OF ADAPTIVE GRID TECHNIQUE APPLIED TO MOVING SHOCK PROBLEMS

KANG Hong-wen, WANG Peng-yun

(Chinese Academy of Meteorological Science, Beijing 100081, China)

摘要: 变分原理的自适应网格技术被应用到运动激波问题的求解上, 在解的大梯度区自动加密网格, 从而非常成功地算出了激波。通过分析发现权函数选择和取值对自适应网格技术至关重要。

关键词: 自适应网格; 权函数; 激波

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

Abstract: Adaptive grid techniques through a variational approach are applied to moving shock problems with exact solutions. Two kinds of weight functions are first tested. One only considering solution gradient can concentrate more grid points in the center of the shock wave, while the other using the second derivative term can distribute more grid points on both ends of the shock wave, where many oscillations are easily produced. So, the weight function with the second derivative term included is more effective to capture the shock wave. The history of the grid points position shows that more grid points are redistributed in the shock regions and can tightly trace the moving shock wave in response to numerical solution; thus the shock wave can be captured successfully. Compared to the numerical solution by using fixed grids, the results show that the adaptive grid techniques have excellent qualities in improving accuracy of the numerical solution and reducing CPU time.

Key words: adaptive grid techniques; weight function; shock

在流体力学领域广泛存在着多尺度结构共存的现象, 如包含激波的流场。自适应网格技术正是针对包含多尺度结构流场进行数值模拟提出的, 它能根据问题的求解, 在解的大梯度区自动加密网格, 从而有效减少这里的误差、提高精度。本文采用的自适应网格技术是由 Brackbill 和 Saltzman^[1]所提出, 其要点是: 根据各网格间解的梯度值取一个权函数 w_i , 并使得 $w_i \Delta x = \text{const}$ 。这样, 某网格间上解的梯度值越大, 权函数就越大, 相应的 Δx 就越小。为达到这一目的, 先将其转化为一个变分问题, 通过求解其欧拉方程来得到新网格点位置^[2]。

选取运动激波作为算例, 其控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

初始条件

$$\left. \begin{aligned} u(0, 0) &= 1 \\ u(x, 0) &= 0 \quad 0 < x \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 1 \quad u(1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这时它有一个精确解^[3]

$$u = \frac{1}{2} \left\{ \text{erfc} \left[\frac{x - A}{2 \sqrt{t/\text{Re}}} \right] + e^A \text{erfc} \left[\frac{x + A}{2 \sqrt{t/\text{Re}}} \right] \right\} \quad (4)$$

本文取 $A = 10^4$, $\text{Re} = 1.0$ 。

这是一个运动激波问题, 它相当于左边界不断有单位污染浓度输入时, 在高对流速度 ($A = 10^4$) 的带动下的对流扩散问题。

1 自适应网格技术

自适应网格技术包括 2 个方面的内容: 原参数方程的求解和网格方程的求解。

对于原参数方程, 首先将其从物理域坐标系 (x, t) 转换到计算域坐标系 (ξ, τ) , 其中 $\tau = S$ 。此时方程(1)变成

收稿日期: 1999-06-15; 修订日期: 1999-11-01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (49735180); 国家攀登专项 (95-专-03); 国家重点基础研究发展规划项目 (G1998040907, 10) 资助课题。

文章网址: <http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2000/05/0439>

$$\frac{\delta u}{\delta S} = -u_e \frac{\delta u}{\delta N} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\delta x}{\delta N} \right)^{-2} \tilde{\sigma} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\delta u}{\delta N^2} - \left(\frac{\delta x}{\delta N} \right)^{-1} \frac{\delta^2 x}{\delta N^2} \frac{\delta u}{\delta N} \right) \quad (5)$$

其中: $u_e = \left[u - \frac{\delta x}{\delta S} \right] \left(\frac{\delta x}{\delta N} \right)^{-1}$ (6)

是有效速度。从上式可以发现, 网格点的移动直接写进了方程中, 这样就避免了网格点因插值而带来的误差。

根据文献[4]对8个类型的差分格式比较来看, 程心一格式具有收敛较快、振幅较小的优点。为了求解方程(5), 选用了程心一格式^[4]。

关于网格方程, 考虑一个变分问题

$$\min \int (1 + K w_t^2) \left(\frac{\delta x}{\delta N} \right)^2 dN \quad (7)$$

其中: K 是作者用来调节自适应程度的一个参数。其欧拉方程是

$$(1 + K w_t^2) \frac{\delta^2 x}{\delta N^2} + K w_t \frac{\delta w_t}{\delta N} \frac{\delta x}{\delta N} = 0 \quad (8)$$

因此可以用以下差分形式来求解方程(8)

$$[1 + K w_{t_{i+1}} + w_{t_i}]^2 / 4 (x_{i+1} - x_i)^2 - [1 + K w_{t_i} + w_{t_{i-1}}]^2 / 4 (x_i - x_{i-1})^2 = 0 \quad (9)$$

令上式的左边为 R , 根据 Brackill 和 Saltzman 的迭代方法^[1], 有

$$0 = R^{(k+1)} = R^{(k)} + \frac{\delta R^{(k)}}{\delta x^{(k)}} (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \quad (10)$$

当 $R^{(k+1)} \rightarrow 0$ 时, $x_i^{(k+1)}$ 即为新坐标点位置。

在式(7)中的权函数 w_t , 定义如下

$$w_t = w_1 \left| \frac{\delta u}{\delta x} \right| + w_2 \left| \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right| \quad (11)$$

式中: w_1, w_2 为可调系数。为使得网格变化更趋光滑, 对权函数 w_t 在空间上进行光滑处理

$$w_{t_i}^{\text{new}} = \frac{1}{2} w_{t_i}^{\text{old}} + \frac{1}{4} (w_{t_{i-1}}^{\text{old}} + w_{t_{i+1}}^{\text{old}}) \quad (12)$$

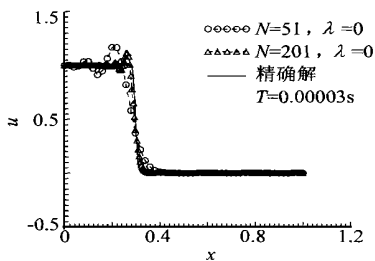


图1 固定网格的计算结果

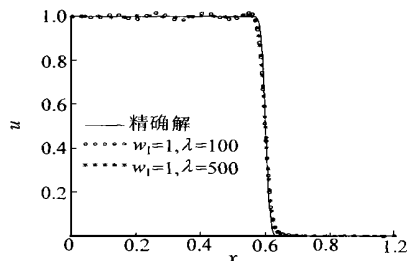


图2 梯度作为权函数

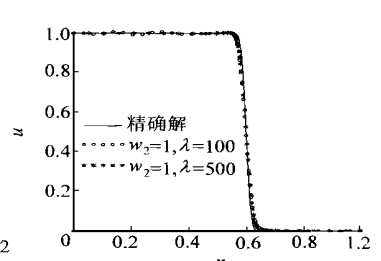


图3 二阶导数作为权函数

在编制程序时, 规定一个整数 N_w , 来确定光滑次数。为了便于用 K 对自适应程度进行调节, 把 w_t 的变化范围限制在 0 到 1 之间, 即: 先找出所有网格点上权函数的最大值, 然后分别用各网格点上的权函数与这一最大值相比, 即为该时间步上各网格点上的权函数。

2 数值结果

在计算中, 用记号

$$E = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} |(u_j)_{\text{exact}} - (u_j)_{\text{comp}}| \delta x_j}{\sum_{j=1}^{N-1} |(u_j)_{\text{exact}}| \delta x_j} \quad (13)$$

表示数值解的相对误差, N 是网格点数。

图1给出在等网格间距下 $T = 3 \times 10^{-5} \text{ s}$ 时数值求解情况。可以发现当 $N = 201$ 时, 计算值在激波附近仍有较大的数值震荡。

采用自适应网格后, 其计算结果从式(11)可知, “ $w_1 = 1, w_2 = 0$ ”时, 此时权函数只考虑了一阶梯度, 图2给出此时 K 取 100, 500 时计算情况。可见此时当 K 取 100 时, 效果也不太理想。从式(11)也可知, 当 “ $w_1 = 0, w_2 = 1$ ”时, 权函数考虑的是二阶导数变化。图3给出了在此情况下, K 取 100, 500 时的计算情况。与图2比较, 其效果要好多了。在计算时也考虑了 “ $w_1 = 1, w_2 = 1$ ”时的情况。实际上因为二阶导数远比一阶梯度值大, 相比之下, 式(11)中的第一项可以忽略。实际计算也显示它与 “ $w_1 = 0, w_2 = 1$ ”的计算情况基本一样。以下将只讨论 “ $w_1 = 1, w_2 = 0$ ”以及 “ $w_1 = 0, w_2 = 1$ ”两种情况。

根据式(13)相对误差定义, 表1给出上述两种情况误差对比。这一定量对比也说明权函数考虑二阶导数项时能更有效地捕获激波。

表 1 两种情况误差对比

	K= 100	K= 500
w ₁ = 1	0. 0148	0. 0094
w ₂ = 1	0. 0130	0. 0086

图 4 给出了上述 2 种情况下权函数变化曲线及与激波位置关系。很清楚, 对于“w₁= 0, w₂= 1”的情况, 主要把网格点集中在激波的两端, 而对于“w₁= 1, w₂= 0”的情况, 则把网格点集中在激波中心。可见, 权函数形式的不同, 所考虑角度也不同。对于本问题, 激波的端点常有数值振荡, 对计算精度的影响更大, 这里更需要分配较多的网格点。因而图 3 的结果比图 2 的结果要好些。

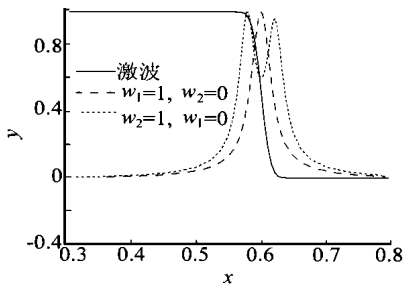


图 4 2 种权函数和激波位置关系

以下只考虑“w₁= 1, w₂= 0”, 且取 K= 500 的情况。图 3 中给出了这一情况的计算结果, 与图 1 中 N= 201 比较, 采用自适应网格技术后, 即使网格点只取到它的 1/4, 计算结果也是很令人满意的。表 2 给出 N= 51, 201 时, 用固定网格计算的误差以及 N= 51 时用自适应网格计算的误差, 很清楚, 随着网格点增加, 误差减小。若网格点数不变, 采用自适应网格技术后, 误差可以下降一个量级。

表 2 误差对比

	固定网格, N= 51	固定网格, N= 201	自适应网格, N= 51
误差 E	0. 08316	0. 0197	0. 0086

图 5 给出了在 T= 1×10⁻⁵s, 3×10⁻⁵s, 6×10⁻⁵s 时, 采用自适应网格技术与没采用自适应网格技术的计算结果与解析解对比的情况。

图 6 给出了网格间距随时间的变化。它清楚地显示出高密度网格区紧紧跟着激波向前推进, 这有效地减少了大梯度区的网格间距, 因而能提高精度, 非常成功地算出运动的激波。

3 结论

(1) 自适应网格技术能有效地减少大梯度区

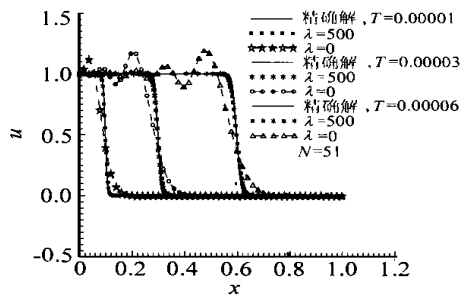


图 5 激波随时间的变化

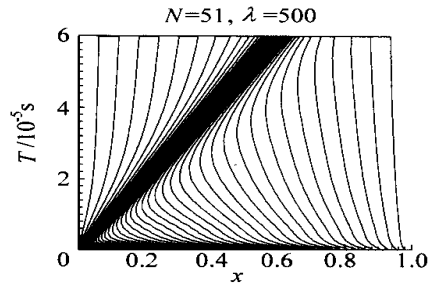


图 6 自适应网格点位置随时间的变化的网格间距, 因而能减小误差, 提高精度;

(2) 自适应网格技术能显著地减少网格点数, 因而能降低运行时间, 并节省内存;

(3) 权函数的选取决定了适应网格分配网格的法则, 选一个好的权函数将能有效地提高自适应网格的效率。

当然, 这些结论都是在一维情况下得到的。关于此方法在二维问题上的应用, 下一步将着力进行。

参 考 文 献

- [1] Brackbill, J U, Saltzman J S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions [J]. J Comput Phys, 1982, 46: 342~368.
- [2] Thompson J F. Grid generation techniques in computational fluid mechanics [J]. AIAA J, 1984, 22: 1505~1523.
- [3] 忻孝康, 黄光伟. 对流-扩散型方程的一种简单、有效的欧拉-拉格朗日分裂格式 [J]. 空气动力学报, 1986, 4(1): 65~72.
- [4] 忻孝康, 朱士灿, 张慧生. 一维 Burgers 方程的各种差分格式研究 [J]. 上海力学, 1980 (1): 61~80.

作者简介:



康红文 男, 31 岁, 副研, 北京大学获博士学位, 后又在清华大学做博士后, 现在在中国气象科学研究院工作, 研究兴趣是将自适应网格技术应用到台风问题上, 以提高对台风路径预报的准确率。Tel: 68407429, E-mail: khw@public.east.cn.net