第 21 卷 第 5 期　航 空 学 报　Vol. 21 No. 5
2000 年 9 月　ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA　Sep. 2000

文章编号: 1000-6893(2000)05-0414-03

具有指定闭环极点的最优控制系统鲁棒稳定摄动界

袁廷奇, 胡峻岭, 张三宝, 刘文江
(西安交通大学 自动控制系, 陕西 西安 710049)

ROBUST STABLE PERTURBATION BOUNDS OF OPTIMAL CONTROL SYSTEMS WITH DESIRED CLOSED LOOP POLES

YUAN Ting-qi, HU Jun-ling, ZHANG San-bao, LIU Wen-jiang
(Department of Automatic Control, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China)

摘 要: 对线性二次最优控制系统, 给出了选择适当加权矩阵从而保证系统具有希望闭环极点的方法。加权矩阵可以通过与期望极点有关的变换阵来调节, 使得系统具有希望的动态品质。针对这种闭环系统存在不确定扰动时, 得出了保证系统稳定的不确定摄动界。

关键词: 最优控制; 闭环极点; 摄动界
中图分类号: V249　文献标识码: A

Abstract: For the linear-quadratic(LQ) optimal control system, a method is proposed to choose the suitable weighting matrices which make the system have desired closed loop poles. The weighting matrices can be regulated by transformation matrices which are related to the desired system poles. So the LQ system acquires the desired dynamic quality. These designs are based on the system normal model. When perturbations occur, the stability and desired performance of the system are affected severely. So it is very important to obtain the allowable stable perturbation bounds for analysis and design of the system. In this paper, a robustness measure bound is introduced for the state-feedback system, and the stable bounds of the closed loop system in the presence of perturbations are derived. The stable bounds are obtained for allowable nonlinear time-varying perturbation. In particular, for linear perturbations the stable bounds are also derived. A numerical example is finally included to demonstrate the proposed procedure.

Key words: optimal control; closed loop poles; perturbation bounds

在实际控制系统中, 由于对系统的信息了解不全面和外部的各种不确定扰动, 同时为了控制的需要将复杂的系统降价和线性化, 系统模型与实际过程之间总存在一定的差距。因此, 不确定系统控制的鲁棒性问题一直是控制理论和应用领域关注的焦点[1~3]。

线性二次型最优控制系统具有许多优良的特性, 其性能与加权阵的选取有关[4~6], 适当选取加权矩阵, 可保证系统具有希望的闭环动态特性或希望的极点, 从而使系统拥有人们希望的性能。因而线性二次型最优控制在实际系统中得到广泛应用。但是当实际系统存在有界非微不确定时, 基于线性模型的系统控制器不能满足实际系统性能的要求, 甚至失去稳定性。对此, 围绕以下两个方向进行了广泛深入的讨论: 其一是如何求得保证系统稳定的控制器, 使系统满足一定的性能[3]; 其二是对满足一定特性的反馈控制系统如何求得所允许的不确定最大摄动界[1,2]。本文针对后者进行讨论, 首先给出了具有极点配置特性的最优控制系统加权阵的选取和反馈控制阵的确定, 对这一满足闭环动态特性的最优控制系统, 当存在不确定摄动时, 给出了保证系统渐近稳定的不确定最大摄动界。

1 指定极点的 LQ 反馈控制

对于线性、定常可控系统

$$\dot{X} = AX + BU \tag{1}$$

选择正定加权阵 Q 和 R, 取 $U = KX$ 则满足

$$\min J = \int_0^{\infty} (X^T QX + U^T RU)\, dt \tag{2}$$

其中: $K = -R^{-1}B^T P$; P 为如下 RICCATI 方程的对称正定解

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{3}$$

收稿日期: 1999-05-18; 修订日期: 1999-09-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69874030)
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2000/05/0414/

定理 1: 对于给定的闭环极点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, 记 $+= \mathrm{diag}(s_1\ s_2 \cdots\ s_n)$, , 如果存在正定对称阵 G 和非奇异变换阵 H, 使

$$V= H+H^{-1} \tag{4}$$

满足 $$AG - GV= BR^{-1}R^{T} \tag{5}$$

取 $$Q= -(A^{T}+V)G^{-1} \tag{6}$$

为对称正定矩阵, 则当反馈矩阵

$$K= -R^{-1}B^{T}G^{-1} \tag{7}$$

可使LQ 系统具有希望的闭环极点。

证明　将式(6)代入式(3)得

$$PA+A^{T}P-PBR^{-1}B^{T}P-(A^{T}+V)G^{-1}=0$$

令 $P= G^{-1}$则上式等号左边为

$$G^{-1}A+A^{T}G^{-1}-G^{-1}BR^{-1}B^{T}G^{-1}-$$
$$(A^{T}+V)G^{-1}=[G^{-1}AG+A^{T}-G^{-1}BR^{-1}B^{T}-$$
$$(A^{T}+V)]G^{-1}=G^{-1}(AG-BR^{-1}B^{T}-GV)G^{-1}$$

由条件式(5) 知, 上式为零。有 $P= G^{-1}$为式(3) 的解。

当 $K= -R^{-1}B^{T}G^{-1}$时, 闭环系统可表示为

$$\dot{X}=(A+BK)X$$
$$A+BK=A-BR^{-1}B^{T}G^{-1}$$

由条件式(5) 可得, $A+ BK= GVG^{-1}$则 $A+ BK$ 与 V相似, 又由式(4) 知 V 与 + 相似, 所以 $A+ BK$ 与 + 有相同的特征值。证毕。

由定理 1 知, 当 Q 按式(6)选取时, 由式(5)可得出其对称性, 通过适当选择变换阵 H 可保证其正定性。这样最优控制系统具有希望的闭环极点, 此时反馈矩阵为式(7)。

2　不确定扰动系统的稳定摄动界

当系统存在不确定扰动时, 引入帕特(PATEL) 鲁棒性指数[1]

$$L=\frac{1}{2\|T^{-1}\|_{s}\|P_{0}\|_{s}}=\frac{K\min(T)}{2K\max(P_{0})}$$

对线性 LQ 系统式(1)～式(3),

$$P_0 \equiv P$$
$$T \equiv 2Q+A^{T}P+PA$$

其中: $\|Y\|_s$ 定义为矩阵 Y的谱范数。

定理 2　对不确定扰动系统

$$\dot{X}=AX+BU+\#(X,U) \tag{8}$$

取

$$\left.\begin{aligned}P_0&=G^{-1}\\ T&=-[G^{-1}A+A^{T}G^{-1}]+2G^{-1}BR^{-1}B^{T}G^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

非线性矢量函数满足条件

$$\frac{\|\#(x,u)\|_E}{\|[x,u]\|_E}\leqslant L=\frac{1}{2\|T^{-1}\|_s\|P_0\|_s}=\frac{K\min(T)}{2K\max(P_0)} \tag{10}$$

则闭环系统 $\dot{X}= (A+ BK)X+ \#(X, U)$ 是渐进稳定的。其中 K 由式(7)确定且

$$\|X\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

证明: 闭环系统渐进稳定的充分条件是当 Lyapunov 函数 $V(x)> 0$ 时, 满足 $\dot{V}(x)\leqslant 0$, 这里只有当 $x= 0$ 时, 等号成立。令 $V(x)= x^{T}G^{-1}x$, 则有

$$\dot{V}(x)=\dot{x}G^{-1}x+x^{T}G^{-1}\dot{x}=$$
$$x^{T}(A^{T}-G^{-1}BR^{-1}B^{T})G^{-1}x+$$
$$x^{T}G^{-1}(A-BR^{-1}B^{T}G^{-1})x+2\#^{T}(x)G^{-1}x=$$
$$x^{T}(A^{T}G^{-1}+G^{-1}A-2G^{-1}BR^{-1}B^{T}G^{-1})x+$$
$$2\#^{T}(x)G^{-1}x$$

由式(9), 则

$$\dot{V}(x)=-x^{T}Tx+2\#^{T}(x)P_0x \tag{11}$$

因为

$$\#^{T}(x)P_0x\leqslant\|\#(x)\|_E\|P_0x\|_E\leqslant$$
$$\|\#(x)\|_E\|P_0\|_S\|x\|_E$$

由条件式(10), 有

$$\#^{T}(x)P_0x\leqslant\frac{K\min(T)}{2K\max(P_0)}K\max(P_0)\|x\|_E^2=$$
$$\frac{1}{2}K\min(T)\|x\|_E^2$$

因而式(11) 为

$$\dot{V}(x)=-x^{T}Tx+2\#^{T}(x)P_0x\leqslant-x^{T}Tx+$$
$$2\times\frac{1}{2}K\min(T)\|x\|_E^2=$$
$$-x^{T}[T-K\min(T)]x$$

对任意 X, 满足 $\dot{V}(x)\leqslant 0$, 故闭环系统稳定。

当不确定扰动为线性扰动时

$$\#[X(t),U(t)]=\$AX(t)+\$BU(t)$$

其中: $A 和 $B 为 n×n 及 n×r 常数矩阵。

当 U= KX 时, $\#[X(t)]= (\$A+\$BK)X(t)$, 方程式(8)变为

$$\dot{X}=[(A+\$A)+(B+\$B)K]X \tag{12}$$

推论 1　如果摄动 $A 和 $B 满足条件

$$\|\$A\|_E+\|\$B\|_E\|K\|_S\leqslant L=$$
$$\frac{1}{2\|T^{-1}\|_S\|P_0\|_S}$$

则闭环系统式(12)稳定。

推论 2　假设 $A 和 $B 的元素满足: $û\$A_{i,j}û\leqslant e_{\$A}$, $û\$B_{i,j}û\leqslant e_{\$B}$ $(i= 1, 2\cdots, n;\ j= 1,$

$2\cdots, r)$

则有 $\|\Delta A\|_E \leqslant n\varepsilon_{\Delta A}$, $\|\Delta B\|_E \leqslant \sqrt{nr}\,\varepsilon_{\Delta B}$。

若满足条件

$$\varepsilon_{\Delta A} + \sqrt{r/n}\,\|K\|_s \varepsilon_{\Delta B} \leqslant L/n$$

则闭环系统式(12)稳定。

以上讨论了具有指定闭环极点的最优控制系统,当存在不确定扰动时,系统能保持稳定的最大不确定摄动界。定理 2 给出的结论满足非线性摄动的情况。

3 实例分析[2]

考虑线性开环系统

$$\dot{X} = AX + BU,\quad X(0) = X_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取 $R = I$, 期望的闭环极点 $s_1 = -7$, $s_2 = -4$, 可求得非奇异变换阵 H

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

则 $$V = H + H^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

解方程(5)可得正定对称阵 G

$$G = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.025 \\ 0.025 & 0.525 \end{bmatrix}$$

则 $$P_0 = G^{-1} = \begin{bmatrix} 8.0769 & -0.3846 \\ -0.3846 & 1.9231 \end{bmatrix}$$

$$K_{1,2}(P_0) = 8.1009,\ 1.8991$$

求得的反馈阵为

$$K = -R^{-1}B^{T}G^{-1} = \begin{bmatrix} -8.0769 & 0.3846 \\ 0.3846 & -1.9231 \end{bmatrix}$$

$$\|K\|_s = 8.1009$$

由式(9)可得 T 阵为

$$T = \begin{bmatrix} 113.8462 & -6.1538 \\ -6.1538 & 15.3846 \end{bmatrix}$$

$$K_{1,2}(T_0) = 114.2293,\ 15.0015$$

$$L = \frac{1}{2\|T^{-1}\|_s \|P_0\|_s} = \frac{K_{\min}(T)}{2K_{\max}(P_0)} = \frac{15.0015}{2 \times 8.1009} = 0.9259$$

则得到闭环系统的稳定摄动界为

$$\|\Delta A\|_E + 8.101\|\Delta B\|_E \leqslant 0.9259$$

且有

$$\varepsilon_{\Delta A} + 8.101\varepsilon_{\Delta B} \leqslant \frac{L}{2} = 0.463$$

参 考 文 献

[1] Patel R V, Toda M, Sridhar B. Robustness of linear quadratic state feedback designs in the presence of system uncertainty[J]. IEEE Trans on AC, 1977, 22(5): 945～949.

[2] Abdul-Wahab A A. Robustness measure bounds for Lyapunov-type state-feedback systems[J]. IEEE Proceedings, 1990, 137(5): 337～340.

[3] 袁立嵩, 蒋慰孙. 参数摄动系统的鲁棒 LQ 反馈控制[J]. 自动化学报, 1994, 11(6): 678～685.

[4] 喻铁军, 戴冠中. 指定闭环特征值的最优控制系统参数化设计[J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 18～22.

[5] Juang J C, Lee T T. On optimal pole assignment in a specified region [J]. Int J Control, 1984, 40(1): 65～79.

[6] Saif M. Optimal linear regulator pole placement by weight selection[J]. Int J Control, 1989, 50(30): 399～414.

作者简介:

袁廷奇 1966 年生, 1993 年于西安交通大学电气学院获得硕士学位, 现为西安交通大学电信学院自控系博士生, 主要研究方向为最优控制, 系统辩识, 鲁棒控制。联系电话: (029) 3268665。