

文章编号: 1000-6893(2000)03-0258-04

## 疲劳裂纹扩展随机过程的统计分析

张建宇, 赵丽滨, 费斌军

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

### STATISTICAL ANALYSIS TO RANDOM PROCESS OF FATIGUE CRACK PROPAGATION

ZHANG Jian-yu, ZHAO Li-bin, FEI Bin-jun

(The Solid Mechanics Research Center, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083, China)

**摘要:** 证明了两种疲劳裂纹扩展随机模型(即以时间为参量的随机过程模型和以裂纹长度为参量的随机过程模型)在描述裂纹扩展随机过程方面的统一性。建立了由试验数据估计平稳对数正态随机过程相关参数的方法,可以直接由试验数据估计疲劳裂纹扩展随机过程的相关参数。针对 4 种机型含紧固孔试件谱载荷下的疲劳裂纹扩展试验数据,给出了用文中方法估计的相关参数和用随机模拟法估算的置信区间。

**关键词:** 裂纹扩展; 参数估计; 可靠性; 概率断裂力学

**中图分类号:** O 346 1, V 215 7 **文献标识码:** A

**Abstract** The fatigue crack growth lognormal random process model based on time and the model based on crack length are usually used in the reliability and damage tolerance analysis. These models are identical under special conditions. Based on these models, a new method of evaluating the auto-correlative parameter in the usual stationary normal random process by the experimental data is established. Using this method, the value of the correlative parameter can be evaluated directly on the basis of the experimental data. At the same time, the confidence interval of the parameters is obtained by using Monte-Carlo method. At the end, a numerical example is given. In this example, four groups of experimental data of the specimens with fastening holes under pseudorandom spectrum loading, those obtained from 93 specimens, are used to determine correlative parameters.

**Key words:** crack propagation; parameter estimations; reliability; probability fracture mechanics

疲劳裂纹扩展分析是疲劳危险结构设计和寿命估算的主要任务之一,在根据概率断裂力学方法所进行的飞机结构疲劳可靠性分析时需要采用裂纹扩展随机模型。当前描述疲劳裂纹扩展的随机过程模型的一类方法是在确定性断裂力学(DFM)的基础上,将裂纹扩展速率  $da/dt$  (或  $da/dN$ ) 表达式中的参数随机化,统称为DFM 随机化模型,如以 J. N. Yang 为代表的对数正态随机过程模型等<sup>[1-5]</sup>。在这些模型中普遍采用平稳对数正态随机过程描述裂纹扩展的随机特性,常用的是以时间为参量的随机过程模型<sup>[1]</sup>和以裂纹长度为参量的随机过程模型<sup>[3]</sup>。

本文的目的是:首先证明两类DFM 随机化模型在描述裂纹扩展随机过程上的统一性,然后给出估计两类模型中相关参数的方法,最后对 4 个机型共 93 个试件的试验数据,应用不同的数据处理方法进行统计分析,并用 Monte-Carlo 方法估算了相关参数估计值的置信区间。

### 1 两类DFM 随机化模型在描述裂纹扩展随机过程上的统一性

一般地,确定性裂纹扩展方程可统一地表达为

$$da(t)/dt = L(\Delta K, K_{max}, R, S, a) \quad (1)$$

将  $L(\Delta K, K_{max}, R, S, a)$  记为  $L()$ ,则以时间为参量的随机过程模型可表达为<sup>[1]</sup>

$$da(t)/dt = X(t)L() \quad (2)$$

式中:附加因子  $X(t)$  是以时间  $t$  为参量,中位数为 1 的非负平稳随机过程,根据工程中大量裂纹扩展速率数据的统计分析,通常假设  $X(t)$  是一平稳对数正态随机过程。对式(2)进行变换得

$$X(t) = \frac{da(t)/dt}{L()} \quad (3)$$

因而

$$Z_t(t) = \ln X(t) = \ln da(t)/dt - \ln L() \quad (4)$$

是以时间为参量的平稳正态随机过程。

以裂纹长度为参量的随机过程模型可表达为<sup>[3]</sup>

$$M(a)da(t)/dt = L() \quad (5)$$

式中:附加因子  $M(a)$  是以裂纹长度  $a$  为参量的

中位数为 1 的非负平稳随机过程,  $M(a)$  是平稳对数正态随机过程。

对式(5)进行变换得

$$M(a) = \frac{L(\cdot)}{da(t)/dt} \quad (6)$$

因而

$$Z_a(a) = \ln M(a) = \ln L(\cdot) - \ln da(t)/dt - (\ln da(t)/dt - \ln L(\cdot)) \quad (7)$$

是以裂纹长度为参量的平稳正态随机过程。

从式(4)和式(7)可以看出  $Z_a(a)$  和  $Z_t(t)$  在表达上只相差一个负号, 如果用以时间和裂纹长度为参量的双参数随机过程来描述裂纹扩展随机过程

$$Z(t, a) = \ln da(t)/dt - \ln L(\cdot) \quad (8)$$

则  $Z_a(a)$  和  $Z_t(t)$  是  $Z(t, a)$  的两种边际情况, 是对同一问题的不同表达。因此在本质上以裂纹长度为参量的随机过程模型与以时间为参量的随机过程模型对裂纹扩展描述是统一的。当两类模型都退化为随机变量模型时, 随机变量的表达式只相差一个负号, 又因为随机变量的概率密度函数是对称的(正态随机变量), 因此两种随机变量模型是完全相同的。

## 2 由试验数据估计 $\xi_s$ 的方法

在以裂纹长度为参量的裂纹扩展模型中, 裂纹扩展对数正态随机过程的协方差函数为<sup>[3]</sup>

$$\text{Cov}[M(a^*), M(a^{**})] = \alpha^2 \exp\{-|a^* - a^{**}|/\xi_s\} \quad (9)$$

建立统计量  $A = (M(a_i) - \mu_M)(M(a_j) - \mu_M)$ , 其中:  $i \neq j$  则

$$EA = \text{Cov}[M(a_i), M(a_j)] = \alpha^2 \exp\{-|a_i - a_j|/\xi_s\} \quad (10)$$

在以  $A$  和  $|\Delta a|$  为坐标的平面上的一簇曲线  $A = \alpha^2 \exp\{-|\Delta a|/\xi_s\}$ ,  $l = 1, 2, \dots$  中, 对于一组数据  $(A_{ij}, |a_i - a_j|)$  有一条曲线(即确定的  $\xi_s$ ) 使得这组数据的拟合效果最好(偏差的平方和最小), 即应用最小二乘原理, 使  $[A_{ij} - \alpha^2 \exp\{-|a_i - a_j|/\xi_s\}]^2$  取最小值(式中的  $\sum$  表示对  $i$  和  $j$  循环求和, 下同)。所以有

$$\frac{\partial}{\partial \xi_s} [A_{ij} - \alpha^2 \exp\{-|a_i - a_j|/\xi_s\}]^2 = 0 \quad (11)$$

因而

$$f(\xi_s) = [A_{ij} |a_i - a_j| \exp\{-|a_i - a_j|/\xi_s\}] - \alpha^2 [ |a_i - a_j| \exp\{-2|a_i - a_j|/\xi_s\}] = 0 \quad (12)$$

式(12)无法用解析法求解, 根据最小二乘拟合理论最佳平方逼近元素具有唯一性, 此方程有唯一解, 可以用数值方法求解。

## 3 由试验数据估计 $\xi_t$ 的方法

文献[6]中给出了用谱载荷下疲劳裂纹扩展的试验数据估计  $\xi_t$  的方法, 但是由于这一方法只能解决  $\Delta t$  为常数时的参数估计, 因此在应用上受到了限制, 在这里应用与 2 中类似的方法建立  $\xi_t$  的估计方法。

在以时间为参量的随机过程模型中, 裂纹扩展对数正态随机过程的协方差函数为<sup>[1]</sup>

$$\text{Cov}[X(t_i), X(t_j)] = \alpha^2 \exp\{-|t_i - t_j|/\xi_t\} \quad (13)$$

建立统计量  $B = (X(t_i) - \mu_X)(X(t_j) - \mu_X)$  其中  $i \neq j$ , 类似于 2 中的方法, 可以得到

$$f(\xi_t) = [B_{ij} |t_i - t_j| \exp\{-|t_i - t_j|/\xi_t\}] - \alpha^2 [ |t_i - t_j| \exp\{-2|t_i - t_j|/\xi_t\}] = 0 \quad (14)$$

式(14)可以用数值方法求解。

## 4 用随机模拟法估计相关参数置信区间

给出了相关参数的估计值, 应同时给出其在一定置信度下的置信区间。这里采用随机模拟方法估算相关参数估计值的置信区间。

模拟随机过程中所涉及的问题在文献[7]中已有详细论述, 这里不再赘述。用随机模拟法估计相关参数的置信区间主要涉及两个方向的问题: 其一是给定参数的真值, 得到参数估计值的分布, 以检查模拟的估计值是否收敛于真值, 这是正向问题; 其二是给出参数的估计值, 得到其真值的分布, 进而得到置信区间, 这是反向问题。这里重点讨论反向问题。

下面以  $\xi_s$  为例讨论随机模拟过程中应考虑的问题, 这些讨论同样适用于  $\xi_t$ 。

对于正向问题, 给定  $\xi_s$  和  $\alpha^2$  及样本容量  $N$ , 可以直接用文献[7]中所述的方法产生一组估计值(100 个以上), 增大  $N$ , 再产生另一组估计值, 研究估计值的分布是否收敛于真值。在正向问题得到验证后, 用以下方法解决反向问题。

已知给定估计值  $\xi_s^*$  和  $\alpha^2$  及样本容量  $N$ , 对在  $\xi_s^*$  附近的一个区域(可称为  $K_1$  区域)内的一组( $K_1$  个)均匀顺序选取的  $\xi_s^i$ ,  $i = 1, \dots, K_1$  进行随机模拟, 对每一  $\xi_s^i$  产生一组( $K_2$  个)估计值。

从这个  $K_1 \times K_2$  估计值中选取最接近  $\xi_i^*$  的  $K_2$  个估计值, 这  $K_2$  个估计值落在  $\xi_i^*$  的一个邻域内 (可称为  $K_2$  邻域), 可以认为这  $K_2$  个估计值就是  $\xi_i^*$ , 由正向问题结论,  $P\{\xi_i^* | \xi_i\}$  已知, 又由于在  $K_1$  区域内每个真值  $\xi_i$  出现的概率是相等的, 故可由 Bayes 公式得

$$P\{\xi_i^* | \xi_i\} = \frac{P\{\xi_i^* | \xi_i\} / K_1}{\sum_{j=1}^{K_1} P\{\xi_j^* | \xi_i\} / K_1} \quad i = 1, \dots, K_1 \quad (15)$$

可简化为:

$$P\{\xi_i^* | \xi_i\} = x_i / K_2 \quad i = 1, 2, \dots, K_1 \quad (16)$$

其中:  $x_i$  表示产生  $\xi_i$  的估计值落在  $\xi_i^*$  的  $K_2$  邻域内的个数, 式(16)就是给定估计值时真值的近似分布率, 如果  $K_1$  和  $K_2$  足够大, 就可以将式(16)看成给定估计值时真值的真实分布率, 从而得到在一定置信水平下的置信区间。

以上实际是将连续分布的问题数值离散化。下面说明计算过程中应注意的两个问题: 要保证  $\xi_i^*$  所对应的真值区间包含于所给定的  $K_1$  区域。如  $\xi_i^*$  所对应真值区间的边界接近所给定  $K_1$  区域的边界, 就要扩大  $K_1$  区域再次模拟, 直到确认  $K_1$  区域包含了  $\xi_i^*$  所对应的可能真值区间, 这样才能保证模拟结果的准确性。增大  $K_2$  可以减小结果的误差, 而增大  $K_1$  可以增加求解的有效数字位数, 但要注意保持两者协调。如  $K_1$  过大, 则由增大  $K_1$  所带来的精度提高将被误差所湮没; 如  $K_2$  过大, 则结果的精度没有因误差的减小而获得提高。随机模拟的计算量很大, 以上两种

浪费都是应当避免的。

### 5 试验数据的统计分析

对伪随机谱载荷下含紧固孔试件, 式(1)可化为<sup>[1-3]</sup>

$$da(t)/dt = CS^r a^b(t) \quad (17)$$

式中:  $C, b, r$  为常数;  $S$  为载荷谱中最大名义应力。现以 4 种机型共 93 个含紧固孔的狗骨状试件的疲劳裂纹扩展试验数据, 分别求以时间和裂纹长度为参量的裂纹扩展随机过程的相关参数  $\xi_i$  和  $\xi_o$ 。图 1 给出了机型 1 的部分裂纹扩展  $(a, t)$  曲线, 其他曲线就不一一列举了。

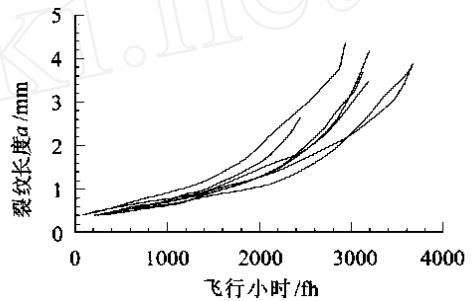


图 1 机型 1 部分裂纹扩展数据

由于试验数据是以  $(a, t)$  形式给出的, 为获得裂纹扩展速率必须加以处理。分别采用割线法、五点增量多项式和七点增量多项式拟合求出各时刻裂纹扩展速率  $da(t)/dt |_{t=t_{ij}}$ , 用最小二乘法对式(17)进行拟合求出常数  $C, b, r$ 。表 1 中列出了拟合结果。

表 1 应用不同的数据处理方法拟合裂纹扩展参数的结果

方法	割线法			五点增量多项式法			七点增量多项式法		
	C	b	r	C	b	r	C	b	r
机型 1	$0.139 \times 10^{-14}$	1.013	4.135	$0.498 \times 10^{-15}$	1.035	4.288	$0.268 \times 10^{-15}$	1.065	4.380
机型 2	$0.264 \times 10^{-6}$	0.584	1.518	$0.508 \times 10^{-6}$	0.524	1.407	$0.101 \times 10^{-5}$	0.495	1.276
机型 3	$0.220 \times 10^{-8}$	0.950	2.052	$0.741 \times 10^{-9}$	0.968	2.222	$0.124 \times 10^{-9}$	1.002	2.499
机型 4	$0.260 \times 10^{-7}$	0.701	1.679	$0.928 \times 10^{-7}$	0.687	1.478	$0.923 \times 10^{-7}$	0.705	1.473

利用式(12)和式(14), 可以估计用两种DFM随机化模型描述的裂纹扩展随机过程的相关参数  $\xi_i$  和  $\xi_o$ , 同时采用 4 节中的方法可以得到相应参数置信度为 0.90 置信区间, 将结果列入表 2。

通过表 1 和表 2 这两组数据可以看出: 不同的载荷谱和材料试验所确定的裂纹扩展方程的参数的差异很大, 因此针对不同的机型和材料进行概率损伤容限分析时必须进行相应的裂纹扩展寿

命试验以确定裂纹扩展方程的参数。获取裂纹扩展速率的数据处理方法对裂纹扩展随机过程的相关参数 ( $\xi_i$  和  $\xi_o$ ) 有直接的影响, 获取一点处的裂纹扩展速率所用的数据点越多, 所求得的裂纹扩展的相关参数越大。对于同一组试验数据采用不同的处理方法获得的裂纹扩展随机过程的相关参数 ( $\xi_i$  和  $\xi_o$ ) 具有相同的规律。

表 2 裂纹扩展随机过程相关参数及其置信区间

机型	数据处理方法	$\xi_c/mm$	置信区间	$\xi_c/fh$	置信区间
	割线法	0.144	(0.11, 0.14)	188	(150, 257)
1	五点增量多项式法	0.389	(0.30, 0.48)	406	(322, 508)
	七点增量多项式法	0.460	(0.34, 0.57)	486	(388, 600)
	割线法	0.204	(0.15, 0.29)	263	(204, 358)
2	五点增量多项式法	0.573	(0.40, 0.72)	469	(388, 566)
	七点增量多项式法	0.701	(0.49, 0.93)	545	(412, 722)
	割线法	0.727	(0.50, 0.95)	861	(664, 1117)
3	五点增量多项式法	0.872	(0.59, 1.10)	1021	(762, 1308)
	七点增量多项式法	0.961	(0.67, 1.21)	1194	(948, 1431)
	割线法	1.400	(1.02, 1.62)	1536	(1142, 1997)
4	五点增量多项式法	2.678	(1.80, 3.52)	2597	(1737, 3497)
	七点增量多项式法	3.232	(2.35, 4.16)	3189	(2278, 4128)

6 结 论

- (1) 以时间和以裂纹长度为参量的随机过程模型在描述裂纹扩展随机过程上是统一的。
- (2) 用文中方法可以由裂纹扩展试验数据直接估计两种随机过程的相关参数。
- (3) 采用不同的数据处理方法对裂纹扩展参数的估计影响很大。
- (4) 不同的载荷谱和材料对裂纹扩展随机特性的影响不同, 因此在对结构进行概率损伤容限分析时必须进行相应情况下的裂纹扩展试验。

参 考 文 献

[1] Provan J W. Probabilistic fracture mechanics and reliability [M]. Boston: Martin's Nijhoff Publishers, 1987.

[2] Zhu W Q, Lin Y K. On fatigue crack growth under random loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1992, 43: 1

~ 12

[3] 张建宇, 费斌军. 以裂纹长度为参量的疲劳裂纹扩展随机模型[J]. 北京: 北京航空航天大学学报, 1996, 22(3): 302 ~ 305.

[4] Yang J N, Hsi W H, Manning S D, et al. Stochastic crack propagation in fastener holes[J]. J Aircraft, 1985, 22: 810 ~ 817.

[5] 张建宇. 含多裂纹结构的概率损伤容限分析方法研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1997.

[6] 张建宇, 费斌军. 疲劳裂纹扩展随机过程相关参数的估计[J]. 北京: 北京航空航天大学学报, 1998, 24(3): 308 ~ 310.

[7] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

作者简介:



张建宇 男, 1973 年 12 月出生, 博士研究生, 主要研究方向: 疲劳多裂纹结构的可靠性分析, 腐蚀疲劳裂纹扩展规律研究, 概率断裂力学的理论和方法。



赵丽滨 女, 1976 年 4 月出生, 博士研究生, 主要研究方向: 有限元分析的数值方法, 结构强度分析, 结构冲击动力学。



费斌军 男, 1954 年 8 月出生, 留法博士, 北京航空航天大学教授, 博士生导师, 副校长, 主要研究方向: 结构疲劳可靠性, 概率断裂力学。

## 发动机软科学学术讨论会 为发展我国航空动力事业献计献策

1999 年 10 月 14~ 17 日, 中国航空学会第五届发动机软科学学术讨论会在昆明召开。会议由主任委员陈浚主持。有 12 个单位共 18 名委员和代表参加了会议。

会议共收到 14 篇论文, 5 位同志应邀做了专题大会发言, 内容涉及发动机发展战略、科研管理、企业改革、关键技术、国外动态等方面, 内容丰富, 研讨热烈。在大会广泛交流的基础上, 会议围绕如何加快产品研制、加速产业结构调整进行了专题讨论。大家发表了许多很好的意见, 坦诚地交流了看法, 提出了不少中肯的建议。归纳起来主要有以下几点:

- (一) 把发展航空动力提到国家战略高度, 列为高科技专项重点工程, 下定决心根治“心脏病”。
- (二) 动力行业的发展在总体上应贯彻的指导原则。
- (三) 有限目标, 突出重点, 集中力量办好几件大事。
- (四) 加速产业结构调整, 深化大中型国有企业改革, 优化组合, 实现两个根本转变。
- (五) 采取有力措施, 吸引人才, 稳定队伍, 特别是科技带头人、高级工人和高级管理干部等核心骨干

队伍。

(李铁柏)

