

文章编号: 1000-6893(2000)02-0103-05

# 数值网格生成技术中方程非线性系数对网格正交性和疏密分布的影响

李 春, 程新广

(上海理工大学 动力工程学院, 上海 200093)

## EFFECTS OF NON-LINEAR FACTORS IN NUMERICAL GRID GENERATION EQUATIONS ON ORTHOGONALITY AND SPACING

LI Chun, CHENG Xin-guang

(College of Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**摘 要:** 对椭圆型方程中非线性系数对网格正交性和空间分布的影响进行了理论分析和数值验证。结果表明: 方程中混合偏导数项系数具有控制网格正交性的作用; 其它两个二次偏导数项系数具有调节网格空间分布的作用, 且其调节的强弱和作用与其比值有直接关系。利用方程系数的这些特性, 提出一种 Numman 边界条件的给定方法, 较好地实现了网格正交和疏密分布的有效控制。

**关键词:** 网格生成; 偏微分方程; 正交性; 数值方法

**中图分类号:** V211.3, O241.82 **文献标识码:** A

**Abstract:** The numerical grid generation techniques using PDE are widely used practically and studied frequently. In this paper the non-linear factors in the elliptic equations for grid generation are studied in details. The theoretical and numerical results show that the factors have strong influences on the grid spacing and orthogonality. The factor of the mixed partial derivative term controls the grid orthogonality. The other two factors of second order partial derivative terms control the grid spacing. The strength and function of spacing controlling are directly connected with the ratio of the factors. Based on the above characteristics of the factors with a Numman boundary condition, the orthogonality and spacing distribution of grid can be well controlled. These results have also a significant impact for both the parabolic and hyperbolic equations.

**Key words:** grid generation; partial differential equation; orthogonality; numerical methods

数值网格生成技术迄今仍是 CFD 领域中前处理的关键, 国外一些著名的 CFD 商用软件包, 如 PHOENIX, EURANUS, COSMOS/M 和 FLOW-3D 等都将网格生成作为其主要的前处理模块。曲线坐标生成技术极大地提高了有限差分方法求解方程的功能和多面性, 它使得有限差分方法可以和有限元方法在应用于任意边界形状和易于集中网格节点方面相媲美<sup>[1]</sup>。求解偏微分方程的曲线贴体网格生成已成为目前主要的网格生成技术, 并仍在研究和发展之中。本文以椭圆型方程为基础, 对方程中非线性系数的特性进行了理论分析, 并结合数值计算得出了其对生成网格空间分布和正交性的影响, 较好地实现了对任意复杂边界生成网格的正交性与疏密分布的控制调整。

### 1 网格生成控制方程及理论分析

TTM 方法生成贴体曲线网格计算域内的控制方程组(偏微分方程组)为<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} Ax_{NN} - 2Bx_{NG} + Cx_{GG} &= -J^2(x_N P + x_G Q) \\ Ay_{NN} - 2By_{NG} + Cy_{GG} &= -J^2(y_N P + y_G Q) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $a = x_G^2 + y_G^2$ ,  $B = x_N y_N + x_G y_G$ ,  $C = x_N^2 + y_N^2$ 。

方程组(1)以张量可表示为下面的统一形式

$$\hat{u}r\hat{a}^2r_{NN} - 2(r_N r_G)r_{NG} + \hat{u}r\hat{n}^2r_{GG} = -(\hat{u}r\hat{a}^2r_N P + \hat{u}r\hat{n}^2r_G Q) \quad (2)$$

式中:  $r_G$ 为等 N 线的切向矢量;  $r_N$ 为等 G 线的切向矢量。比较方程组(1)和方程(2)可知

$$A = \hat{u}r\hat{a}^2, C = \hat{u}r\hat{n}^2, B = r_N r_G$$

显然由矢量定义可知 A, B, C 的几何意义:  $\overline{A}$  为等 N 线切向矢量的长度;  $\overline{C}$  为等 G 线切向矢量的长度; B 为等 N G 线切向矢量夹角的余弦值。这也可以从物理平面的网格示意图(图 1)得到验证。

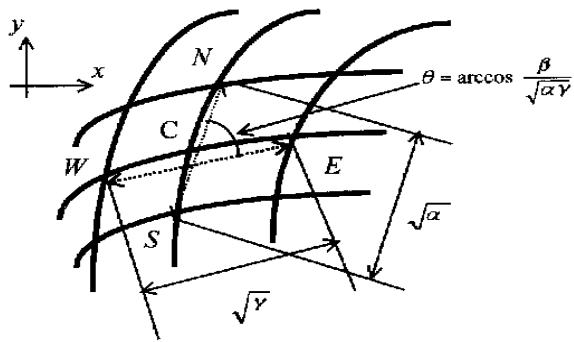


图1 A, B, C的几何意义

令  $S_N = S_G = 1$ , 将方程组(1)中 A, B, C 的表达式写成差分形式

$$A = x_G^2 + y_G^2 = (x_N - x_S)^2 + (y_N - y_S)^2$$

$$C = x_N^2 + y_N^2 = (x_E - x_W)^2 + (y_E - y_W)^2$$

$$B = x_N x_G + y_N y_G = (x_E - x_W)(x_N - x_S) + (y_E - y_W)(y_N - y_S)$$

由上面的差分形式并结合图1可以发现

$$\bar{A} = \hat{u}NS\hat{u}, \quad \bar{C} = \hat{u}WE\hat{u}, \quad \frac{B}{AC} = \cos H$$

其中: H为 $\hat{u}WE\hat{u}$ 和 $\hat{u}NS\hat{u}$ 的夹角。

至此可知, 当等 G N线正交时  $B=0$ 。因此在调整网格正交性时, 可以将  $B=0$  视为网格正交的条件。通过在控制方程中于区域的边界使  $B=0$  可以达到控制全场网格正交性的目的。实际上这是利用了 B 几何意义对椭圆型方程给定 Numman 边界条件的求解方法, 显然其解是适定的<sup>[3]</sup>。从以上分析还可知系数 A/C 可用来控制等 G 和 N 网格线的空间分布, 即通过适当给定 A 和 C 的取值(比值)来达到网格空间密度分布的控制。

## 2 网格疏密及正交控制的数值实现

一般地, 常规网格疏密控制是通过给定控制方程中源项 P, Q 表达式中的密集强度因子和衰减因子来实现网格疏密的控制。但是这种空间疏密分布调整存在许多不足<sup>[4]</sup>。本文则采用了完全不用源项的给定来调节网格疏密的方法, 由于这是一种 Laplace 方程的求解方法, 故而求解方便、收敛速度快。用此方法结合本文提出的正交性控制较好地实现了网格正交性及空间疏密分布的控制。

### 2.1 方程离散及迭代格式

在计算平面内, 令  $S_N = S_G = 1$ , 将方程组(1)离散为差分形式(五点差分格式), 并整理后得到其点迭代形式

$$\left. \begin{aligned} x_C^{n+1} &= [A(x_W + x_E) + C(x_N + x_S) - 2Bx_{NG} + J^2(x_N P + x_C Q)] / [2(A + C)] \\ y_C^{n+1} &= [A(y_W + y_E) + C(y_N + y_S) - 2By_{NG} + J^2(y_N P + y_C Q)] / [2(A + C)] \end{aligned} \right\} (3)$$

式中:  $n+1$  为本次迭代次数;  $n$  为上次迭代次数; 下标 W, E, N, S 如图1所示。

### 2.2 网格正交的实现及边界条件处理

由上可知  $B=0$  为网格正交的条件, 由于边界上网格点的分布对内场网格的分布产生强烈的影响这是由椭圆型方程的性质所决定的, 故本文采用 Numman 边界条件, 来调节边界上点的分布, 使近边界区域的网格分布满足正交条件, 进而传播影响到内场, 从而得到在全场均有较好正交性的网格分布。如图2所示, 其在物理平面(x, y)和计算平面(N, G)内的边界条件应相应满足。

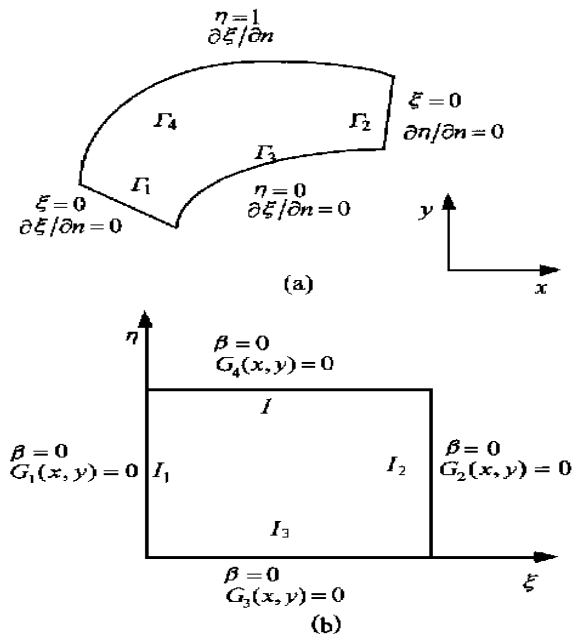


图2 边界条件的给定

(a) 物理平面; (b) 计算平面

至此可进行网格生成计算。其计算步骤为:

(1) 令式(3)中  $P=0, Q=0$ , 用其对内场点进行迭代计算。

(2) 判断边界上的网格是否正交, 若未满足正交条件, 则对边界上的网格点的分布进行调整, 使其满足正交条件。

### 2.3 系数 A/C 对网格疏密分布的控制

为了分析方便, 令式(3)中  $B=0, P=0, Q=$

0, 则有

$$\left. \begin{aligned} x_C^{n+1} &= [A(x_W + x_E) + C(x_N + x_S)]^n \\ &[2(A + C)] \\ y_C^{n+1} &= [A(y_W + y_E) + C(y_N + y_S)]^n \\ &[2(A + C)] \end{aligned} \right\} (4)$$

又  $\bar{A} = \hat{u}NS\hat{u}$ ,  $\bar{C} = \hat{u}WE\hat{u}$ , 则 C 点的坐标值由 W, E, N, S 4 点的坐标值分别通过 A, C 加权平均得到, 即点 C 位置与系数 A, C 的取值有直接关系。

(1) 当  $A \gg C$ , 式(4)可简化为

$$\left. \begin{aligned} x_C^{n+1} &= [A(x_W + x_E) + C(x_N + x_S)]^n \\ &[2(A + C)] = (x_W + x_E)/2 \\ y_C^{n+1} &= [A(y_W + y_E) + C(y_N + y_S)]^n \\ &[2(A + C)] = (y_W + y_E)/2 \end{aligned} \right\} (5)$$

即点  $C_i$  为线段  $W_iE_i$  的中点。当等 G 线为直线时, 该线上的等 N 线渐呈等距分布, 如图 3(a) 所示; 而当等 G 线为曲线时, 如图 3(b) 所示, 在计算中存在以  $C'$  替代 C 的趋势, 使网格线不断向内收缩, 从而使网格线向内密集。

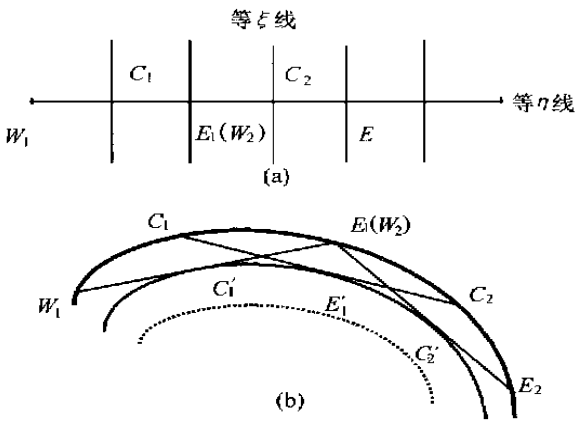


图 3 网格线分布趋势  
(a) 直等 G 线; (b) 曲等 G 线

(2) 当  $A < C$ , 式(4)变为

$$\left. \begin{aligned} x_C^{n+1} &= [A(x_W + x_E) + C(x_N + x_S)]^n \\ &[2(A + C)] = (x_N + x_S)/2 \\ y_C^{n+1} &= [A(y_W + y_E) + C(y_N + y_S)]^n \\ &[2(A + C)] = (y_N + y_S)/2 \end{aligned} \right\}$$

则其对网格空间分布的影响与  $A > C$  时相仿, 只是受其影响的是等 N 线, 此不赘述。

(3)  $C/A$  为某一定值时, 则对等 N 线和等 G 线均有调节作用。其调节作用的强弱(对等 N 线和

等 G 线)取决于  $C/A$  比值的大小。

### 2.4 网格疏密控制实现

由以上理论分析以及后面计算可知, 单纯调节 A, C 的比例则对点 C 的制约太小, 且只能对网格线沿内法线方向调节, 即只有“向心”调节能力, 不具有“离心”调节能力, 离实用还有一定距离。此外 A, C 的比例需重复修整, 计算具有一定的盲目性, 所以单纯靠 A, C 值的调节很难得到所需的网格分布。为实现对网格的疏密分布有效的控制, 参考文献[5]本文采用如下方法:

设已有一网格如图 4 实线所示, 称之为参照网格, 现要求另一网格, 其只在某一网格线上与参照网格不同, 设该网格线为  $j = n$ , 要求其向网格线  $j = n - 1$  密集, 如图 4 中的虚线所示, 设参照网格的坐标为  $(x_{i,j}, y_{i,j})$ , 点  $(i, n)$  与点  $(i, n - 1)$  间的距离为  $l_1$ , 点  $(i, n)$  与点  $(i, n + 1)$  之间的距离为  $l_2$ , 再设所求网格中, 点  $(i, n)$  与点  $(i, n - 1)$  间的距离为  $l'_1$ , 点  $(i, n)$  与点  $(i, n + 1)$  之间的距离为  $l'_2$ 。

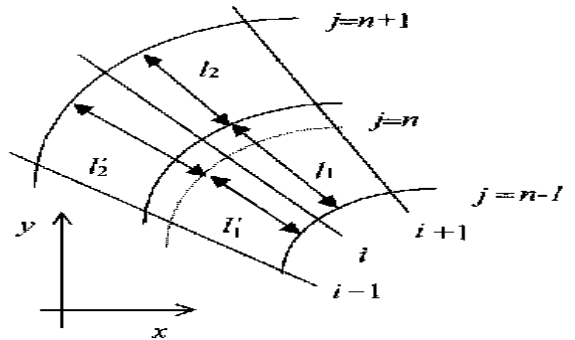


图 4 物理域网格示意图

令:  $g_{n-1} = l'_1/l_1$ ,  $g_n = l'_2/l_2$ , 则存在下列线性关系

$$\left. \begin{aligned} R_{i,n} - R_{i,n-1} &= (R_{i,n} - R_{i,n-1})/g_{n-1} \\ R_{i,n+1} - R_{i,n} &= (R_{i,n+1} - R_{i,n})/g_n \end{aligned} \right\} (6)$$

式中:  $R_{i,j} = x_{i,j}$  或  $y_{i,j}$ ;  $R'_{i,j} = x'_{i,j}$  或  $y'_{i,j}$ 。

将式(6)代入 Laplace 网格生成方程并消除参照网格中点  $(i, j)$  的坐标得差分形式为

$$A(R_{i-1,j} - 2R_{i,j} + R_{i+1,j}) - B(R_{i-1,j-1} - R_{i-1,j+1} + R_{i+1,j+1} - R_{i+1,j-1})/2 + C(R_{i,j} - R_{i,j-1})/g_{n-1} + (R_{i,j+1} - R_{i,j})/g_n = 0 \quad (7)$$

至此, 从方程(7)出发, 在不同的网格线取不同的  $g_{n-1}$ ,  $g_n$  值, 就可以达到控制网格疏密分布的目的。

### 2.5 网格正交及疏密控制实现的二步法

由上述知, 2.2 节和 2.4 节所提方法可分别

对网格正交性和疏密分别进行控制,为得到两者均较满意的网格,本文综合了2.2节和2.4节所提方法,称之为二步法:第1步首先利用B特性使所求网格满足正交性条件;第2步再以此为初场来进一步控制网格的疏密分布。由于这2步均是求解 Laplace 方程,因而具有求解方便、迭代收敛速度快的优点。数值结果表明该方法很好地达到了正交性和疏密性的双重控制。具体步骤如下:

第1步,调节边界使  $B=0$ , 全场  $P=0, Q=0$ , 求解方程组(3);

第2步,以上述结果为初场,进一步采用式(7)调整网格的疏密分布。

### 3 计算结果分析

#### 3.1 二步法网格正交性和疏密分布控制

采用本文所提方法对透平静叶大转角叶栅<sup>[6]</sup>进行了网格生成计算,并将其与常规方法(Laplace 方程)作了比较。图5(a)为本文二步法计算结果,结果表明其边界及内场的正交性均很好,较传统方法有了本质的改进,同时在网格疏密度方面也得到了较为满意的结果(见图5(b)~图5(d))。

从以上计算结果可见,在本方法中因为网格的疏密性与正交性密切相关,在调节疏密的同时,对正交性有所影响。这从图5(b)~图5(d)可明显地看出,为达到一定的疏密程度,在正交性方面存在一定的损失,但仍可达到满意的正交性。

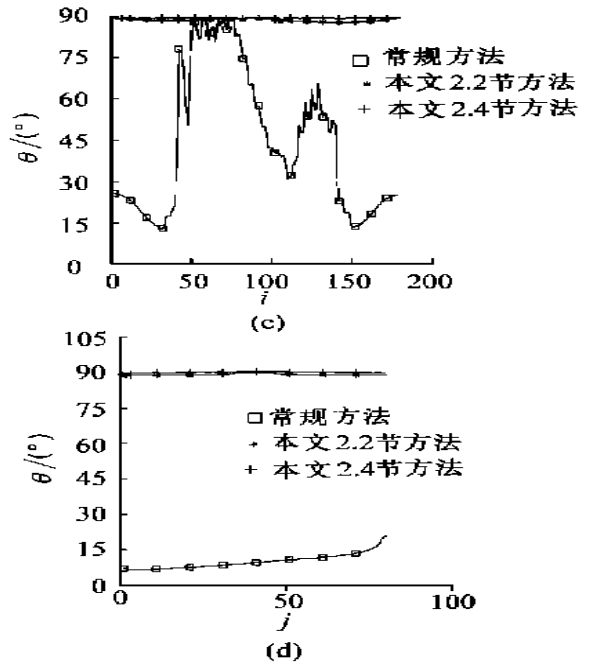


图5 大转角叶栅网格生成计算结果

- (a) 本文二步法网格分布;
- (b) 内边界正交性的比较;
- (c) 外边界正交性的比较;
- (d) 全场等G线平均角度;

#### 3.2 系数 A, C 对网格疏密分布的影响

以同心双圆弧流道为物理区域进行了网格生成的数值计算,图6为 Laplace 方程计算结果,称为常规算法。图7为本文计算结果。从图中可清楚地看到非线性系数 A、C 对生成网格空间分布的影响:随着 A/C 比值的由大到小,对等 G 线调节力度不断加大,由于等 G 线为曲线,其不断向心密集,直至突破边界的限制进入区域的内部,对曲网格线有向心调节作用。当 C/A 比值不断增大时,其对网格的调节作用正好相反,即对等 N 线调节力度不断加大,因等 N 线为直线,它使等 N 线趋于等距分布。图8则更好地反映了系数 A、C 对网格分布的调节作用,图中的  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$  为等 N 线的相邻两网格点物理域上的间距。

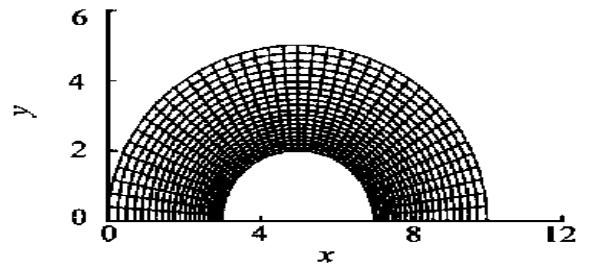
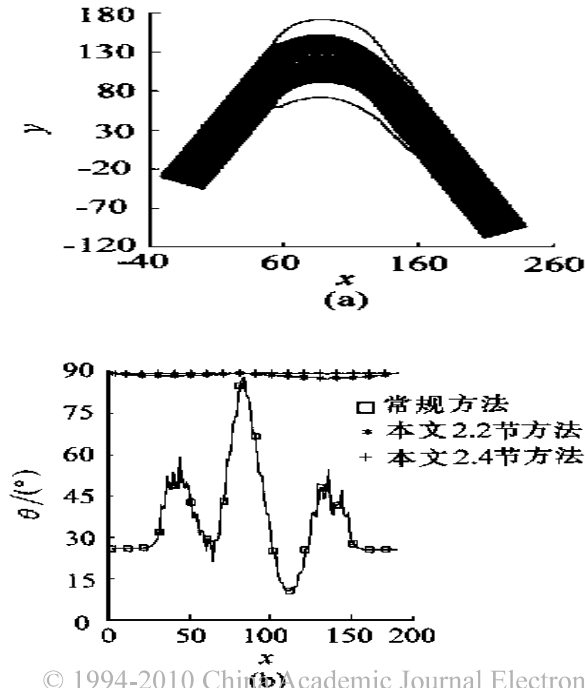


图6 常规算法



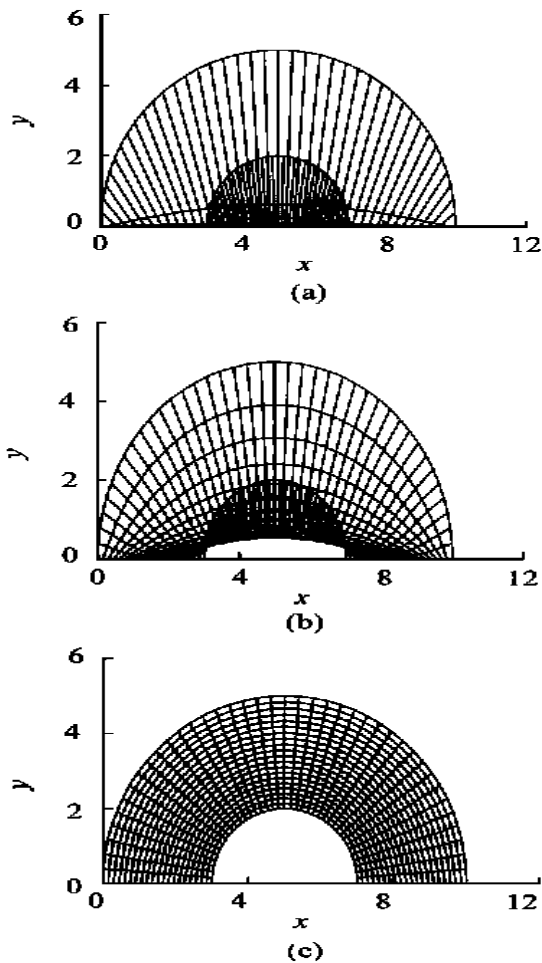


图 7 不同  $C/A$  值的网格分布

(a)  $C/A = 0.001$ ; (b)  $C/A = 0.1$ ; (c)  $C/A = 100$

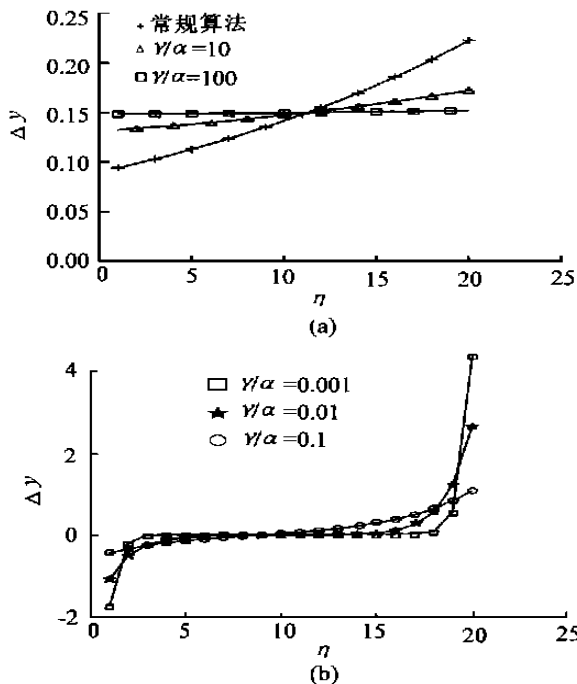


图 8 等  $G$  线上相邻网格点间距分布

### 4 结 论

(1) 方程系数  $B$  具有控制生成网格的正交性, 而系数  $A$  和  $C$  具有调节网格空间分布的作用, 其调节程度的强弱及作用与  $A/C$  的比值有关。

(2) 利用系数  $B$  的几何意义, 通过给定 Numman 边界条件可以实现控制网格正交性的目的。

(3) 根据对网格分布的要求, 使  $C/A$  的比值为—变量或函数, 可达到按要求调节网格分布的目的。

(4) 本文研究内容对于抛物型及双曲型控制方程的网格生成也具有参考意义。

### 参 考 文 献

- [1] Fasel H. Recent developments in the numerical solution of the Navier-Stokes equations and hydrodynamic stability problems[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [2] Thompson J F, Thames F C, Mastin C N. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two dimensional bodies[J]. J Compute Phys, 1974, 15: 229~231.
- [3] 程心一. 计算流体力学- 偏微分方程的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [4] 李春, 程新广, 王宏光. 贴体网格生成技术中正交性和空间疏密控制研究[J]. 上海理工大学学报, 1998, 20(3): 152~158.
- [5] Thompson J F. Numerical grid generation[M]. New York: North-holland, 1985.
- [6] 谭春青. 透平叶栅中叶片的弯曲对流场性能影响的实验研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1993.

作者简介:



李 春 1963 年生。1991 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 学历博士后。现任上海理工大学副教授, 主要从事计算流体力学, 叶轮机械气动热力学, 能源规划和动力机械 CAD/CAM 等方面的研究工作。

程新广 1977 年生, 上海理工大学动力工程学院研究生。