一类多输入非线性系统的同时 H^∞ 镇定

蔡秀珊[1] 高虹[1] 刘洋[1]

摘 要 研究了一类多输入非线性系统同时 H^∞ 镇定问题. 提出了可系统地构造公共二次控制储能函数 (Control storage function, CSF) 的方法. 基于公共二次控制储能函数, 设计了可同时 H^∞ 镇定闭环系统的连续控制律. 通过一个例子说明了本文所提出方法的有效性.

关键词 非线性系统, 干扰抑制, 同时 H^∞ 控制, 控制储能函数

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00473

Simultaneous H^∞ Stabilization for a Class of Multi-input Nonlinear Systems

CAI Xiu-Shan[1] GAO Hong[1] LIU Yang[1]

Abstract Simultaneous H^∞ stabilization problem for a class of multi-input nonlinear systems is dealt with in this paper. A systematic method for constructing common quadratic control storage functions (CSFs) is developed. Based on a common CSF, a continuous state feedback law is designed to simultaneously H^∞ stabilize all the closed-loop systems. An example is given to show the effectiveness of the method.

Key words Nonlinear systems, disturbance rejection, simultaneous H^∞ stabilization, control storage functions (CSFs)

同时镇定问题通常来源于实践. 由于参数的不确定性, 变化及系统的多模式, 一个实际系统可能会有多种模式, 在运行中常由一种模式向另一种模式切换. Blondel[1] 指出了两个以上的线性系统的同时镇定问题是困难. Petersen[2] 获得一类单输入线性系统同时镇定的非线性控制律设计. 对于非线性系统, 同时镇定一般是困难的, Ho-Mock-Qai 等[3] 建立了一些相关的结果. Wu[4] 给出一类单输入非线性系统同时镇定的控制律设计. 我们在文献 [5] 中设计了一个连续状态反馈控制律, 可使一类带有不确定参数的非线性系统同时镇定.

同时 H^∞ 镇定问题是在同时镇定问题的基础上考虑 H^∞ 性能表现, 例如干扰抑制. 因此同时 H^∞ 镇定问题一般来说比不考虑性能表现的同时镇定问题更难. 对于线性系统, Savkin[6] 给出可通过输出反馈同时 H^∞ 镇定的充要条件. Miller 等[7] 应用线性周期时变控制解决同时 H^∞ 镇定问题. Lee 等[8] 通过链散射框架研究了同时 H^∞ 镇定问题. 直到现在, 对于同时 H^∞ 镇定非线性系统少有成果发表. Wu[9] 基于控制储能函数 (Control storage function, CSF) 的方法, 对于一类单输入非线性系统设计了可同时 H^∞ 镇定闭环系统的控制律. CSF 的方法来源于控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF). CLF 的概念是由 Artstein[10] 在

收稿日期 2011-01-13 录用日期 2011-04-27
Manuscript received January 13, 2011; accepted April 27, 2011
国家自然科学基金 (61074011, 61074003, 60774011) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61074011, 61074003, 60774011)
本文责任编委 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang
1. 浙江师范大学数理与信息工程学院 金华 321004
1. College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004

1983 年引入的, 它将稳定性分析的方法转化为解决镇定的工具. Sontag[11] 利用 CLF 对仿射非线性系统提出了一个通用反馈控制律设计方法. CLF 已被广泛运用于各种设计问题中[4, 9, 12−15]. 在运用 CSF 和 CLF 的过程中, 一个困难是如何构造它们? 理清一类非线性系统相应的 CSF 并能系统地构造它们将是非常重要的.

本文针对一类具有串接结构的非线性系统, 给出一个二次函数为此类系统的一个公共 CSF 的充分和必要条件, 以及相应的公共 CSF 构造的方法. 基于公共的 CSF, 提出了可同时 H^∞ 镇定闭环系统的连续的控制律设计.

1 系统的描述

考虑如下一类多输入非线性系统:

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B[\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) + G_s(\boldsymbol{x})u + H_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}]\\&\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x}) + \eta_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\\&s = 1, 2, \cdots, q\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^\nu$, 和 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^r$ 分别是状态、输入、干扰输入、干扰输出. 记系统 (1) 的第 s 个可能的模式为系统 Q_s. 假定对每一个 $s \in \{1, 2, \cdots, q\}$, $\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{s1}(\boldsymbol{x}) & f_{s2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{sl}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 并且 $f_{si}(0) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, l$, $G_s(\boldsymbol{x}) = (g_{sij}(\boldsymbol{x}))_{l\times m}$ 具有行满秩, $H_s(\boldsymbol{x}) = (h_{sij}(\boldsymbol{x}))_{l\times\nu}$, $\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \xi_{s1}(\boldsymbol{x}) & \xi_{s2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \xi_{sr}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 并且 $\xi_{s\sigma}(0) = 0$, $\sigma = 1, 2, \cdots, r$, $\eta_s(\boldsymbol{x}) = (\eta_{s\sigma j}(\boldsymbol{x}))_{r\times\nu}$. 函数 $f_{si}(\boldsymbol{x})$, $g_{sij}(\boldsymbol{x})$, $h_{sij}(\boldsymbol{x})$, $\xi_{s\sigma}(\boldsymbol{x})$ 和 $\eta_{s\sigma j}(\boldsymbol{x})$, $s = 1, 2, \cdots, q$; $i = 1, 2, \cdots, l$; $j = 1, 2, \cdots, m$; $\sigma = 1, 2, \cdots, r$, 是连续. 假定 A 和 B 取下列 Brounovsky 规范型:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_l \end{bmatrix},\quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_l \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_i = \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}_{r_i\times 1} \tag{2}$$

其中, $r_1 + \cdots + r_l = n$.

本文的目标是构造系统 (1) 的公共 CSF, 并找到一个连续的状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}$ 使得它可同时内部镇定系统 (1) (即 $\dot{\boldsymbol{x}} = \{A\boldsymbol{x} + B[\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) + G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}], s = 1, 2, \cdots, q$ 都渐近稳定); 而且对给定 $\gamma > 0$, 闭环系统开始于初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$ 的输出对所有 $T > 0$ 和任意 $\boldsymbol{w}(\cdot) \in L_2[0, T]$, 满足

$$\int_0^T \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t \le \gamma^2\int_0^T \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

假定系统 (1) 满足下列假设:

假设 1. 给定 $\gamma > 0$, 对所有 $s \in \{1, 2, \cdots, q\}$ 及任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 满足 $\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}) < \gamma^2 I$, 和 $\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x})(\gamma^2 I - \eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x}$, 其中 Γ 是半正定矩阵.

下面的定义是由 Wu[9] 给出的.

定义 1. $V_s(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是一个光滑、径向无界和正定的函数. 如果对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n/\{\mathbf{0}\}$ 和 $\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^\nu$, 有

$$\begin{aligned}\inf_{\boldsymbol{u}}\Big\{&\frac{\partial V_s}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) + G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + H_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w})) + \\&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\Big\} < 0\end{aligned} \tag{4}$$

那么称 V_s 是系统 (1) 中的 Q_s 子系统的控制储能函数 (CSF).

$V_s(\boldsymbol{x})$ 是系统 (1) 中的 Q_s 子系统的 CSF 等价于对任意 $\boldsymbol{x} \ne \mathbf{0}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^\nu$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_s}{\partial \boldsymbol{x}}BG_s(\boldsymbol{x}) = 0\\ \Rightarrow &\frac{\partial V_s}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) + BH_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} < 0\end{aligned} \tag{5}$$

定义 2. 称一个子系统 Q_s 的 CSF$V_s(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足 L_2− 小增益控制性质, 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, 当 $\|\boldsymbol{x}\| < \delta_1$ 和 $\|\boldsymbol{w}\| < \delta_2$, 存在控制律 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\|\boldsymbol{u}\| < \varepsilon$ 且使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_s}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) + G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + H_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w})) + \\&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} < 0\end{aligned} \tag{6}$$

2 主要结果

首先构造系统 (1) 的公共 CSF, 然后设计一个连续状态反馈控制律使得闭环系统是内部稳定且满足 L_2− 增益的要求 (3).

考虑系统 (1). 将 A_i 和 B_i 表成如下分块矩阵的形式:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & \boldsymbol{A}_{i2}\\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

且

$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{i2} = \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

假定 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{i,r_i-1}$ 是多项式

$$\lambda_i(\beta) = \lambda^{r_i-1} + \beta_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-2} + \cdots + \beta_{i2}\lambda + \beta_{i1} \tag{7}$$

的系数.

记 $P_i = \begin{bmatrix} P_{ir_i-1} & \boldsymbol{P}_{i2}\\ \boldsymbol{P}_{i2}^T & p_{i3} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \cdots, l$, 其中 $P_{ir_i-1} \in \mathbf{R}^{(r_i-1)\times(r_i-1)}$, $\boldsymbol{P}_{i2} \in \mathbf{R}^{r_i-1}$, 和 $p_{i3} \in \mathbf{R}$. 若 $p_{i3} \ne 0$, 令 $p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdots & \beta_{i,r_i-1} \end{bmatrix}$.

定义

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1-1} & -\boldsymbol{P}_{12}p_{13}^{-1} \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} I_{r_l-1} & -\boldsymbol{P}_{l2}p_{l3}^{-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$
$$\Gamma_1 = \Lambda\Gamma\Lambda^{\mathrm{T}}$$

因为 Γ 是半正定, 因此 Γ_1 也是半正定. 假定 $\lambda_{\max}(\Gamma_1)$ 是 Γ_1 的最大特征值. 那么

$$A_{i-1}-\boldsymbol{A}_{i2}p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}}=C_{i\beta}=$$

$$\left[\begin{array}{cccc}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\beta_{i1} & -\beta_{i2} & \cdots & -\beta_{i,r_i-1}\end{array}\right]$$

对每一个 $i=1,2,\cdots,l$, 假设 P_i 满足下列条件:

$\mathrm{H}_1: p_{i3}>0$ 和 $\lambda_i(\beta)$ 是一个 Hurwitz 多项式;

$\mathrm{H}_2: (P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})C_{i\beta}+C_{i\beta}^{\mathrm{T}}(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\times \boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})+\lambda_{\max}(\Gamma_1)\mathrm{I}_{\mathrm{r_i}-1}$ 为负定.

记

$$P=\left[\begin{array}{cccc}P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_l\end{array}\right],\quad V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{8}$$

定理 1. 考虑系统 (1). 若假设 1 成立, 且 P 满足条件 H_1 和 H_2, 那么 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 是系统 (1) 的一个公共 CSF.

证明. 若对任意 $i=1,2,\cdots,l$, P_i 满足条件 H_1 和 H_2, 那么容易推断 P_i 是正定的, 因此 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 也是正定.

定义系统 (1) 中的子系统 Q_s 的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{w})=&\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}+B[\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})+G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+\\ &H_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}])+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\end{aligned} \tag{9}$$

通过计算, 我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=\\ &\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+2x^{\mathrm{T}}PB[\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})+G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}]+\\ &\quad\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))\times\\ &\quad(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}-\\ &\quad(\boldsymbol{w}-(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\times\\ &\quad(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\times\\ &\quad(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(x)\eta_s(x))(w-(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\times\\ &\quad(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{10}$$

令

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_s(\boldsymbol{x})=&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})+\\ &\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))(\gamma^2I-\\ &\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\times(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\times\\ &\widetilde{\beta}_s(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

因为对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 及 $s\in\{1,2,\cdots,q\}$, $G_s(\boldsymbol{x})$ 为行满秩, 所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\mathbf{0} \tag{11}$$

当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_s(\boldsymbol{x})=&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+\\ &(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

利用分块矩阵表示 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, 即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cccc}\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\end{array}\right],\ \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cc}X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}} & x_{i,r_i}\end{array}\right]\\ &\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cccc}x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{i,r_i-1}\end{array}\right],\quad i=1,2,\cdots,l\end{aligned}$$

那么有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\left[\begin{array}{cccc}\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}P_1B_1 & \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}P_2B_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}P_lB_l\end{array}\right] \tag{13}$$

与

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iB_i=&\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}} & x_{i,r_i}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}P_{ir_i-1} & \boldsymbol{P}_{i2}\\ \boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}} & p_{i3}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right]=\\ &\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i2}+p_{i3}x_{i,r_i},\quad i=1,2,\cdots,l\end{aligned} \tag{14}$$

由式 (13) 和式 (14), 当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 则至少存在一个 $\boldsymbol{x}_i\neq 0$, 且

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iB_i=\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i2}+p_{i3}x_{i,r_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,l \tag{15}$$

当 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iB_i=0$, 可得

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iA_i\boldsymbol{x}_i=&\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}[(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})C_{i\beta}+\\ &C_{i\beta}^{\mathrm{T}}(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})]\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}\end{aligned} \tag{16}$$

由假设 1, 且考虑到式 (12) 和式 (16), 当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\mathbf{0}$, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\alpha}_s(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x}=\\ &\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}[(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})C_{i\beta}+\\ &C_{i\beta}^{\mathrm{T}}(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})]\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}+\\ &\left[\begin{array}{cccc}\boldsymbol{X}_{1,r_1-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}_{2,r_2-1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{X}_{l,r_l-1}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]\Gamma_1\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{X}_{1,r_1-1}\\ \boldsymbol{X}_{2,r_2-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_{l,r_l-1}\end{array}\right]\le\\ &\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}[(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})C_{i\beta}+\\ &C_{i\beta}^{\mathrm{T}}(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})+\lambda_{\max}(\Gamma_1)I_{r_i-1}]\boldsymbol{X}_{i,r_i-1}\end{aligned} \tag{17}$$

由条件 H_2, 且由式 (10) 和式 (17), 可推断当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时, 有 $\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x})\le\widetilde{\alpha}_s(\boldsymbol{x})<0$. 因此 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 是系统 (1) 的公共的 CSF. □

下面给出一个二次函数为系统 (1) 公共 CSF 的必要条件.

推论 1. 考虑系统 (1). 若假设 1 成立, 那么形如式 (8) 定义的 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 是系统 (1) 的一个公共 CSF 的必要条件为 P 满足条件 H_1 和下列条件:

H_3: 对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,l\}$, $(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\times\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})C_{i\beta}+C_{i\beta}^{\mathrm{T}}(P_{ir_i-1}-p_{i3}^{-1}\boldsymbol{P}_{i2}\boldsymbol{P}_{i2}^{\mathrm{T}})$ 为负定.

证明. 类似于定理 1 的证明, 可证得结论成立. □

假定对所有 $s\in\{1,2,\cdots,q\}$, 矩阵 $G_s(\boldsymbol{x})$ 可表示为

$$G_s(\boldsymbol{x})=G(\boldsymbol{x})D_s(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

其中, $G(\boldsymbol{x})$ 为 $l\times m$ 的行满秩矩阵, $D_s(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\{d_{s1}(\boldsymbol{x}), d_{s2}(\boldsymbol{x}),\cdots,d_{sm}(\boldsymbol{x})\}$. 进一步地假定 $G(\boldsymbol{x})$ 和 $d_{sj}(\boldsymbol{x})$ 的元素是连续的, 且对所有 $s\in\{1,2,\cdots,q\}$, $j\in\{1,2,\cdots,m\}$, $x\in\mathbf{R}^n$,

$$d_{sj}(\boldsymbol{x})\neq 0 \tag{19}$$

而且, 我们假定对每一个 j, $j\in\{1,2,\cdots,m\}$, q 个函数 $d_{sj}(\boldsymbol{x})$, $s=1,2,\cdots,q$ 有同样的符号. 令

$$\Omega(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\{\nu_1(\boldsymbol{x}),\nu_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\nu_m(\boldsymbol{x})\} \tag{20}$$

其中

$$\nu_j(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\min\limits_s d_{sj}(\boldsymbol{x}), & 若\ d_{sj}(\boldsymbol{x})>0\\ \max\limits_s d_{sj}(\boldsymbol{x}), & 若\ d_{sj}(\boldsymbol{x})<0\end{cases} \tag{21}$$

式 (21) 蕴含对 $j=1,2,\cdots,m$ 和 $s=1,2,\cdots,q$, 有 $\nu_j(\boldsymbol{x})d_{sj}(\boldsymbol{x})-\nu_j^2(\boldsymbol{x})\geq 0$, 这等价于如下对角矩阵:

$$D_s(\boldsymbol{x})\Omega(\boldsymbol{x})-\Omega^2(\boldsymbol{x}),\ \ s=1,2,\cdots,q \tag{22}$$

为半正定.

定理 2. 考虑系统 (1). 如果假设 1 成立且矩阵 $G_s(x)$ 满足式 (18) 和式 (19), 那么存在一个连续控制律使得闭环系统是内部稳定且满足 L_2- 增益的要求 (3).

证明. 由定理 1, 由式 (8) 所定义的 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 是系统 (1) 的一个公共的 CSF. 记

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})=\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+\\&\max_s[2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\\&\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\times\\&(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBH_s(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}]\\\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})=\ &2\Omega(\boldsymbol{x})G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{23}$$

其中, $\Omega(\boldsymbol{x})$ 由式 (20) 给定, $G(\boldsymbol{x})$ 为行满秩.

反馈控制律取为

$$\boldsymbol{u}=\begin{cases}-\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})\dfrac{\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+\sqrt{(\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}))^2+(\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x}))^2}}{\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\neq\boldsymbol{0}\\ 0, & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{24}$$

记 $N(\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n|0<\|\boldsymbol{x}\|\leq\delta\}$, 容易推断

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\boldsymbol{x}\in N(\delta)}\frac{\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})}{\left|\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})\right|}\leq 0 \tag{25}$$

由文献 [9] 的结果可知, 式 (25) 蕴含 $V(\boldsymbol{x})$ 满足 L_2- 增益小控制性, 因此反馈控制律 $\boldsymbol{u}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续.

由式 (10), 有

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\leq\ &\widetilde{\alpha_s}(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\leq\\&\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{26}$$

下面分两种情形证明当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 则 $\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}<0$ 成立.

情形 1. $\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})=0$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$

由于 $G(\boldsymbol{x})$ 为行满秩, 并考虑到式 (20), 则 $\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})=0$ 等价于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\boldsymbol{0}$. 由式 (17), 式 (23), 式 (26) 和假设 1 成立, 当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\leq\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})=\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+\max_s[\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+\\&\quad(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}]\leq\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x}<0\end{aligned} \tag{27}$$

情形 2. $\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$

由式 (22), 可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})-\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})=\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG(\boldsymbol{x})[D_s(\boldsymbol{x})\Omega(\boldsymbol{x})-\Omega^2(\boldsymbol{x})]G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\geq 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})-\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})]\times\\&\quad\frac{-\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})-\sqrt{(\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}))^2+(\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})^2}}{\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})}\leq 0\end{aligned} \tag{28}$$

由式 (24), 式 (26) 和式 (28), 则当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\leq\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\leq\\&\quad\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})\frac{-\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})-\sqrt{(\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}))^2+(\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x}))^2}}{\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})}\leq\\&\quad-\sqrt{(\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}))^2+(\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x}))^2}<0\end{aligned} \tag{29}$$

因此式 (1) 和式 (24) 所组成的闭环系统满足 L_2- 增益的要求 (3).

下面证明内部稳定性, 令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 且控制律 $\boldsymbol{u}$ 由式 (24) 给出, 并注意到式 (26), 式 (27), 式 (29), 对任意 $x\neq 0$, $s\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ q\}$, 可得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi}_s(x,u,0)\leq\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)x+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB[\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})+G_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}]+\\&\quad\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_s(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))(\gamma^2I-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\times\\&\quad(\boldsymbol{\xi}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\leq\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBG_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}<0\end{aligned}$$

因此, 由式 (1) 和式 (24) 所组成的闭环系统是内部稳定的. □

3 例子

例 1. 考虑如下的非线性系统:

$$Q_s:\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=f_{s1}(\boldsymbol{x})+g_{s11}(\boldsymbol{x})u_1+g_{s12}(\boldsymbol{x})u_2+h_{s1}(\boldsymbol{x})w\\\dot{x}_3=x_4\\\dot{x}_4=f_{s2}(\boldsymbol{x})+g_{s21}(\boldsymbol{x})u_1+g_{s22}(\boldsymbol{x})u_2+h_{s2}(\boldsymbol{x})w\\\boldsymbol{y}=\xi_s(\boldsymbol{x})+\eta_s(\boldsymbol{x})w, s=1,2,3\end{cases} \tag{30}$$

其中, $\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^{\mathrm{T}}$, 且

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(\boldsymbol{x}) = x_1^2, && f_{12}(\boldsymbol{x}) = x_3\\
&f_{21}(\boldsymbol{x}) = x_1, && f_{22}(\boldsymbol{x}) = x_3\mathrm{e}^{x_4}\\
&f_{31}(\boldsymbol{x}) = x_1\cos x_2, && f_{32}(\boldsymbol{x}) = x_3^2\\
&g_{111}(\boldsymbol{x}) = x_1\mathrm{e}^{x_2}, && g_{112}(\boldsymbol{x}) = x_4^2+1\\
&g_{121}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x_3+x_2}, && g_{122}(\boldsymbol{x}) = -x_1(x_4^2+1)\\
&g_{211}(\boldsymbol{x}) = x_1(x_3^2+1), && g_{212}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x_2}\\
&g_{221}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x_3}(x_3^2+1), && g_{222}(\boldsymbol{x}) = -x_1\mathrm{e}^{x_2}\\
&g_{311}(\boldsymbol{x}) = x_1(x_2^2+2), && g_{312}(\boldsymbol{x}) = \sin^2 x_3+2\\
&g_{321}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x_3}(x_2^2+2), && g_{322}(\boldsymbol{x}) = -x_1(\sin^2 x_3+2)\\
&h_{11}(\boldsymbol{x}) = 1-\cos x_2+x_3, && h_{12}(\boldsymbol{x}) = x_2x_3\sin x_1+x_4\\
&h_{21}(\boldsymbol{x}) = x_1-x_3+x_4, && h_{22}(\boldsymbol{x}) = 2-\cos x_1\\
&h_{31}(\boldsymbol{x}) = x_1\cos x_2, && h_{32}(\boldsymbol{x}) = x_3x_1\\
&\xi_1(\boldsymbol{x}) = x_1+x_2+x_3+x_4, && \xi_2(\boldsymbol{x}) = x_1+x_2\sin x_3+x_4\\
&\xi_3(\boldsymbol{x}) = x_1-x_2+x_3, && \eta_1(\boldsymbol{x}) = 1\\
&\eta_2(\boldsymbol{x}) = 1+\sin(x_1+x_3), && \eta_3(\boldsymbol{x}) = 1-\cos(x_2+x_4)
\end{aligned}
$$

令 $\gamma=3$, 可推断

$$
\begin{aligned}
&\xi_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\xi_s(\boldsymbol{x})+\xi_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x})(\gamma^2 I-\\
&\quad \eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\xi_s(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

其中, $\Gamma=\mathrm{diag}\{6,6,6,6\}$, $\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x})<9$, $s=1,2,3$.

取 $p_{13}=1$, $p_{23}=0.5$, $\lambda_1(\beta)=\lambda+1$, $\lambda_2(\beta)=\lambda+2$. 那么 $P_{12}=1$, $P_{22}=1$ 和 $\Gamma_1=\begin{bmatrix}12 & \\ & 30\end{bmatrix}$. 选择 $\varphi_1=-2$, $\varphi_2=-6$, 那么 $P_{11}=17$, $P_{21}=8$. 因此 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}17 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 是系统 (30) 的一个公共的 CSF.

可推断 $G(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1 & -1\\ \mathrm{e}^{x_3} & x_1\end{bmatrix}$, $\Omega(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\varpi 1 & 0\\ 0 & \varpi 2\end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\varpi 1 =&\ \min\{\mathrm{e}^{x_2}, x_3^2+1, x_2^2+2\}\\
\varpi 2 =&\ \max\{-\mathrm{e}^{x_2}, -x_4^2-1, -\sin^2 x_3-2\}\\
\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}) =&\ 34x_1x_2+2x_2^2+16x_3x_4+2x_4^2+\\
&\max_s[2(x_1+x_4)f_{s1}(x)+2(x_3+0.5x_4)f_{s2}(x)+\\
&\xi_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\xi_s(\boldsymbol{x})+((x_1+x_4)h_{s1}(\boldsymbol{x})+\\
&(x_3+0.5x_4)h_{s2}(\boldsymbol{x})+\xi_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))\times\\
&(9-\eta_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{-1}((x_1+x_4)h_{s1}(\boldsymbol{x})+\\
&(x_3+0.5x_4)h_{s2}(\boldsymbol{x})+\xi_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\eta_s(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}]
\end{aligned}
$$

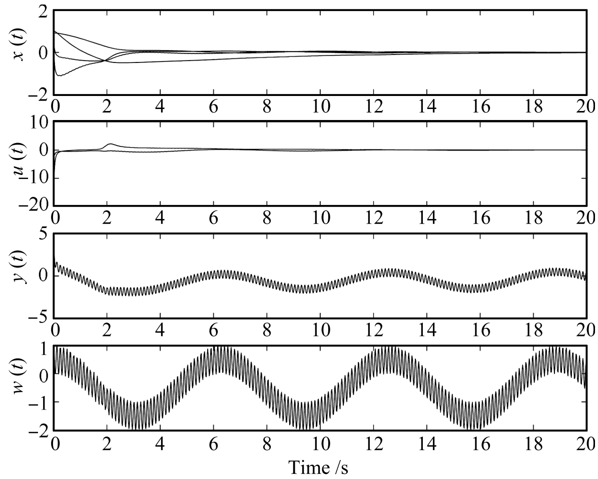
$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x}) = 2\Omega(\boldsymbol{x})G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix} x_1+x_2, & x_3+0.5x_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB = [x_1+x_2,\ x_3+0.5x_4]
\end{aligned}
$$

由定理 2, 反馈控制律

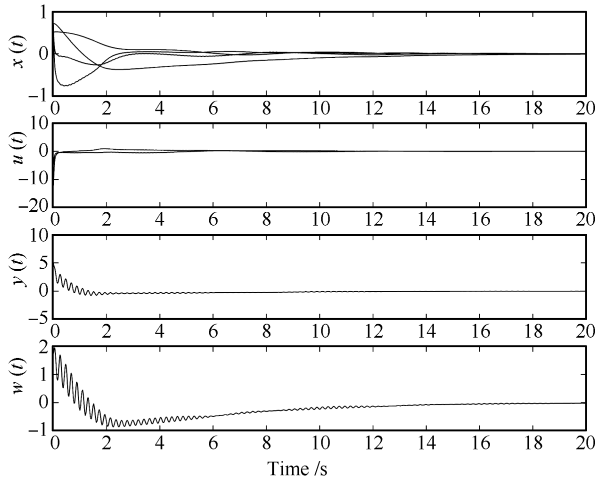
$$
\boldsymbol{u}=\begin{cases}-\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})\dfrac{\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x})+\sqrt{(\widetilde{\alpha}(\boldsymbol{x}))^2+(\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x}))^2}}{\widetilde{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\beta}(\boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\neq \boldsymbol{0}\\ 0, & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{31}
$$

这里 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB=[x_1+x_2,\ x_3+0.5x_4]$, 可使得闭环系统 (30) 和 (31) 内部稳定并且满足 L_2– 增益的要求 (3).

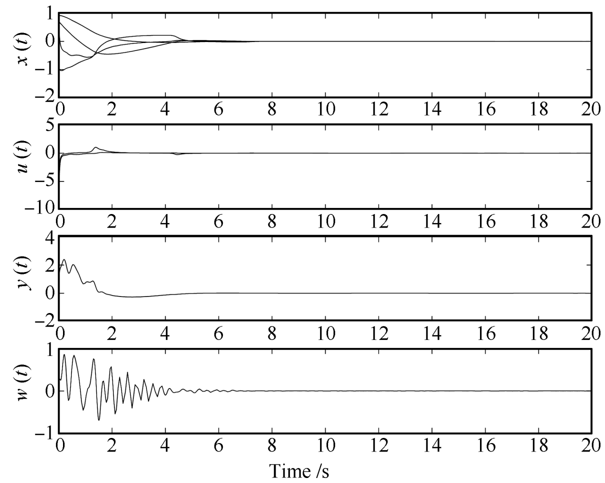
图 1 分别显示闭环系统 (30) 和 (31) 的三个子系统状态轨线、控制律、输出和干扰输入.



(a) 子系统 Q_1 (初始状态为 $[0.9,0.7,1,0.9]^{\mathrm{T}}$, 且 $w(t)=\cos t-\sin^2(25t)$)
(a) Subsystem Q_1 (The initial state is $[0.9,0.7,1,0.9]^{\mathrm{T}}$ and $w(t)=\cos t-\sin^2(25t)$.)



(b) 子系统 Q_2 (初始状态为 $[0.5,0.6,0.7,0.8]^{\mathrm{T}}$, 且 $w(t)=x_1\sin(30t)+x_2^2+2x_3$)
(b) Subsystem Q_2 (The initial state is $[0.5,0.6,0.7,0.8]^{\mathrm{T}}$ and $w(t)=x_1\sin(30t)+x_2^2+2x_3$.)



(c) 子系统 Q_3 (初始状态为 $[0.9, 0.8, 0.7, -0.8]^{\rm T}$, 且 $w(t) = x_1^2{\rm e}^{-t} - x_2\cos(10t) - x_3\sin(20t)$)

(c) Subsystem Q_3 (The initial state is $[0.9, 0.8, 0.7, -0.8]^{\rm T}$ and $w(t) = x_1^2{\rm e}^{-t} - x_2\cos(10t) - x_3{\rm sin}(20t)$.)

图 1 各子系统 Q_3 的状态轨线、控制律、输出和干扰输入

Fig. 1 State trajectory, control law, output and disturbance input of each subsystem

4 结论

本文对一类具有串接结构的多输入非线性系统, 提出了构造公共二次储能函数的新方法. 给出了一个二次函数为此系统公共 CSF 的充分和必要条件, 基于公共二次储能函数, 设计了可同时 H^∞ 镇定闭环系统的连续的状态反馈控制律. 通过一个例子说明了本文所提出方法的有效性.

References

1 Blondel V. *Simultaneous Stabilization of Linear Systems*. New York: Springer, 1994

2 Petersen I. A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control. *Automatica*, 1987, **23**(1): 33−40

3 Ho-Mock-Qai B, DayawansaW. Simultaneous stabilization of linear and nonlinear systems by means of nonlinear state feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, **37**(6): 1701−1725

4 Wu J. Simultaneous stabilization for a collection of single-input nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 328−337

5 Cai Xiu-Shan, Han Zheng-Zhi, Zhang Wei. Simultaneous stabilization for a collection of multi-input nonlinear systems with uncertain parameter. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(2): 206−209

6 Savkin A V. Simultaneous H^∞ control of a finite collection of linear plants with a single nonlinear digital controller. *Systems and Control Letters*, 1998, **33**(5): 281−289

7 Miller D E, Chen T. Simultaneous stabilization with near optimal H^∞ performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(12): 1986−1998

8 Lee P H, Soh Y C. Simultaneous H^∞ stabilization. *International Journal of Control*, 2004, **77**(2): 111−117

9 Wu J. Simultaneous H^∞ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(3): 606−610

10 Artstein Z. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis*, 1983, **7**(11): 1163−1173

11 Sontag E. A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters*, 1989, **13**(2): 117−123

12 Cai X S, Han Z Z, Wang X. An analysis and design method for systems with structural uncertainty. *International Journal of Control*, 2006, **79**(12): 1647−1653

13 Cai X S, Liu L P, Zhang W. Saturated control design for linear differential inclusions subject to disturbance. *Nonlinear Dynamics*, 2009, **58**(3): 487−496

14 Cai Xiu-Shan. Robust stabilization for nonlinear differential inclusion systems subject to disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1327−1331

15 Cai X S, Han Z Z, Huang J. Stabilization for a class of non-linear systems with uncertain parameter based on center manifold. *IET Control and Applications*, 2010, **4**(9): 1558−1568

蔡秀珊 浙江师范大学数理与信息工程学院教授. 主要研究方向为非线性控制理论与运用. 本文通信作者. E-mail: xiushan@zjnu.cn

(**CAI Xiu-Shan** Professor at the College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University. Her research interest covers nonlinear control and its applications. Corresponding author of this paper.)

高 虹 浙江师范大学数理与信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性控制理论与运用. E-mail: 729642890@qq.com

(**GAO Hong** Master student at the College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University. Her research interest covers nonlinear control and its applications.)

刘 洋 浙江师范大学数理与信息工程学院副教授. 主要研究方向为非线性控制理论与运用. E-mail: liuyang@zjnu.cn

(**LIU Yang** Associate professor at the College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University. His research interest covers nonlinear control and its applications.)