第 22 卷 第 2 期 航 空 学 报 Vol. 22 No. 2
2001 年 3 月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Mar. 2001

文章编号: 1000-6893(2001) 02-0144-04

飞机滚转时惯性耦合运动的分岔分析

许多生, 陆启韶
(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

BIFURCATION ANALYSIS OF INERTIA CROSS COUPLING IN AIRCRAFT ROLLING

XU Duo-sheng, LU Qi-shao
(Dept. of Mathematics and Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

摘 要: 飞机非线性运动稳定性是非线性飞行动力学的重要组成部分, 分岔分析则是非线性动力学系统运动稳定性分析的主要内容。应用中心流形的降维技巧和分岔分析方法, 给出了一种快速有效的稳定性研究方法, 并对飞机滚转时的惯性耦合运动进行了分岔分析和稳定性分析。本方法简便易行, 可以大大减少计算工作量, 其计算结果也是令人满意的。

关键词: 飞机; 稳定性; 分岔; 滚转耦合
中图分类号: V212 文献标识码: A

Abstract: Nonlinear stability of the motion of aircraft is an important part of nonlinear flight dynamics and bifurcation analysis is one of the important contents of the stability analysis of motion of nonlinear dynamic systems. By using the simplifying technique for dimension reduction of center manifold and bifurcation analysis, this paper gives a comparatively fast and effective method for stability study and it also deals with the analysis of bifurcation and stability of inertia cross coupling in aircraft rolling motion. The method presented by the paper not only is of simplicity and feasibility, but also decreases considerably the amount of computation, and the results of computation are satisfactory.

Key words: aircraft; stability; bifurcation; cross coupling

为了得到现代高机动性飞机优良的机动性能, 通常要求飞机能在其 3 个转动角速度都较大的情况下飞行。此时, 飞机动力学方程中的角速度耦合项将不能被忽略, 从而成为非线性方程, 同时也产生了与此有关的非线性运动稳定性问题。随着非线性科学中的分岔理论迅速发展, 它在很多工程问题中得到了广泛应用, 飞机非线性动力学也不例外, 80 年代初, Mehra 等[1~4] 首先用分岔突变理论成功地解释了这些现象。为此, 他创造了 BACTM 方法(Bifurcation Analysis and Catastrophe Theory Methodology, 即分岔分析与突变理论法), 成为用来分析研究飞机非线性动力学较为有效的方法。自此, 国际上有许多学者用 BACTM 方法研究不同的非线性飞行动力学问题, 如 Ross[5] 用 BACTM 方法和平均法研究飞机研制过程中的非线性动态特性, 南非学者 M. H. Lowenbery[6] 用 BACTM 方法研究飞机的局部稳定性问题, 法国学者 P. Guicheteau[7] 用分岔突变理论设计飞机的控制系统, 保证飞机免于失事。从 80 年代末起, 我国飞行力学工作者[8~14] 也用 BACTM 方法研究飞机非线性飞行动力学中的稳定性问题并取得了成果。

BACTM 方法将飞机的运动学方程和动力学方程联立得到一个高维动力学系统, 经过适当的简化, 用数值方法进行稳定性分析, 再用时间历程法进行验证。本文将分岔理论中的降维技巧引入飞机非线性飞行动力学中, 将飞机动力学在滚转耦合情况下复杂的高维动力学系统约化为一个维数较低的低维动力学系统, 然后通过数值方法进行临界情况下的分岔分析和稳定性分析, 从而大大减小计算工作量, 为有效控制飞机的飞行提供依据。

1 基本原理[15, 16]

设飞机飞行动力学运动微分方程组可用如下一般形式的非线性动力系统来描述, 即

$$\mathring{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu) \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是状态变量(向量), 例如对应于飞机运动微分方程组中的角运动量和速度等(即 $p, q, r, \alpha, \beta, \theta, \Phi, v$ 等); $\mu = (\mu_1$

收稿日期: 1999-11-25; 修订日期: 2000-02-02
基金项目: 国家自然科学基金(19602003)、航空科学基金(981351125)和北京航空航天大学理学院基金资助项目
文章网址: http://www.hkxb.net.cn/hkxb/2001/02/0144/

$\mu_2 \quad \cdots \quad \mu_m)^{\mathrm{T}} \in R^m$ 是控制变量(向量), 例如对应于飞机的 3 个舵面偏转角, 即升降舵偏角 δ_e、副翼偏角 δ_a 和方向舵偏角 δ_r; $\boldsymbol{f} = (f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n)^{\mathrm{T}}$: $R^n \times R^m \to R^n$, 对应于 $p, q, r, \alpha, \beta, \theta, \phi, v$ 等对时间 t 的变化率函数。

根据分岔理论, 首先进行奇异性分析。奇点由如下方程得到

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu) = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\det \boldsymbol{D}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu) = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

其中: $\boldsymbol{D}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$ 是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵, 即 $\boldsymbol{D}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu) = (\partial f_i / \partial x_j)_{i, j = 1, \cdots, n}$。这是一个关于 $\boldsymbol{x}, \mu$ 的非线性代数方程组的求解问题, 例如可用 Newton-Raphson 方法求解。求出奇异点之后就可对系统进行降维约化。

为了讨论问题的方便起见, 假设由式(2)、式(3)求得的奇异点为$(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \in R^n \times R^m$。否则可取变换$(\bar{x}, \bar{\mu}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \mu - \mu_0)$ 将奇异点平移到$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$处。并设在$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$处的 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{D}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ 具有 l 个负实部和 k 个零实部的特征值(这里假设 $\boldsymbol{D}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ 无实部大于零的特征值, 否则系统式(1)在$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$处已经是不稳定的, 这是实际问题不关心的), 它们对应的特征子空间分析为 E^{s} 和 E^{c}, 其维数分别为 l 和 k。将 $\boldsymbol{x}$ 在 E^{s} 和 E^{c} 中分解成 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{u} \in R^k$, $\boldsymbol{v} \in R^l$。式(1)在$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$处作 Taylor 展开, 并经非奇异线性变换可写成

$$\left.\begin{aligned} \mathring{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mu) \\ \mathring{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mu) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mu) \in R^k \times R^l \times R^m$; $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 k 阶和 l 阶常数矩阵, 并分别具有零实部和负实部的特征值; $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mu)$, $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mu)$ 是非线性部分, 且有 $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$。

设中心流形 W^{c} 在原点附近可表示为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$, 其中函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 待定。将 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 代入式(4)的第 1 式得

$$\mathring{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu), \mu) \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)的第 2 式, 得到函数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 要满足的微分方程

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_u \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu), \mu)] - \\ &\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu) - \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu), \mu) = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{6}$$

并要求 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{D}_u \boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$。这是一个关于 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 的非线性常微分方程, 精确求解同样很困难。为此可用某些近似方法, 例如先将 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 在$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$处展开成 Taylor 幂级数, 再用待定系数法, 求出其前几项。将 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \mu)$ 代入方程式(5), 根据中心流形定理, 原系统式(1)的动力学行为本质上可用方程式(5)描述, 从而达到约化降维的目的。

2　飞机滚转时惯性耦合飞行动力学方程

飞机飞行动力学方程由文献[1]给出

$$\begin{cases} \mathring{p} = l_p p + l_q q + l_r r + l_\beta \beta + l_{\delta_a} \delta_a + l_{\delta_r} \delta_r + \\ \qquad l_{\alpha\delta_a} \alpha \delta_a + l_{\beta\alpha} \beta \alpha - i_1 q r + l_{r\alpha} r \alpha \\ \mathring{q} = \bar{m}_q q + \bar{m}_\alpha \alpha + m_{\delta_e} \delta_e + i_2 p r - m_{\mathring{\alpha}} p \beta \\ \mathring{r} = n_\beta \beta + n_{\alpha\delta_a} \delta_a \alpha + n_r r + n_p p + n_{p\alpha} p \alpha - \\ \qquad i_3 p q + n_{\delta_a} \delta_a + n_{\delta_r} \delta_r \\ \mathring{\alpha} = q - p \beta + z_\alpha \alpha + z_{\delta_e} \\ \dot{\beta} = y_\beta \beta + p(\sin\alpha_0 + \alpha) - r\cos\alpha_0 + \\ \qquad y_{\delta_a} \delta_a + y_{\delta_r} \delta_r \end{cases} \tag{7}$$

式中: $i_1 = (I_z - I_y)/I_x$; $i_2 = (I_z - I_x)/I_y$; $i_3 = (I_y - I_x)/I_z$。飞机的状态变量 $\boldsymbol{x} = (p, q, r, \alpha, \beta)$, 其中 p, q, r 为飞机绕体轴系转动的 3 个转动角速度分量, α, β 分别为飞机的俯仰角和偏航角; $l_p, \cdots$, $m_\alpha, \cdots, n_r, \cdots, z_\alpha \cdots$ 为相应的气动力系数导数; I_1, I_2, I_3 分别为飞机绕体轴系转动的 3 个转动惯量, 其他符号的具体含意参见文献[1]。

3　分岔分析

为了清楚地说明如何利用中心流形约化技巧对飞行动力学方程进行降维和稳定性分析, 根据文献[1]提供的数据对某飞机在亚音速飞行时进行分岔特性分析。令方程式(7)的右端为零, 通过非线性代数方程组求解, 得到系统式(7)的非双曲平衡点为 $\boldsymbol{x} = (p, q, r, \alpha, \beta) = (-1.3040, -0.2450, -0.9013, -0.1403, 0.1009)$, 舵面偏转角的分岔值为$(\delta_{a0}, \delta_{e0}, \delta_{r0}) = (14°, 9.2°, 0°)$, 相应的 Jacobi 矩阵的特征值为$(-9.1821, -0.8527 + 5.0814\mathrm{i}, -0.8527 - 5.0814\mathrm{i}, -4.5366, 0.0)$。

作变换 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, 并且令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}$, 其中

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -0.9913 & 0.9780 & -0.7748 & 0.4328 & -0.3206 \\ -0.1163 & -0.1118 & -0.0233 & 0.7802 & 0.0 \\ 0.0221 & 0.1528 & -0.6286 & -0.2039 & -0.1730 \\ -0.0071 & -0.0179 & 0.0631 & -0.0096 & -0.1509 \\ 0.057 & 0.0856 & 0.0063 & 0.0223 & -0.0792 \end{pmatrix}$$

本问题中有 3 个参数 δ_a, δ_e, δ_r, 采用冻结其中的 2 个参数(例如 δ_e 和 δ_r)的方法, 分别研究在平衡点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 处的分岔特性。首先假设 $\delta_e = \delta_{e0}$, $\delta_r = \delta_{r0}$, 令 δ_a 为分岔参数, 并设中心流形由下式给出(为方便起见, 仍记 $\boldsymbol{y} = (p, q, r, \alpha, \beta)$, 其中 r 对应

于中心子空间的变量)

$$\begin{cases} p = h_1(r, \delta_a) = a_1 r^2 + a_2 r \delta_a + a_3 \delta_a^2 + \cdots \\ q = h_2(r, \delta_a) = b_1 r^2 + b_2 r \delta_a + b_3 \delta_a^2 + \cdots \\ \alpha = h_3(r, \delta_a) = c_1 r^2 + c_2 r \delta_a + c_3 \delta_a^2 + \cdots \\ \beta = h_4(r, \delta_a) = d_1 r^2 + d_2 r \delta_a + d_3 \delta_a^2 + \cdots \end{cases} \tag{8}$$

其中: $a_1, a_2, \cdots, d_3$ 是待定常数。将式(8)代入式(6)可得

$$p = 0.005 r^2 - 0.2768 r \delta_a - 0.1005 \delta_a^2 + \cdots$$
$$q = 0.1814 r^2 - 0.6536 r \delta_a + 0.4805 \delta_a^2 + \cdots$$
$$\alpha = -0.0117 r^2 - 0.1212 r \delta_a - 0.0005 \delta_a^2 + \cdots$$
$$\beta = 0.094 r^2 - 0.0196 r \delta_a - 0.0795 \delta_a^2 + \cdots$$

再将如上所求结果代入式(5),得 r 关于参数 δ_a 的方程为

$$\mathring{r} = r(0.2555 \delta_a - 0.4140 r) - 3.3342 \delta_a + \cdots \tag{9}$$

显然其分岔图为极限点型分岔(见图 1)。图中实线表示稳定平衡点,虚线表示不稳定平衡点。

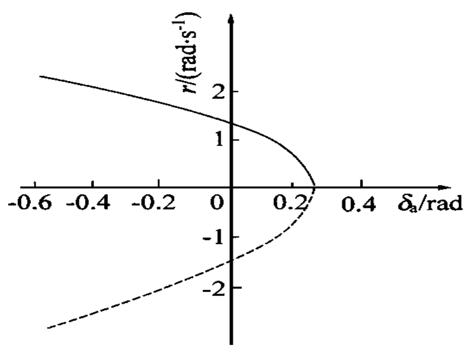

图 1 r 关于参数 δ_a 的分岔图

Fig. 1 r-δ_a bifurcation chart

同理,当令 $\delta_a = \delta_{a0}, \delta_r = \delta_{r0}$, 和 $\delta_e = \delta_{e0}, \delta_a = \delta_{a0}$ 时,可分别得到 r 关于参数 δ_e 和 δ_r 的方程为

$$\mathring{r} = r(0.0624 - 0.0296 \delta_e - 0.0430 r) + 13.7592 \delta_e + \cdots \tag{10}$$

$$\mathring{r} = r(0.3859 \delta_r + 0.4247 r) + 9.6345 \delta_r + \cdots \tag{11}$$

图 2 和图 3 分别给出了相应的方程式(10)和方程式(11)分岔图。由各图可知,飞机在$(p, q, r, \alpha, \beta) = (-1.3040, -0.2450, -0.9013, -0.1403, 0.1009)$, $(\delta_{a0}, \delta_{e0}, \delta_{r0}) = (14°, 9.2°, 0°)$ 的平衡状态下飞行时,飞机的滚转角速度将发生分岔运动,即当 $\delta_a < 14°, \delta_e > 9.2°, \delta_r > 0$ 时,滚转角速度存在两个平衡状态,其中一个是稳定的,而另一个是不稳定的,分别对应于各图中的实线和虚线部分。该结论与文献[1]用 BACTM 方法得到的结论是一致的。

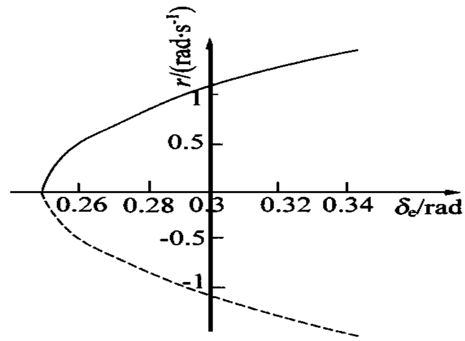

图 2 r 关于参数 δ_e 的分岔图

Fig. 2 r-δ_e bifurcation chart

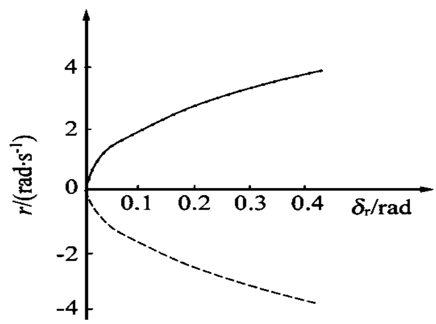

图 3 r 关于参数 δ_r 的分岔图

Fig. 3 r-δ_r bifurcation chart

4 结论与讨论

对于飞机非线性动力学系统中的稳定性问题,用分岔理论中的中心流形约化降维技巧和分岔分析方法可以将高维动力学系统的求解问题约化为低维动力学系统的求解问题。本文的方法简便易行,且可以大大减小计算量,适合于高维的飞机飞行动力学系统的性能分析。

讨论了当气动力学系数是迎角的线性函数时飞机滚转进惯性耦合运动的分岔和稳定性分析。实际上,当飞机的惯性耦合不能被忽略时,常意味着飞机在大迎角的情况下飞行,这表示飞机所受的气动力是迎角的非线性函数,气动力的非线性将不能被忽略。由于缺少非线性气动力数据,未对非线性气动力的情况进行具体的讨论,但所述的方法亦可应用于此程情况。今后将对此作进一步的研究。

参 考 文 献

[1] Mehra R K, *et al.* Global stability and control analysis of aircraft at high angle-of-attack[R]. AD-A051850, 1978.

[2] Carroll J V, Mehra R K. Bifurcation analysis of nonlinear aircraft dynamics[R]. AIAA-82-4258, 1982.

[3] Carroll J V, Mehra R K. Global stability and control analysis of aircraft at high angle of attack[R]. Rep ONR-CR 215-248-2, 1978.

[4] Mehra R K, Carroll J V. Bifurcation analysis of aircraft at high angle of attack[R]. AIAA Paper 80-1599, 1980.

[5] Ross A J. A comparison of analytical techniques for predicting stability boundaries for some types of aerodynamics of crosscoupling nonlinearities [R]. AGARD CP-333, 1982.

[6] Lowenbery M H. A global technique for aircraft stability and control analysis[J]. Journal of Aero Society of South Africa and African Institute of Aero Engineers, 1984, 5(1).

[7] Guicheteau P. Bifurcation theory applied to the study of control losses on combat aircraft [J]. La Recherche Aerospaciate, 1982(3): 1～14.

[8] 刘昶, 蒋明. 飞机改出尾旋规律研究[J]. 航空学报, 1990, 11(2): B1～B9.

[9] 方振平, 郑洁. JJ6 飞机进入和改出尾旋的分析[J]. 航空学报, 1989, 10(10): B479～B488.

[10] 何雄. 根据分歧面研讨飞机的尾旋控制规律[J]. 飞行力学, 1989(1): 52～61.

[11] 刘昶, 丁红平. 飞机急滚转全局稳定性研究[J]. 航空学报, 1993, 14(2): B7～B12.

[12] 刘昶, 赵波. 应用分支和突变理论对飞机空间机动稳定性的研究[J]. 航空学报, 1988, 9(9): A399～A408.

[13] 高浩, 周志强. 高机动性能飞机大迎角全局稳定性[J]. 航空学报, 1987, 8(11): A561～A571.

[14] 刘昶. 飞行动力学非线性特性研究[J]. 飞行力学, 1987(1): 59～70.

[15] 陆启韶. 分岔与奇异性 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1995.

[16] 陆启韶. 常微分方程的定性方法与分岔[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.

作者简介:

许多生　1958 生, 男, 北京航空航天大学理学院副教授, 博士。1978 年至 1988 年在南京华东工学院机械工程及外弹道专业先后取得学士、硕士、博士学位, 1988 年至 1994 年于机电部机械工程设计院工作, 1994 年 7 月至今于北航理学院一般力学研究室工作。

陆启韶　1940 生, 男, 广东顺德人, 北京航空航天大学理学院教授, 《航空学报》编委。1960 年毕业于北京航空学院空气动力学专业, 1981 年至 1983 年美国 Purdue 大学访问学者, 1989 年北京航空航天大学教授, 1989 年至 1990 年北航一般力学博士点指导教师, 1998 年至今北航理学院应用数学系主任兼一般力学研究室主任, 在国内外学术刊物及会议发表论文 120 余篇。

《航空学报》动态稿刊登办法

1 为发挥传媒优势, 促进学术交流, 《航空学报》和《中国航空学报(英文版)》对航空航天相关学科的学术动态进行报道。

2 动态稿的刊登范围包括: 学术会议通知、会议纪要、学术专著推介等与航空航天科研有关的动态消息, 欢迎各专业学会(包括中国航空学会各专业分会)及其他组织和个人积极供稿。

3 动态稿的标题排入每期学报的目录, 刊登位置主要利用学报刊登论文后的页面空白区。

4 动态稿投稿请按所属学科领域直接寄各专业编辑, 具体如下:

吴小勇(流体力学、飞行力学) Email: wxy@hkxb.net.cn

李铁柏(飞行器设计、结构强度) Email: ltb@hkxb.net.cn

俞　敏(电子、自动控制) Email: yumin@hkxb.net.cn

蔡　斐(材料、制造工艺) Email: caifei@hkxb.net.cn

如果不知道某个学科该和谁联系的, 中文版动态投稿请与俞敏编辑联系, 英文版动态投稿请与蔡斐编辑联系。《航空学报》视版面情况和来稿内容对来稿进行选登(有可能有删节), 对动态投稿不发录用或者退稿通知。

5 希望在《中国航空学报(英文版)》上刊登的, 请投英文稿。

6 动态类稿件一般不收版面费, 也不发稿费。

《航空学报》编辑部

2001 年 1 月