

文章编号:1000-6893(2010)09-1776-05

# 多输入多输出随机振动试验变参数 PID 控制

崔旭利, 陈怀海, 贺旭东, 游伟倩

(南京航空航天大学 振动工程研究所 飞行器结构力学与控制教育部重点实验室, 江苏 南京 210016)

## PID Control with Variable Arguments for MIMO Random Vibration Test

Cui Xuli, Chen Huaihai, He Xudong, You Weiqian

(MOE Key Lab of Structure Mechanics and Control for Aircraft, Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**摘要:** 对多输入多输出(MIMO)随机振动试验控制的基本过程进行了系统分析。定义了一种新的在对数坐标下的控制误差表达式,然后在控制算法中引入了新的比例-积分-微分(PID)控制策略,并给出了PID参数随误差变化的规律。以悬臂梁为控制对象,完成了两输入两输出随机振动试验。结果表明:变参数PID控制方法能在保证快速均衡的基础上,有效地减小功率谱和参考谱之间的相对误差以及加速度总均方根值的控制误差,提高随机振动试验的控制精度。

**关键词:** 多输入多输出; 环境试验; 振动控制; PID控制; 变参数

**中图分类号:** V216.2<sup>+</sup>1; O324 **文献标识码:** A

**Abstract:** The basic procedure of a multi-input multi-output (MIMO) random vibration test is analyzed systematically in the article. A definition of control error under logarithmic coordinates is provided, and a new proportion-integration-differentiation (PID) control strategy is introduced into the control algorithm. The law of the error-dependent arguments for the PID controller is then presented. A two-input two-output random vibration test is performed with a cantilever beam to verify the proposed control method. The experimental results show that the variable argument PID control method not only has the ability to make rapid tradeoff between the control and the reference spectra but it can also reduce effectively the errors between them as well as the control error of the total root mean square of acceleration. Therefore the accuracy of random vibration test control is improved.

**Key words:** MIMO; environmental testing; vibration control; PID control; variable argument

随机振动试验是在实验室内用振动台人工模拟结构系统在实际工作中的振动环境,以检验或确认结构系统的工作可靠性或耐久性。为了避免试件的过试验,确保其安全性,在试验过程中,要求控制谱能迅速均衡到参考谱的 $\pm 3$  dB的误差范围内,即要求试验控制系统具有快速均衡的能力。此外,随机振动试验还有控制精度的要求,主要指标是加速度谱密度的控制精度和加速度总均方根值的控制精度<sup>[1]</sup>。

多输入多输出(MIMO)随机振动试验控制理论主要由 D. O. Smallwood 等<sup>[2-10]</sup>建立。Smallwood 在 1999 年发表的一篇关于多点随机振动控制的综述<sup>[8]</sup>中,提出了一种随机振动试验控制的差分修正算法。在实际应用中,差分修正算法可能会使参考谱矩阵 Cholesky 分解得到的三角阵

的对角元素出现负值,这在物理上是不可实现的。贺旭东等<sup>[11]</sup>在分析了差分修正算法的基础上,在不考虑互谱控制的情况下,提出了比例均方根修正算法,避免了上述三角阵中对角元素出现负值的可能,该算法能够使控制谱快速平稳地收敛。但由于功率谱估计存在随机误差,比例均方根修正算法所得到的功率谱控制误差的标准差较大,加速度谱密度控制精度也不完全令人满意。

比例-积分-微分(PID)控制算法在多输入多输出振动控制中多应用于时域控制<sup>[12]</sup>,本文在比例均方根修正算法的基础上引入了PID修正策略<sup>[13]</sup>,并采用变参数PID修正算法<sup>[14]</sup>进行频域控制。该方法在保证快速均衡的同时,能减小响应谱和参考谱之间的误差,减小误差的标准差,使误差的概率密度分布更集中,提高加速度谱密度的控制精度;减小功率谱密度总均方根值的控制误差,较大地改善了控制效果。

## 1 公式推导

多输入多输出随机振动控制的目标是使控制谱和参考谱一致,若以响应的功率谱  $S_{yy}(f)$  为控制谱,由振动理论可得

$$S_{yy}(f) = G(f)S_{dd}(f)G^H(f) = R(f) \quad (1)$$

式中: $G(f)$ 为系统频响矩阵; $S_{dd}(f)$ 为驱动谱矩阵; $R(f)$ 为参考谱矩阵; $f$ 为频率,为书写方便后文将省略  $f$ 。矩阵用大写字母表示,其元素用相应的小写字母表示。

由式(1)可得驱动谱矩阵为

$$S_{dd} = ARA^H \quad (2)$$

式中: $A=G^{-1}$ 为系统的补偿矩阵。对式(2)中  $S_{dd}$  和  $R$  分别作 Cholesky 分解<sup>[15]</sup>,可得驱动信号频谱矩阵  $D$  为

$$D = AL \quad (3)$$

其中  $L$  和  $D$  分别满足

$$R = LL^H \quad (4)$$

$$S_{dd} = DD^H \quad (5)$$

因参考谱中自谱元素缺少相位信息,故对式(3)补充随机相位,得到

$$D = ALP \quad (6)$$

式中:随机相位矩阵  $P$  为对角阵,其对角元素是  $e^{j\theta_i}$  ( $i=1,2,\dots$ ), $\theta_i$  为服从  $[-\pi, \pi]$  上均匀分布的随机相位。将式(5)和式(6)代入式(1)得

$$S_{yy} = (GA)L(PP^H)L^H(GA)^H \quad (7)$$

式中: $(PP^H)=I$ , $I$  为单位阵。理论上  $GA=I$ ,但是在实际的试验系统中,由于频响函数测量误差、系统非线性和输入输出噪声等的影响, $GA \neq I$ ,从而导致  $S_{yy} \neq R$ ,因此必须在控制系统中加入反馈修正环节,进行逐次迭代修正。

在不考虑互谱控制的情况下, $S_{yy}$  和  $R$  都是对角阵。设  $GA = \bar{L}$ , $\bar{L}$  为近似于单位阵的对角阵。为使新的响应功率谱  $S_{yy,new} = R$ ,引入对角实数修正矩阵  $E$ ,由式(7)可得

$$S_{yy,new} = GAELPP^H L^H E^H A^H G^H = R \quad (8)$$

比较式(7)和式(8),可以得到修正迭代公式为

$$L_{new} = E^{-1}L \quad (9)$$

根据对角阵的乘法可交换性,由式(7)和式(8)可得

$$E^2 = S_{yy}R^{-1} \quad (10)$$

对式(10)两边取对数,并定义第  $k$  次迭代误差  $\Delta^{(k)}$  为

$$\Delta^{(k)} = \lg E^{(k)} = \frac{1}{2}(\lg S_{yy}^{(k)} - \lg R) \quad (11)$$

引入PID修正环节,可得

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p &= k_p \Delta^{(k)} \\ \Delta_i &= k_i \sum_{j=1}^k \Delta^{(j)} \\ \Delta_d &= k_d (\Delta^{(k)} - \Delta^{(k-1)}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $\Delta_p$ 、 $\Delta_i$  和  $\Delta_d$  分别为比例、积分和微分修正环节误差; $k_p$ 、 $k_i$  和  $k_d$  分别为比例、积分和微分系数。

定义修正量  $U$  为

$$\lg U = \Delta_p + \Delta_i + \Delta_d \quad (13)$$

由式(11)~式(13)易得

$$U = (E^{(k)})^{k_p} \prod_{j=1}^k (E^{(j)})^{k_i} [E^{(k)} (E^{(k-1)})^{-1}]^{k_d} \quad (14)$$

引入PID修正后,修正迭代式(9)变为

$$L^{(k+1)} = U^{-1}L^{(k)} \quad (15)$$

式(10)、式(14)和式(15)就构成了PID修正算法。

## 2 PID参数设定

随机振动控制中,功率谱的估计采用周期图法,估计得到的功率谱与真实的功率谱之间有小幅度随机误差,在对  $L$  进行修正时,会将这种误差带入到修正过程中。当  $k_p$  的值较大时,可以加快修正速度,但是同时也引入了较大的随机误差,影响修正的精度;反之,可以减小随机误差的影响,但同时也减缓了修正的速度。因此在功率谱和参考谱之间的误差较大时  $k_p$  的值宜取得大些,误差较小时,  $k_p$  的值宜取得小些;当  $k_i$  值较大时,可以加快稳定误差的消除,但是在功率谱和参考谱之间误差较大时,大的  $k_i$  容易导致自谱的大幅度波动,此时应采用小的  $k_i$ ;微分修正环节可以加快修正的速度,在误差较大时,可适当增大  $k_d$ ,但是考虑到功率谱估计的随机误差的影响, $k_i$  和  $k_d$  都不宜取得很大。

基于上述考虑,PID参数设定为

$$\left. \begin{aligned} k_p &= k_{p,\max}(1 - e^{-\alpha\delta^2}) + k_{p,0} \\ k_i &= k_{i,\max} e^{-\beta\delta^2} \\ k_d &= k_{d,\max}(1 - e^{-\gamma\delta^2}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$  为待定系数; $k_{p,\max}$ 、 $k_{i,\max}$  和  $k_{d,\max}$  分别为系数  $k_p$ 、 $k_i$  和  $k_d$  的变化幅度; $k_{p,0}$  为  $k_p$  的平移量,为保证收敛, $k_{p,0} \leq 1 - k_{p,\max}$ ;  $\delta$  为误差矩阵  $\Delta$  的元素。在此给出一般的参数变化律:取  $k_{p,\max} = 0.9$ ,  $k_{i,\max} = 0.1$ ,  $k_{d,\max} = 0.1$ ,  $k_{p,0} = 0.1$ ;当  $\delta = \pm 6$  dB 时,  $k_p = 0.8$ ,  $k_d = 0.08$ ;当  $\delta = \pm 3$  dB 时,  $k_i = 0.01$ 。将上述参数代入式(16)可求得: $\alpha = 0.0418$ ,  $\beta = 0.2558$ ,  $\gamma = 0.0447$ 。

以上参数设定与被控对象的频响函数无关,  
© 航空学报杂志社 <http://hkxb.buaa.edu.cn>

可根据工程中对收敛速度和控制精度的需要作适当调整。

$k_p$ 、 $k_i$  和  $k_d$  随误差的变化曲线如图 1 所示。

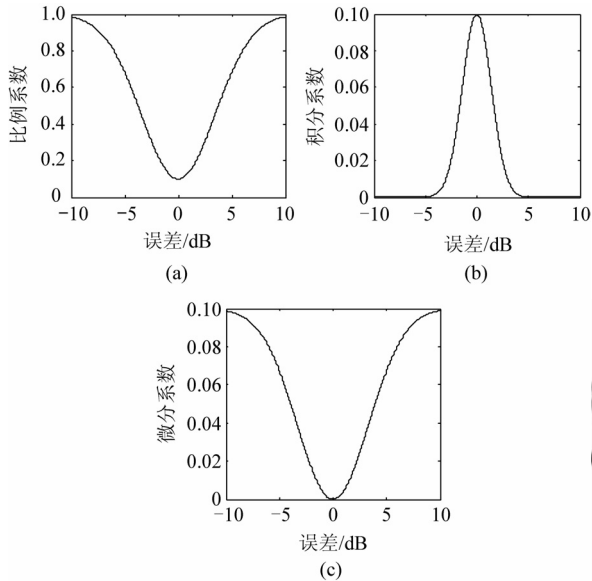


图 1  $k_p$ 、 $k_i$  和  $k_d$  随误差的变化曲线

Fig. 1 Curve of  $k_p$ ,  $k_i$  and  $k_d$  vs error

### 3 试验验证

本文在一根悬臂钢梁上做两点的随机振动控制。梁长  $l=1\ 200$  mm, 宽  $b=30$  mm, 高  $h=12$  mm, 激励和传感器的位置如图 2 所示。试验现场如图 3 所示, 试验仪器包括: HEV-50 激振器, HEAS-2 功率放大器, PCB 加速度传感器, Agilent VXI 信号发送与采集系统。

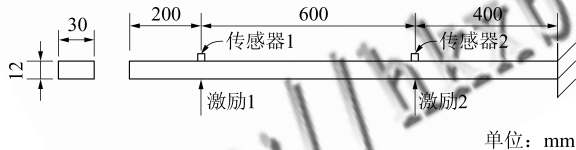


图 2 悬臂梁尺寸

Fig. 2 Size of cantilever beam



图 3 试验现场

Fig. 3 Test field

参考谱的设定如图 4 所示, 两控制点采用相同的参考谱。频率带宽为 2 000 Hz, 谱线为 800 线。20~100 Hz 斜率是 3 dB/Oct, 100~1 000 Hz 谱密度值是  $10^{-7} g^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ , 1 000~2 000 Hz 斜率是 -3 dB/Oct。

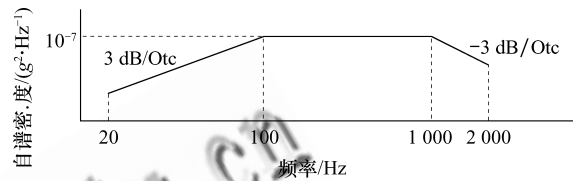


图 4 参考谱

Fig. 4 Reference spectrum

在试验中分别采用比例均方根算法和变参数 PID 算法对两点随机振动试验进行闭环修正, 并比较控制效果。功率谱估计平均次数为 30 次。在闭环修正之前先给出开环试验结果, 如图 5 所示, 图中细实线为参考谱的值, 点划线为  $\pm 6$  dB 误差限, 虚线为  $\pm 3$  dB 误差限。

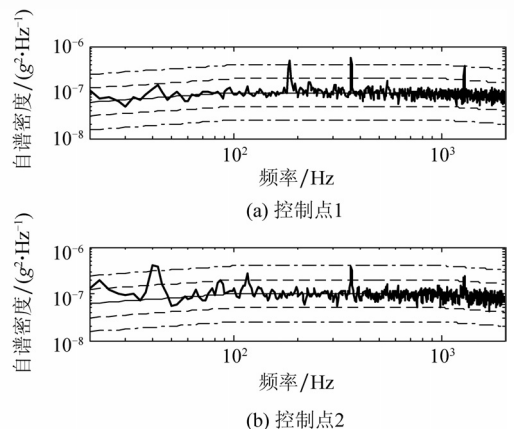


图 5 开环试验结果

Fig. 5 Open loop test result

从图 5 可以看出在开环试验时, 两个控制点都有一些频率存在超标谱线。选取控制点 1 的 185 Hz 和 365 Hz 两频率处的自谱密度作为修正算法收敛速度的监测点。

图 6 中虚线是参考谱的值, 实线是  $\pm 3$  dB 误差限。对比可见, 变参数 PID 修正算法既可保证超标谱线较快地收敛到允许范围内, 又能减小迭代过程中谱线的上下抖动, 使谱线更加稳定地收敛到期望的参考值。

图 7 和图 8 分别给出了比例均方根算法和变参数 PID 算法的控制结果, 从图中可以直观地看到变参数 PID 算法的结果中自谱更靠近参考谱。

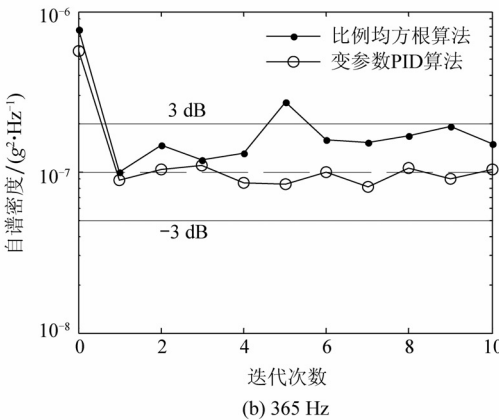
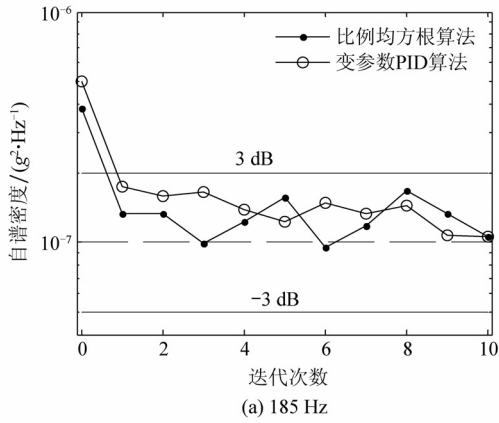


图 6 控制点 1 自谱密度收敛过程比较  
Fig. 6 Comparison of auto-spectrum convergence of control point 1

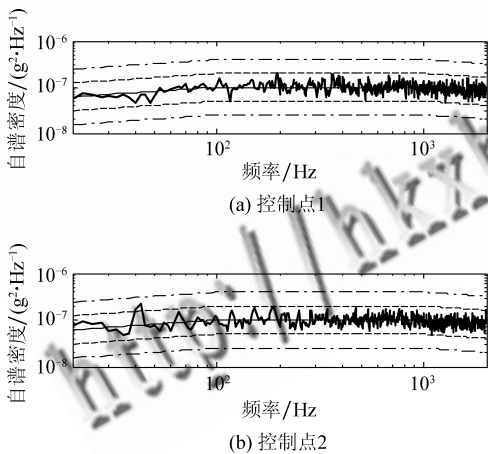


图 7 比例均方根算法控制结果  
Fig. 7 Results of proportional root mean square control

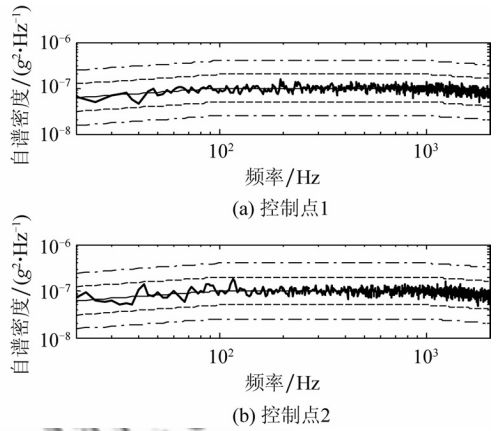


图 8 变参数 PID 算法控制结果  
Fig. 8 Results of PID control with variable arguments

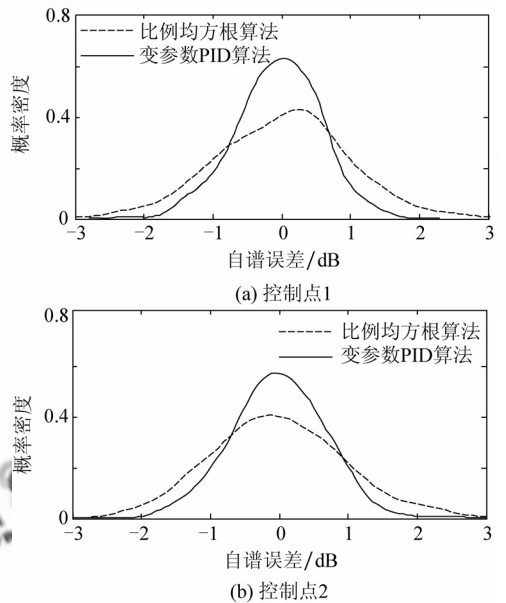


图 9 自谱误差概率密度分布对比  
Fig. 9 Comparison of probability density distribution of auto-spectrum error

表 1 自谱误差标准差

Table 1 Standard deviation of auto-spectrum error

控制点	自谱误差标准差/(g²·Hz⁻¹)	
	比例均方根算法	变参数 PID 算法
1	0.960 7	0.614 6
2	0.986 3	0.684 1

图 9 给出了自谱与参考谱的误差的概率密度分布,变参数 PID 算法的误差分布更集中。

表 1 列出了误差的标准差,变参数 PID 算法的标准差较小,在相同的置信度下控制精度更高。

表 2 列出了比例均方根算法和变参数 PID 算法的功率谱密度的均方根值。从表中可以看到,相同条件下变参数 PID 算法控制结果的功率谱密度总均方根值更接近参考值,控制误差小,控制精度得到了提高。

表2 功率谱密度总均方根值控制误差

Table 2 Control error of total root mean square of power spectrum density

控制点	参考值/g	比例均方根算法		变参数PID算法	
		计算值/g	误差/%	计算值/g	误差/%
1	0.013 64	0.013 83	1.49	0.013 63	0.01
2	0.013 64	0.013 80	1.25	0.013 72	0.68

## 4 结论

采用变参数PID修正算法,经过1~2次的迭代就能使超标谱线收敛到±3 dB的允许误差范围内,保证了快速均衡;使响应谱和参考谱之间误差的概率密度分布更集中,减小了功率谱和参考谱误差的标准差,提高了加速度谱密度的控制精度;减小了功率谱密度总均方根值的控制误差,改善了控制效果。变参数PID修正算法减小了功率谱估计中随机误差的影响,使得修正过程更稳定。在保证快速均衡的前提下,提高了控制精度。

## 参 考 文 献

- [1] 胡志强, 法庆衍, 洪宝林, 等. 随机振动试验应用技术[M]. 北京: 中国计量出版社, 1996: 131-135.  
Hu Zhiqiang, Fa Qingyan, Hong Baolin, et al. The application technique of random vibration test[M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 1996: 131-135. (in Chinese)
- [2] Smallwood D O. Multiple shaker random control with cross-coupling[C]//Proceedings of the Institute of Environmental Sciences. 1978: 341-347.
- [3] Smallwood D O. Random vibration testing of a single test item with a multiple input control system[C]//Proceedings of the Institute of Environmental Sciences. 1982: 42-49.
- [4] Smallwood D O, Woodall T D, Buksa E J. Minimum drive requirements for a multiple input multiple output linear system[C]//Proceedings of the Institute of Environmental Sciences. 1986: 295-301.
- [5] Smallwood D O. Random control at  $n^2$  points using  $n$  shakers[C]//Proceedings of the Institute of Environmental Sciences. 1987: 271-275.
- [6] Smallwood D O, Paez T L. A frequency domain method for the generation of partially coherent normal stationary time domain signals[J]. Shock and Vibration, 1993, 1(1): 45-53.
- [7] Smallwood D O. Generation of stationary non-Gaussian time histories with a specified cross-spectral density[J]. Shock and Vibration, 1997, 4(5/6): 361-377.
- [8] Smallwood D O. Multiple shaker random vibration control—an update[C]//Proceedings of the Institute of Environmental Sciences and Technology. 1999: 212-221
- [9] Smallwood D O. Generating non-Gaussian vibration for

testing purposes[J]. Sound and Vibration, 2005, 39(10): 18-24.

- [10] Smallwood D O. Multiple input multiple output (MIMO) linear systems extreme inputs/outputs[J]. Shock and Vibration, 2007, 14(2): 107-131.
  - [11] 贺旭东, 陈怀海, 申凡, 等. 双振动台随机振动综合控制研究[J]. 振动工程学报, 2006, 19(2): 145-149.  
He Xudong, Chen Huaihai, Shen Fan, et al. Synthetically research on dual shaking-table random vibration control[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(2): 145-149. (in Chinese)
  - [12] 姜双燕, 陈怀海, 贺旭东. 基于内模控制的多输入多输出高阶振动系统PID控制器设计[J]. 航空学报, 2009, 30(2): 236-241.  
Jiang Shuangyan, Chen Huaihai, He Xudong. PID controller design for MIMO high-order systems based on internal model control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(2): 236-241. (in Chinese)
  - [13] 刘金琨. 先进PID控制及其MATLAB仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 1-7.  
Liu Jinkun. Advanced PID control and MATLAB simulation[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 1-7. (in Chinese)
  - [14] 钟庆昌, 谢剑英, 李辉. 变参数PID控制器[J]. 信息与控制, 1999, 28(4): 273-277.  
Zhong Qingchang, Xie Jianying, Li Hui. PID controller with variable arguments[J]. Information and Control, 1999, 28(4): 273-277. (in Chinese)
  - [15] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 225-227.  
Zhang Xianda. Matrix analysis and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 225-227. (in Chinese)
- 作者简介:**  
**崔旭利**(1981—) 男, 博士研究生。主要研究方向: 振动测试与控制。  
 Tel: 025-84893082  
 E-mail: cuixuli@nuaa.edu.cn
- 陈怀海**(1965—) 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 振动测试、分析与控制, 有限元与模型修正, 结构动力学设计。  
 Tel: 025-84893082  
 E-mail: chhnuaa@nuaa.edu.cn
- 贺旭东**(1978—) 男, 博士, 副教授。主要研究方向: 振动测试、分析与控制。  
 Tel: 025-84893082  
 E-mail: hexudong@nuaa.edu.cn
- 游伟倩**(1979—) 女, 博士研究生。主要研究方向: 振动控制及振动测试。  
 Tel: 025-84893082  
 E-mail: youweiqian@gmail.com