文章编号:1000-6893(2010)09-1880-12

考虑工序外协的TOC产品组合优化研究

王军强[1,2],孙树栋[1,2],翟颖妮[1,2],牛刚刚[1,2]

(1.西北工业大学 系统集成与工程管理研究所,陕西 西安 710072)

(2.西北工业大学 现代设计与集成制造技术教育部重点实验室,陕西 西安 710072)

TOC Product Mix Optimization with Elevated Capacity of Outside Processing

Wang Junqiang[1,2], Sun Shudong[1,2], Zhai Yingni[1,2], Niu Ganggang[1,2]

(1. Institute of System Integration & Engineering Management, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Key Laboratory of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology, Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

摘 要:针对"粗粒度"产品外包或自制模式进行能力拓展时造成的产品规划保守和接单损失问题,采用"细粒度"工序外协模式对瓶颈、非瓶颈有区别地进行产能提升,使企业设备平均利用率最高、整体有效产出最优、市场需求满意度最好。从自制商和外协商两种角度定义了有效产出,并推导了工序外协和产品外包两种不同制造模式下有效产出的关系。基于传统和新型两种约束理论(TOC)运作逻辑,根据独立优化和集成优化两种优化策略,构建了考虑工序外协的两种TOC产品组合优化数学模型。分析了工序外协和自制/外包模型间的关系,并进行了数学证明。若单位产品的外包成本等于所有工序外协的累加成本,则同一制造模式下集成优化策略不差于独立优化策略,同一优化策略下工序外协制造模式不差于产品外包制造模式。最后通过单瓶颈、多瓶颈算例分析验证了模型以及定理的有效性。

关键词:产品组合优化;约束理论;工序外协;集成优化策略;有效产出;建模

中图分类号:TH166;O141.4 **文献标识码**:A

Abstract: Owning to the traditional capacity extending method of product-based coarse-grained pattern, a conservative plan is made according to the product mix solution under the outsourcing or self-manufacturing mode, often resulting in loss of profit. To improve the situation, a new capacity extending method of process-based fine-grained pattern under the outside processing manufacturing mode is introduced which discriminatively identifies and exploits capacity constrained resources (CCR) and non-CCR to increase overall equipment utilization efficiency, maximize system throughput, and satisfy the demands for the finished products to the maximum extent. First, from the very different but inter-related viewpoints of the manufacturer and contractor, the throughput of each party is defined and their interrelations are analyzed. In addition, a comparison of throughput is drawn between the outside processing mode and product outsourcing mode and their relationships are deduced. Second, two mathematical models are presented based respectively on integrated optimization strategy of the traditional theory of constraints (TOC) operational logic and individual optimization strategy the new logic. Third, the two models are analyzed and their optimal throughputs are compared. Furthermore, if the expenses of aggregate outside processing for every product are equal to its expenses of outsourcing, then some relevant theorems are proved, which state that, the integrated optimization strategy performs as well as or better than the individual optimization strategy under the same manufacturing mode, either it is outside processing or product outsourcing mode, and that the TOC product mix optimization solution considering outside processing mode is more outstanding than the one considering outsourcing mode under the same optimization strategy, either it is integrated or individual optimization strategy. But it is not sure that the solution considering the outside processing mode using individual optimization strategy would be superior to the one considering the outsourcing mode using integrated optimization strategy. These conclusions lay the foundation not only for further algorithms to be established in follow-up research, but also help production planners make scientific deci-

收稿日期:2009-10-26;**修订日期**:2010-01-22

基金项目:国家自然科学基金(50705077);国家"863"计划(2007AA04Z187);陕西省自然科学基础研究计划(2009JQ9002);西北工业大学翱翔之星计划

通讯作者:王军强 E-mail:wangjunqiang@hotmail.com

sions when dealing with product mix problems. Finally, some single bottleneck and multi-bottleneck examples show the validity of these models and theorems.

Key words: product mix optimization; theory of constraints; outside processing; integrated optimization strategy; throughput; modeling

航空企业作为中国国防工业的重要组成部分，承担着大量军品、民品以及零部件转包生产的研制、生产任务，其生产方式属于典型的多品种、小批量类型。随着制造业竞争(Competition)日趋激烈、变化(Change)日新月异、顾客(Customer)日渐成熟，航空企业正经历着 3C 运营环境所带来的前所未有的挑战，迫使企业在进行新线构建、老线调整、生产线产能规划、产品结构调整或者资源整合、资源挖潜时，都存在产品组合优化的问题。

产品组合优化是约束理论(Theory of Constraints, TOC)[1]的重要组成部分，运用 TOC 运作指标[2]，如有效产出(Throughput, TP)、库存(Inventory, I)和运行费(Operating Expenses, OE)，根据瓶颈能力的最大化以及瓶颈有效产出的最大化来优化既定市场需求下满足资源能力约束的产品种类和相应数量，以使系统利润最大。产品组合优化作为企业上层决策的重要组成部分，直接影响企业收益和顾客满意度。产品组合优化将为企业产品战略调整、资源能力设计、资源能力调整、投资分析、主生产计划(Master Production Schedule, MPS)优化等提供重要的数据支持和决策依据。

目前常见的 TOC 产品组合问题[3-8]仅考虑自制情形，本文称之为传统 TOC 产品组合问题，其仅以系统已有的生产能力论产品的组合，是一种以企业为导向而非以市场为导向的生产理念，未考虑市场化下应以尽量满足客户需求为出发点，也未考虑生产协作带来的生产变革。

产品外包(Outsourcing)充分利用外部资源的能力，通过合理配置内、外资源，使系统整体最优[9]。根据是否为外包商提供原材料将外包分为带料外包(外包商包工不包料)和不带料外包(外包商包工包料)两种。文献[10]仅仅讨论了外包的一种形式——不带料外包。文献[11]在文献[10]基础上讨论了两种外包形式，分别构建了自制-不带料外包的集成优化模型和自制-带料外包的集成优化两种模型，并从不同角度对有效产出进行了定义，将外包/自制的两种模型统一为一个模型，但其并未讨论同时考虑不带料外包和带料外包两种形式的产品组合优化情形。文献[12]对此进行了研究，讨论了“自制、不带料外包、带料外包”三者混合形式的产品组合优化问题。文献[13]对外包形式受限的情形进行了研究。

然而现有的研究不论自制还是外包，产品组合“粒度”都定位在“单位产品”上，“粒度”太大。以“单位产品”作为组合优化的最小粒度进行产能提升方式，其在解决瓶颈产能限制的同时，也在拓展着企业非瓶颈的能力。探究原因，主要忽视了以下事实：①能力短缺的瓶颈是极少数，能力富裕的非瓶颈是大多数，瓶颈与非瓶颈对系统的影响并非处于同等地位。通过牺牲众多非瓶颈充足能力进行少数瓶颈能力提升的方式，这就使得企业陷入到非瓶颈产能浪费严重、瓶颈产能限制无法得到有效改观、产品组合方案只能被迫限制在最低(瓶颈)的生产水平上的尴尬境地。②产品组合过程就是资源消耗过程，不同产品对同一资源的消耗并不具备同等效力。因此，没有理由因为产品粒度“人为不可分”而将产品对资源的消耗硬性绑定在统一消耗比率上。事实上，完全可以将“单位产品”粒度拆分到“单位工序”粒度，依据单位工序考虑资源消耗，从而解除产品对资源消耗的硬性绑定。这样，通过将“产品-资源”关系拆分为“工序-资源”关系，“产品级”产品组合优化问题将拓展为“工序级”产品组合优化问题。

工序外协(Outside Processing)在网络化制造、协同制造等现代制造系统中应用日益普遍，其不仅能更好地整合企业内外资源、优化产业结构、保持企业核心竞争力，而且能更好地降低生产成本、增加有效产出，满足客户需求。通过工序外协模式，采用“补短板”的方式，面向瓶颈、非瓶颈不同资源的负载需求，有区别地进行产能利用，仅需对需要能力提升的瓶颈工序进行产能提升，不仅避免了“单位产品”粗粒度组合模式对不需要能力拓展的非瓶颈统一进行能力拓展的问题，而且达到了以较少投入提高少数瓶颈能力限制获得多数设备平均利用率的较大提升，最大程度地优化了企业内、外资源的有效利用，从而达到提高企业设备平均利用率、增加企业整体有效产出、提升市场需求满意度的目的。但目前考虑工序外协的产品

组合优化研究至今未见文献报道。

本文在前面研究基础上，研究工序外协情形下 TOC 产品组合优化问题，最大程度优化利用企业自身资源，使企业设备平均利用率最高、整体有效产出最优、市场需求满意度最好。

1 数学建模

将自制加工零部件的一道或几道工序进行外协加工分为工序完全外协和工序部分外协两类。某道工序完全外协有技术原因（如此道工序必须由数控车床加工）、特殊工序（若热处理考虑环境污染）以及经济原因等。某道工序部分外协主要是因为自身生产能力不足以及经济原因等导致。

本文研究的工序外协主要指因为自制商资源能力不足而引起部分工序的部分外协，但也可能存在：

① 部分工序的完全外协（包含某道工序的完全外协）；

② 所有工序的完全外协（但不是所有产品），类似外包模式；

③ 所有产品、所有工序完全外协，类似外购模式。

1.1 模型假设

考虑外协的 TOC 产品组合优化模型的假设如下：

① 所有产品的任何工序其自制的利润不小于工序外协利润，即自制商能力不足时再考虑工序外协情况。

② 工序外协能力无限制，但不存在因为工序外协而造成产品的超产库存。

③ 以完全满足市场需求为目标，不存在超产或欠产情况。

④ 工序外协的加工时间默认以自制的工时定额来计量。

⑤ 首道工序外协所需的原材料、标准件等消耗由企业自身提供（即带料外协），并以自制的材料定额来计量。

⑥ 同一产品同一工序的外协成本不随其数量而变化，即其工序外协成本为定值，且不小于 0。

⑦ 不考虑废品的影响。

⑧ 所有产品的交货期一致。

⑨ 产品数量、外协工序数量均取整，即外协只能外协完整工序的整数倍工序。显见，本文限定产品组合优化为整数规划（Integer Programming，IP）问题。

从以上假设知，本文提出的考虑工序外协的 TOC 产品组合优化不影响库存 I 和运营费 OE，仅影响有效产出 TP。模型中，独立优化用上标 R 标记，集成优化用上标 I 标记，外协情形用 w 表示，外包情形用 o 表示，自制情形用 m 表示。

1.2 有效产出定义

（1）工序外协制造模式下 TP 定义

TP 指系统通过产品销售获利的速度，它是 TOC 运作指标最直接也最有效的指标[1]。本文通过 TP 指标来衡量 TOC 产品组合的效果。

① 从自制商角度出发，本文定义自制产品有效产出 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 和外协产品有效产出 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}$ 为

$$\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}=\eta_{ij}\,\mathrm{TP}_{i}^{\mathrm{m}} \tag{1}$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}=\eta_{ij}\,\mathrm{TP}_{i}^{\mathrm{m}}-\delta_{ij}w_{ij} \tag{2}$$

$$\mathrm{TP}_{i}^{\mathrm{m}}=p_i-m_i \tag{3}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & d_i-y_{ij}>0\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{4}$$

式中：i 为产品标记，$i=1,2,\cdots,n$，记：$i\in N$；j 为加工中心标记，$j=1,2,\cdots,m$，记：$j\in M$；$\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 为从自制商角度出发，在 j 资源上自制加工产品 i 的有效产出；η_{ij} 为产品 i 在 j 资源上自制加工的有效产出系数，$\eta_{ij}=t_{ij}/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}$，且 $\sum_{j=1}^{m}\eta_{ij}=1$；$\mathrm{TP}_{i}^{\mathrm{m}}$ 为从自制商角度出发，产品 i 完全自制的有效产出，$\mathrm{TP}_{i}^{\mathrm{m}}=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$；$\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}$ 为从自制商角度出发，在 j 资源上外协加工产品 i 的有效产出；p_i 为产品 i 的单价；m_i 为单位产品 i 所需原材料、零部件的外购费；w_i 为单位产品 i 所有工序外协的累加成本，$w_i=\sum_{j=1}^{m}w_{ij}$。根据外包模型假设[11]与外协模型假设，单位产品的外包成本 p_i^{o} 等于所有工序外协的累加成本，即 $p_i^{\mathrm{o}}=w_i\geqslant 0$；$w_{ij}$ 为在 j 资源上外协加工单位产品 i 的单位成本。一般地，$w_{ij}=w_it_{ij}/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}=p_i^{\mathrm{o}}t_{ij}/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}\geqslant 0$；$\delta_{ij}$ 为判断是否在 j 资源上外协加工产品 i 的 1-0 函数；d_i 为产品 i 的市场需求数量；y_{ij} 为计划在 j 资源上自制加工单位产品 i 的数量；此处的 y_{ij} 是经过物料清单（Bill of Materials，BOM）装配算法，将 j 资源上自制加工的零部件通过 BOM 关系转化成产品数量得到的。

② 从外协商的角度出发，本文定义外协的有效产出 TP_{ij}^{p} 为

$$TP_{ij}^{p}=\delta_{ij}w_{ij} \tag{5}$$

式中：TP_{ij}^{p} 为从外协商的角度出发，在 j 资源上外协加工产品 i 的有效产出。

③ 两者之间的关系

虽然从不同角度对 TP 进行了定义，但不难发现其间存在如下关系：

$$TP_{ij}^{w}=TP_{ij}^{m}-TP_{ij}^{p} \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{w}=\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{m}-\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{p}=TP_{i}^{m}-\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{p} \tag{7}$$

从物理含义上，式(6)和式(7)表达了企业自制与外协商外协之间有效产出的差额就是产品外协真正的有效产出。

(2) 不同制造模式下 TP 间关系

考虑产品外包与工序外协不同制造模式下有效产出的关系，产品外包模式下有效产出定义见文献[11]。

当 $\delta_{ij}\equiv 1,\forall j$，即单位产品 i 所有工序进行完全外协加工。

则当 $y_{ij}=y_i$，且 $d_i-y_{ij}>0$，有 $\delta_{ij}\equiv 1,\forall j$。$y_{ij}=y_i$ 表达了单位产品 i 工序要么全部自制，要么全部外协；$d_i-y_{ij}>0$ 保证了外协条件。则式(7)变为

$$\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{w}=TP_{i}^{m}-w_i \tag{8}$$

考虑到 $p_i^{o}=w_i$，则式(8)变为

$$\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{w}=TP_{i}^{m}-TP_{i}^{o}$$

则式(7)就变成

$$TP_{i}^{m}-TP_{i}^{b}=TP_{i}^{o}$$

其中：TP_{i}^{b} 为从自制商角度出发外包产品 i 的有效产出，$TP_{i}^{b}=\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{w}$；$TP_{i}^{o}$ 为从外包商的角度出发外包产品 i 的有效产出，$TP_{i}^{o}=\sum_{j=1}^{m}TP_{ij}^{p}$。

显见，当 $y_{ij}=y_i$，且 $d_i-y_{ij}>0$ 时，产品外包有效产出的定义是工序外协有效产出定义的特例。

1.3 传统 TOC 运作逻辑下建模

根据传统 TOC 运作逻辑[1]，先按自身能力确定企业自制的产品组合，得到自制的优化组合后，再考虑产品外协进行瓶颈能力提升以满足市场需求，得到外协的产品组合，显然这是一种自制/外协独立优化的方式，记其为模型Ⅰ。

(1) 考虑自身能力进行产品组合优化

仅考虑自制的传统 TOC 产品组合优化模型为

$$\max\ TP=\sum_{i=1}^{n}(y_i TP_{i}^{m}) \tag{9}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(y_i t_{ij})\leqslant\beta_j & j\in M\\ l_i\leqslant y_i\leqslant d_i & i\in N\\ y_i\in\mathbf{Z}^{+} & i\in N\end{cases} \tag{10}$$

式中：y_i 为计划加工产品 i 的数量；t_{ij} 为单件产品 i 占用加工中心 j 的时间；β_j 为加工中心 j 正常的可用加工时间；l_i 为产品 i 的最少生产量，最少不少于 0；d_i 为产品 i 的市场需求量；$\mathbf{Z}^{+}$ 为非负整数集。

设 y_i^{m} 为仅考虑自制情形下产品 i 的最优解，则仅考虑自制的传统 TOC 产品组合优化有效产出 TP^{m} 为

$$TP^{m}=\sum_{i=1}^{n}(y_i^{m}TP_{i}^{m}) \tag{11}$$

(2) 非瓶颈剩余能力再利用

考虑自身能力进行产品组合优化之后，瓶颈作为系统有效产出的限制，其上肯定不存在剩余能力，或者剩余的能力不足以分配给任何一个产品(若产品组合不限定为整数，则瓶颈上剩余能力为 0)，否则，产品组合优化的方案不是最优组合方案。而非瓶颈是相对应瓶颈能力可以满足外界负荷需求和相关资源负荷需求的资源[11]，因此非瓶颈上肯定存在一些剩余能力。因此，在进行工序外协之前，需要先将这些非瓶颈剩余能力利用起来进行再分配以使系统有效产出最大。而在产品外包模式中，因为产品的所有工序要么全部外包，要么全部自制，因此在讨论独立优化建模时，不存在此环节的非瓶颈剩余能力的再利用，因此势必会造成资源的浪费和组合的非优化。

针对 j 资源，进行剩余能力二次再利用时，有

① 计算 j 资源上产品 i 自制的优先级 R_{ij}^{0} 并排序：

$$R_{ij}^{0}=\begin{cases}TP_{ij}^{m} & t_{ij}=0\\ TP_{ij}^{m}/t_{ij} & t_{ij}>0\end{cases} \tag{12}$$

如果产品 i 未占用 j 资源($t_{ij}=0$)，则按有效产出

进行排序,显然,不占用瓶颈资源的产品优先级高于占用瓶颈资源的产品优先级。产品优先级排序后,记产品优先级次序为 $P_{(NJ)}=\{P_{(1j)},P_{(2j)},\cdots,P_{(nj)}\}$,相应地,记 $y^{\mathrm{m}}_{(i)}$ 为对应 $P_{(NJ)}$ 集合中优先级为 i 产品的自制优化得到的数量。

② 根据产品优先级由高到低次序依次增大产品自制的数量。

$$\Delta y_{(i)j}=\min\left\{(d_i-y^{\mathrm{m}}_{(i)}),\mathrm{int}\left[\frac{\Delta\beta_{(i-1)j}}{t_{(i)j}}\right]\right\} \tag{13}$$

$$\Delta\beta_{kj}=\left[\beta_j-\sum_{i=1}^{n}(y^{\mathrm{m}}_i t_{ij})-\sum_{f=0}^{k}\Delta\beta_{fj}\right]^{+} \quad (k=0,1,\cdots,n) \tag{14}$$

式中:$\Delta y_{(i)j}$ 为利用剩余能力在 j 资源上增加的自制优先级为 i 的产品的数量。显然,对瓶颈资源其为 0,非瓶颈资源不小于 0;$\mathrm{int}[x]$为取整函数,表示不超过 x 的最大整数;$[\cdot]^{+}$ 为$\max(0,\cdot)$,为非线性函数;$\Delta\beta_{kj}$ 为 j 资源上剩余能力经过 k 次分配后仍然剩余的能力。

特别地,当 $k=0$ 时,$\Delta\beta_{0j}$ 表示仅考虑自制产品优化后,但 j 资源未进行二次分配的剩余能力。

$$\Delta\beta_{0j}=\left[\beta_j-\sum_{i=1}^{n}(y^{\mathrm{m}}_i t_{ij})\right]^{+} \tag{15}$$

③ 计算资源 j 上各产品的自制加工数量。

$$y^{\mathrm{m}}_{(i)j}=y^{\mathrm{m}}_{(i)}+\Delta y_{(i)j} \tag{16}$$

式中:$y^{\mathrm{m}}_{(i)j}$ 为对应 $P_{(NJ)}$ 集合中优先级为 i 的产品在 j 资源上实际自制加工数量。

显见,$y^{\mathrm{m}}_{ij}\in\mathbf{Z}^{+}$,$i\in N$,$j\in M$,符合外协完整工序整数倍假设。另外,由于 $\Delta y_{(i)j}\geqslant 0$,不等式 $y^{\mathrm{m}}_{(i)j}\geqslant y^{\mathrm{m}}_{(i)}$ 显然成立。

依次循环步骤①~步骤③,得到所有资源上各产品的实际自制加工数量 y^{m}_{ij},则自制有效产出 TP'为

$$\mathrm{TP}'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y^{\mathrm{m}}_{ij}\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij}) \tag{17}$$

(3) 考虑外协能力进行产品组合优化

非瓶颈剩余能力再利用后,j 资源上必须外协$(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})$数量的 i 产品方可满足用户的需求。则外协的有效产出 TP''为

$$\mathrm{TP}''=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})\mathrm{TP}^{\mathrm{w}}_{ij}] \tag{18}$$

将式(6)代入,TP''可简化为

$$\mathrm{TP}''=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij}]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})\delta_{ij}w_{ij}] \tag{19}$$

考虑到$(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})$值已明确确定了 δ_{ij} 的值,因此 TP''中省略了 δ_{ij} 项,则有

$$\mathrm{TP}''=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij}]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})w_{ij}] \tag{20}$$

则先考虑自制再考虑外协的有效产出$(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}$ 为

$$\begin{aligned}(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}&=\mathrm{TP}'+\mathrm{TP}''=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y^{\mathrm{m}}_{ij}\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij})+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij}]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})w_{ij}]=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(d_i\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{ij})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y^{\mathrm{m}}_{ij})w_{ij}]=\\&\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{i}\sum_{j=1}^{m}\eta_{ij}-d_i\sum_{j=1}^{m}w_{ij}+\sum_{j=1}^{m}(y^{\mathrm{m}}_{ij}w_{ij})\right]=\\&\sum_{i=1}^{n}\left[d_i(\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{i}-w_i)+\sum_{j=1}^{m}y^{\mathrm{m}}_{ij}w_{ij}\right]=\\&\sum_{i=1}^{n}\left[d_i(\mathrm{TP}^{\mathrm{m}}_{i}-p^{\mathrm{o}}_i)+\sum_{j=1}^{m}y^{\mathrm{m}}_{ij}w_{ij}\right]=\\&\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\mathrm{TP}^{\mathrm{b}}_{i}+\sum_{j=1}^{m}y^{\mathrm{m}}_{ij}w_{ij}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

1.4 新型 TOC 运作逻辑下建模

根据新型 TOC 运作逻辑[14],在确定产品组合优化的开始阶段,就考虑瓶颈产能拓展的规划以及产能拓展的代价,采用自制/外协集成优化策略以使系统有效产出整体最优,得到 TOC 产品组合优化模型,记为模型Ⅱ。其 TP 表达为

$$\mathrm{TP}=\sum_{i=1}^{n}(d_i p_i-\mathrm{TVE}_i) \tag{22}$$

$$\mathrm{TVE}_i=d_i m_i+\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y_{ij})w_{ij}] \tag{23}$$

式中:TVE_i 为单位产品 i 的纯变动费用,包括原材料成本、零部件的外购成本和外协成本。

将 TVE_i 代入 TP 中,有

$$\mathrm{TP}=\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}^{\mathrm{b}}_i+\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}w_{ij})\right] \tag{24}$$

由于 d_i 和 $\mathrm{TP}^{\mathrm{b}}_i$ 均为常数,则模型Ⅱ可建模为

$$\max\ \mathrm{TP}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}w_{ij}) \tag{25}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}t_{ij})\leqslant\beta_j & j\in M\\ l_i\leqslant y_{ij}\leqslant d_i & i\in N\\ y_{ij}\in\mathbf{Z}^{+} & i\in N\end{cases} \tag{26}$$

显见，资源 j 上花费时间越小，外协成本越高，其自制的机会越大。

设 y_{ij}^{w} 为考虑外协的 TOC 产品组合自制最优解，则其有效产出 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}$ 为

$$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})\right] \tag{27}$$

2　模型比较

分析不同优化策略、不同制造模式情形下所建模型的有效产出，进而得出最佳优化策略以及最佳能力拓展方式。其中，外包模式下建模以及有效产出见文献[11]。

2.1　不同优化策略、同一制造模式 TP 比较

针对工序外协制造模式，比较采用独立优化策略和集成优化策略两种情形下有效产出。从模型Ⅰ与模型Ⅱ优化后 TP 数学表达入手，通过分析发现：两 TP 形式均是一致的，但其结果却不一定一致。原因就在于 y_{ij} 的求解上，而 y_{ij} 的确定与其权重和约束有关。

(1) 目标函数中权重的比较

模型Ⅰ将自制/外协分开考虑，y_{ij} 根据式(16)得到，涉及到 y_i 和 Δy_{ij} 两项：① y_i 根据式(9)和式(10)最优化得到，y_i 与 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}$ 成正比关系。而由式(1)知，$\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}$ 与 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 成正比，因此 y_i 与 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 成正比关系；②Δy_{ij} 根据自制产品优先级 R_{ij}^{0} 由高到低进行剩余能力二次分配得到，R_{ij}^{0} 也与 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 成正比关系。因此，模型Ⅰ的最优值仅与 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}$ 有关。

模型Ⅱ将自制/外协集成考虑，y_{ij} 是根据式(25)和式(26)最优化得到的。模型Ⅱ的目标中考虑的是 w_{ij}，根据式(2)知，w_{ij} 不仅与 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{m}}$ 有关，还与外协产品的有效产出 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}$ 有关。

(2) 约束比较

通过对式(10)和式(26)的比较，显见，模型Ⅰ和模型Ⅱ两者约束基本一致，只不过模型Ⅰ的 $y_{ij}\equiv y_i,\forall j$。

因此，在两模型约束都一致的情况下，优化目标中不同的权重系数很可能导致不同的 y_{ij} 解，即模型Ⅰ得到的最优解 y_{ij}^{m} 和模型Ⅱ得到的最优解 y_{ij}^{w} 不一定相等。

定理 1　$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}\geqslant(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$。

证明　考虑到 y_{ij}^{w} 为模型Ⅱ的最优解，则对 $\forall y_{ij}$，都有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})$ 最大，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}w_{ij})\quad\forall y_{ij} \tag{28}$$

将模型Ⅰ的最优解 y_{ij}^{m} 代入式(28)，依然有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{m}}w_{ij}) \tag{29}$$

两边同时加上一个常数 $\sum_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}})$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})\right]\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{m}}w_{ij})\right] \tag{30}$$

考虑到 $p_i^{\mathrm{o}}=w_i,\forall i,(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\left[(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}})+\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{m}}w_{ij})\right]$，因此：$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}\geqslant(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$。

令 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{w}}=[y_{ij}^{\mathrm{w}}]_{n\times m}$，$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}=[y_{ij}^{\mathrm{m}}]_{n\times m}$，$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]_{n\times m}$，则 $\boldsymbol{W}$ 为任意一矩阵时，$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{w}}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}$ 为 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{w}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ 成立的充要条件。事实上，在 j 资源上外协加工单位产品 i 的单位成本 w_{ij} 随着不同外协单位具有不同成本。显然，$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}=(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$ 成立的充要条件为：$y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_{ij}^{\mathrm{m}}$。根据式(16)有：$y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_i^{\mathrm{m}}+\Delta y_{ij}$，要使 $y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_{ij}^{\mathrm{m}}$，存在 3 种情况：

① $\Delta y_{ij}\equiv0,\forall j$，即所有资源能力均有剩余，无需外协。

② $y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_i^{\mathrm{m}}$，且 $\Delta y_{ij}=0,\forall i,j$。

针对瓶颈资源，根据 Δy_{ij} 定义，瓶颈资源为 0，所以瓶颈资源上显然有 $y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_i^{\mathrm{m}}$，且 $\Delta y_{ij}=0$。

针对非瓶颈资源，y_{ij}^{w} 是根据式(25)和式(26)最优化得到的，y_i^{m} 是根据式(9)和式(10)最优化得到的，因此，要使 y_{ij}^{w} 和 y_i^{m} 相等，必须要使两者优化模型的约束一致，目标函数一致。则：(Ⅰ) $y_{ij}=y_i,\forall j$；且(Ⅱ) $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}=\sum_{j=1}^{m}(\delta_{ij}w_{ij}),\forall i$。

条件(Ⅰ)表示产品的所有工序进行完全外协，此种情形转化为外包模式。条件(Ⅱ)可根据式(5)简化为 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{p}}$。又根据式(7)，有

$$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}=\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{p}}=0 \tag{31}$$

而式(31)成立存在两个前提：

(a) $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}\equiv0,\forall j$。即从自制商角度出发，任何工序的外协对企业均无利润可言，这与题设不符。

(b) $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}$ 不全等于 0，但其总和 $\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}=0$ 或 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}=0$。即从企业角度出发，有些工序的外协

对企业无利润,有些有利润。

因此,情况②可总结为:虽然部分资源(非瓶颈)能力有剩余,但当且仅当产品所有工序进行完全外协(即为外包模式),而且外协对企业无任何利润可言时,自制外协独立优化与集成优化两者优化策略得到的效果才可能一致。

③ $\Delta y_{ij}\neq 0$,即 $y_{ij}^{\mathrm{w}}>y_i^{\mathrm{m}}$,但 $y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_i^{\mathrm{m}}+\Delta y_{ij}$。

情况③为部分资源能力有剩余,并且非瓶颈进行过二次剩余能力分配后,自制数量恰好与模型Ⅱ集成优化后自制数量相等,其中当然包括瓶颈资源上的自制数量。根据 Δy_{ij} 定义,瓶颈资源为 0,所以瓶颈资源上 $y_{ij}^{\mathrm{w}}=y_i^{\mathrm{m}}$。而 y_i^{m} 完全由式(9)和式(10)决定,y_{ij}^{w} 完全由式(25)和式(26)决定。分析两模型发现,针对瓶颈资源,两模型约束一致,但权重 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}$ 与 w_{ij} 并不一致。推理如下:

$$\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_{ij}=\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_i t_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}=\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-p_i^{\mathrm{o}}t_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}=\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\mathrm{TP}_i^{\mathrm{o}}t_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}$$

根据外包模型假设[11]与外协模型假设,$\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\mathrm{TP}_i^{\mathrm{o}}\geqslant 0$,而 $1\geqslant t_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}\geqslant 0$,因此 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_{ij}\geqslant 0$。

如果 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_{ij}>0$,则自制外协独立优化与集成优化两者优化策略得到的结果肯定不一致。

如果 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_{ij}=0$,瓶颈上自制数量肯定相等,出现这种情况仅有:(Ⅰ)$\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\mathrm{TP}_i^{\mathrm{o}}=0$;且(Ⅱ)$t_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{m}t_{ij}=1$ 才成立。而条件(Ⅰ)表明自制/外包有效产出一致,利润对等;条件(Ⅱ)说明系统仅有单瓶颈,且系统为单机生产。两条件均成立时才有效,而这种情况在企业中很少存在,所以情况③一般不成立。[证毕]

推论 1 当 $\Delta y_{ij}=0,\forall i,j$,且 $y_{ij}=y_i,\forall j$,且 $\sum_{j=1}^{m}\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}=0,\forall j$ 时,先进行自制再进行外协分开决策与自制/外协统一规划效果一致,也只有在这种情况下,传统 TOC 运作逻辑考虑外协能力拓展时,不会出现产品组合规划的保守和接单的损失。

推论 2 当 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}\leqslant 0,\forall i,j$,即企业进行任何工序外协均无利可图时,企业宁可以现有能力进行生产也不会为了满足客户需求而盲目进行亏损外协。

推论 3 当部分 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}$ 小于 0,企业并非不能进行工序外协,只要 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(d_i-y_{ij})\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}]\geqslant 0$,企业就可以考虑工序外协进行能力拓展。

推论 2 和推论 3 可以作为企业是否考虑工序外协进行能力拓展的理论依据。

推论 4 当 $\mathrm{TP}_{ij}^{\mathrm{w}}\geqslant 0,\forall i,j$,虽然采用工序外协可以获利,但采用各自独立优化策略得到的结果肯定不优于采用集成优化得到的结果。

通过定理 1 的证明,本文得到:采用自制/工序外协独立优化策略得到的 TOC 产品组合不优于采用自制/外协集成优化策略得到的 TOC 产品组合。从另一方面,此证明也说明了传统 TOC 产品组合优化逻辑存在的问题:可能造成产品组合规划保守和接单损失,必须提前进行规划,考虑自制和工序外协的集成优化。

推论 5 $(\mathrm{TP}_X)^{\mathrm{I}}\geqslant(\mathrm{TP}_X)^{\mathrm{R}}$,$X=\{\mathrm{w},\mathrm{o}\}$。

综合外包模式下自制/外包集成优化策略定理[11]以及定理 1 可得。即同一制造模式下,不论产品外包或工序外协,集成优化策略都不差于独立优化策略。

2.2 同一优化策略、不同制造模式 TP 比较

针对独立优化或集成优化同一优化策略,本节对自制/外包与自制/外协两种制造模式下 TP 分别进行分析比较。

(1) 独立优化策略下 TP 比较

针对独立优化策略,自制/外包与自制/外协两种制造模式下 TP 比较,有定理如下:

定理 2 $(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}\geqslant(\mathrm{TP}_{\mathrm{o}})^{\mathrm{R}}$。当且仅当 $y_{ij}=y_i,\forall j,i$ 时,$(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}=(\mathrm{TP}_{\mathrm{o}})^{\mathrm{R}}$。

证明 由式(21)知,$(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}$ 为

$$(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\Big(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+\sum_{j=1}^{m}y_{ij}^{\mathrm{m}}w_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\sum_{j=1}^{m}(d_i-y_{ij}^{\mathrm{m}})w_{ij}\Big] \tag{32}$$

又 $y_{ij}^{\mathrm{m}}\geqslant y_i^{\mathrm{m}}\geqslant 0$,所以 $d_i-y_i^{\mathrm{m}}\geqslant d_i-y_{ij}^{\mathrm{m}}\geqslant 0$。

而 $w_{ij}\geqslant 0,\forall j,i$,则有

$$\begin{aligned}(\mathrm{TP}_{\mathrm{w}})^{\mathrm{R}}&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\Big[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-\sum_{j=1}^{m}(d_i-y_i^{\mathrm{m}})w_{ij}\Big]=\\&\sum_{i=1}^{n}[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-(d_i-y_i^{\mathrm{m}})w_i]=\\&\sum_{i=1}^{n}[y_i^{\mathrm{m}}w_i+d_i(\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-w_i)]=\\&\sum_{i=1}^{n}[y_i^{\mathrm{m}}w_i+d_i(\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}}-p_i^{\mathrm{o}})]=\\&\sum_{i=1}^{n}(y_i^{\mathrm{m}}w_i+d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}})\end{aligned} \tag{33}$$

采用自制/外包独立优化策略时,其有效产出 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$ 为[11]

$$(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n}[y_i^{\mathrm{m}}\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}} + (d_i - y_i^{\mathrm{m}})\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}] = \sum_{i=1}^{n}(y_i^{\mathrm{m}}w_i + d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}) \tag{34}$$

对比式(33)与式(34),显然有

$$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}} \geqslant (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}} \tag{35}$$

式(35)等号成立的充要条件为:若 $y_{ij}^{\mathrm{m}} = y_i^{\mathrm{m}}$,$\forall j,i$,$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}} = (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$。即每个产品若要外协则其所有工序都完全外协,即转化为外包模式,则采用自制/外包独立优化 TP 和采用自制/外协独立优化 TP 两者显然相等。[证毕]

(2) 集成优化策略下 TP 比较

针对集成优化策略,自制/外包与自制/外协两种制造模式下 TP 比较,有定理如下:

定理 3　$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}} \geqslant (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$。当且仅当 $y_{ij} = y_i$,$\forall j,i$ 时,$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}} = (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$。

证明　采用自制/外包集成优化策略时,设 y_i^{c} 为采用自制/外包集成优化策略下产品 i 自制的最优解,则其有效产出 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 为[11]

$$(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + y_i^{\mathrm{c}}p_i^{\mathrm{o}}) \tag{36}$$

考虑到 y_{ij}^{w} 为考虑自制/外协集成优化模型下产品 i 自制的最优解,则对 $\forall y_{ij}$ 都有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})$ 最大,即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij}) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}w_{ij}) \quad \forall y_{ij} \tag{37}$$

将自制/外包集成优化模型下产品的最优解 y_i^{c} 代入式(37)中,依然有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij}) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_i^{\mathrm{c}}w_{ij}) \tag{38}$$

两边同时加上一个常数 $\sum_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}})$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + \sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{w}}w_{ij})\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + \sum_{j=1}^{m}(y_i^{\mathrm{c}}w_{ij})\right] \tag{39}$$

由题设 $p_i^{\mathrm{o}} = w_i$,$\forall i$,以及式(27)和式(36),有 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}} \geqslant (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$。

$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}} \geqslant (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 等号成立的充要条件为:两模型约束、目标函数均一致。

比较自制/外包集成优化模型[11]与自制/外协集成优化模型,若条件(Ⅰ)$y_{ij} = y_i$,$\forall j$;(Ⅱ)$\mathrm{TP}_i^{\mathrm{o}} = \sum_{j=1}^{m}(\delta_{ij}w_{ij})$ 成立,则 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}} \geqslant (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 等号成立。

由于 $\mathrm{TP}_i^{\mathrm{o}} = p_i^{\mathrm{o}}$,则条件(Ⅱ)简化为 $p_i^{\mathrm{o}} = \sum_{j=1}^{m}(\delta_{ij}w_{ij})$。

根据题设有 $p_i^{\mathrm{o}} = w_i$,$\forall i$,则 $w_i = \sum_{j=1}^{m}w_{ij} = \sum_{j=1}^{m}(\delta_{ij}w_{ij})$,即 $\delta_{ij} = 1$,$\forall j$。

条件(Ⅰ)(Ⅱ)都表示:产品 i 若要外协其所有工序都完全外协,即转化为外包模式,则采用自制/外包集成优化 TP 和采用自制/外协集成优化 TP 两者显然相等。[证毕]

推论 6　$(\mathrm{TP_w})^X \geqslant (\mathrm{TP_o})^X$,$X = \{\mathrm{R},\mathrm{I}\}$。当且仅当 $y_{ij} = y_i$,$\forall j,i$ 时,$(\mathrm{TP_w})^X = (\mathrm{TP_o})^X$。

综合定理 2、定理 3 可得,采用同一优化策略(独立优化或者集成优化)时,自制/外协制造模式的有效产出不差于自制/外包制造模式的有效产出。当且仅当产品所有工序进行完全外协(即为外包模式)时,两制造模式得到的有效产出才可能一致。

2.3　不同优化策略、不同制造模式 TP 比较

针对不同优化策略,不同制造模式下 TP 比较,有定理如下:

定理 4　$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$ 不一定大于 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$。

证明

(1) 在自制/外包制造模式下,采用不同优化策略的有效产出 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 和 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$ 存在以下关系[11]:

$$(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}} - (\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n}y_i^{\mathrm{c}}p_i^{\mathrm{o}} - \sum_{i=1}^{n}y_i^{\mathrm{m}}p_i^{\mathrm{o}} \geqslant 0 \tag{40}$$

(2) 自制/外协独立优化策略下有效产出

根据式(21)、式(16)有:

$$\begin{aligned}(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}} &= \sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + \sum_{j=1}^{m}(y_{ij}^{\mathrm{m}}w_{ij})\right] = \\ &\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + y_i^{\mathrm{m}}\sum_{j=1}^{m}w_{ij} + \sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\right] = \\ &\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + y_i^{\mathrm{m}}w_i + \sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\right] = \\ &\sum_{i=1}^{n}\left[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}} + y_i^{\mathrm{m}}p_i^{\mathrm{o}} + \sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\right]\end{aligned} \tag{41}$$

(3) 不同资源能力情形的比较

① 当所有资源均为非瓶颈

(a) 自制/外包独立优化

设 y_i^{m} 为仅考虑自制优化的最优解，因为所有资源均为非瓶颈，则 $y_i^{\mathrm{m}}=d_i$，则再考虑外协，得到 $\Delta y_{ij}\equiv 0,\ \forall i,j$。则 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}=\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+d_i p_i^{\mathrm{o}})=\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}})$。

(b) 自制/外包集成优化

考虑到所有资源能力均满足负荷要求，因此，其自制最优解 $y_i^{\mathrm{c}}=d_i$，则 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}=\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{m}})$。

显然有：若 $\beta_j-\sum\limits_{i=1}^{n}d_i t_{ij}\geqslant 0,\ \forall j$，则 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}=(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$。

② 当部分设备为非瓶颈

$$\begin{aligned}&(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}=\\&\sum_{i=1}^{n}\Big[d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+y_i^{\mathrm{m}}p_i^{\mathrm{o}}+\sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\Big]-\\&\sum_{i=1}^{n}(d_i\mathrm{TP}_i^{\mathrm{b}}+y_i^{\mathrm{c}}p_i^{\mathrm{o}})=\\&\sum_{i=1}^{n}(y_i^{\mathrm{m}}p_i^{\mathrm{o}})-\sum_{i=1}^{n}(y_i^{\mathrm{c}}p_i^{\mathrm{o}})+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\end{aligned}\tag{42}$$

根据式(40)可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})-[(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}]\end{aligned}\tag{43}$$

式中：$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\geqslant 0$，$(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}\geqslant 0$，因此 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 存在 3 种结果：

(a) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})>(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}-(\mathrm{TP_o})^{R}$，$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}>0$。

(b) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})=(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$，$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}=0$。

(c) 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})<(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$，$(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}-(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}<0$。

结论(b)中等号成立的条件分为两种：

第 1 种是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})=0$，当 $\Delta y_{ij}\geqslant 0$，$w_{ij}>0$，则必有 $\Delta y_{ij}=0$，即所有资源能力均有剩余，与当所有设备均为非瓶颈时情形一致。

第 2 种是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(\Delta y_{ij}w_{ij})\neq 0$，$\Delta y_{ij}\geqslant 0$，部分资源能力有剩余。即只有当自制/外包制造模式下集成优化与独立优化之间有效产出的差值等于根据非瓶颈剩余能力二次分配得到产品的外协有效产出时，自制/外协独立优化与自制/外包集成优化两者得到的有效产出才一致。

推论 7　自制/外包制造模式是自制/工序外协制造模式的简化。

3　算例分析

3.1　单瓶颈算例

本文修改了文献[10]算例(3 产品×4 资源)，其仅增加了 p_i^{o} 和 w_{ij}，其中 $w_{ij}=p_i^{\mathrm{o}}t_{ij}\Big/\sum\limits_{j=1}^{m}t_{ij}$，如表 1 所示。表中：$P_1\sim P_3$ 代表产品；$R_1\sim R_4$ 代表资源；β_j 为加工中心 j 正常的可用加工时间。

表 1　Coman and Ronen (2000)算例修改 1

Table 1　Example 1 modified from Coman & Ronen (2000)

产品	d_i	p_i	m_i	p_i^{o}	w_{ij}				t_{ij}/min			
					R_1	R_2	R_3	R_4	R_1	R_2	R_3	R_4
P_1	100	130	40	29	2.64	15.82	5.27	2.27	2	12	4	4
P_2	100	150	40	26	3.25	9.75	8.13	9.87	4	12	10	6
P_3	100	190	40	57	14.53	20.13	11.17	11.17	13	18	10	10
				β_j	(j=1,2,3,4)				2 400			

(1) 采用自制/外包独立优化策略的 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为 $1P_1^{\mathrm{m}}-100P_2^{\mathrm{m}}-66P_3^{\mathrm{m}}$，则外包的产品组合为 $99P_1^{\mathrm{o}}-0P_2^{\mathrm{o}}-34P_3^{\mathrm{o}}$，得到的 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{R}}$ 为 30 191。

(2) 采用自制/外包集成优化策略的 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$

自制/外包集成优化的最优解为：$50P_1^{\mathrm{m}}-0P_2^{\mathrm{m}}-100P_3^{\mathrm{m}}$，$50P_1^{\mathrm{o}}-0P_2^{\mathrm{o}}-0P_3^{\mathrm{o}}$，得到的 $(\mathrm{TP_o})^{\mathrm{I}}$ 为 30 950。

(3) 采用自制/外协独立优化策略的 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为 $1P_1^{\mathrm{m}}-100P_2^{\mathrm{m}}-66P_3^{\mathrm{m}}$，则通过非瓶颈剩余能力的二次分配，根据式(12)～式(16)，得到产品组合解 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}$ 为 $\begin{bmatrix}100&1&100&100\\100&100&100&100\\100&66&100&100\end{bmatrix}$，根据式(21)得到 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{R}}$ 为 33 249.4。

(4) 采用自制/外协集成优化策略的 $(\mathrm{TP_w})^{\mathrm{I}}$

自制/外协集成优化的最优解 $\boldsymbol{Y}^{w}$ 为 $\begin{bmatrix}100 & 100 & 100 & 100\\100 & 1 & 100 & 100\\100 & 66 & 100 & 100\end{bmatrix}$，根据式(27)得到$(TP_w)^I$ 为 33 850.33。

在此算例中，$(TP_w)^I \geqslant (TP_w)^R$，与定理 1 结论相吻合；$(TP_w)^R \geqslant (TP_o)^R$，与定理 2 结论相吻合；$(TP_w)^I \geqslant (TP_o)^I$，与定理 3 结论相吻合。另外，在本算例中，$(TP_w)^R \geqslant (TP_o)^I$。

3.2　多瓶颈算例 1

考虑到文献[10]算例为单瓶颈情形，本文通过修改各产品在不同资源上的加工时间 t_{ij}，将其修改为多瓶颈情形，并重新计算了 w_{ij}，如表 2 所示。

(1) 采用自制/外包独立优化策略的$(TP_o)^R$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为 $100P_1^m-100P_2^m-0P_3^m$，则外包的产品组合为 $0P_1^o-0P_2^o-100P_3^o$，得到的$(TP_o)^R$ 为 29 300。

(2) 采用自制/外包集成优化策略的$(TP_o)^I$

自制/外包集成优化的最优解为：$100P_1^m-9P_2^m-42P_3^m$，$0P_1^o-91P_2^o-58P_3^o$，得到的$(TP_o)^I$ 为 29 328。

(3) 采用自制/外协独立优化策略的$(TP_w)^R$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为 $100P_1^m-100P_2^m-0P_3^m$，则通过非瓶颈剩余能力的二次分配，根据式(12)～式(16)，得到产品组合 $\boldsymbol{Y}^{m}$ 为 $\begin{bmatrix}100 & 100 & 100 & 100\\100 & 100 & 100 & 100\\100 & 0 & 12 & 80\end{bmatrix}$，根据式(21)得到$(TP_w)^R$ 为 30 715.88

(4) 采用自制/外协集成优化策略的$(TP_w)^I$

自制/外协集成优化的最优解 $\boldsymbol{Y}^{w}$ 为 $\begin{bmatrix}100 & 100 & 100 & 100\\100 & 0 & 22 & 83\\100 & 46 & 100 & 100\end{bmatrix}$，根据式(27)得到$(TP_w)^I$ 为 32 243.45。

在此算例中，$(TP_w)^I \geqslant (TP_w)^R$，与定理 1 结论相吻合；$(TP_w)^R \geqslant (TP_o)^R$，与定理 2 结论相吻合；$(TP_w)^I \geqslant (TP_o)^I$，与定理 3 结论相吻合。另外，在本算例中，$(TP_w)^R \geqslant (TP_o)^I$。

3.3　多瓶颈算例 2

考虑到表 1 算例、表 2 算例得到的结果都是$(TP_w)^R \geqslant (TP_o)^I$，仅修改了表 2 算例的 β_j，如表 3 所示，以验证定理 4 结论。

(1) 不同制造模式与不同优化策略下有效产出的比较

① 采用自制/外包独立优化策略的$(TP_o)^R$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为 $100P_1^m-19P_2^m-37P_3^m$，则外包的产品组合为 $0P_1^o-81P_2^o-63P_3^o$，得到的$(TP_o)^R$ 为 29 303。

② 采用自制/外包集成优化策略的$(TP_o)^I$

自制/外包集成优化的最优解为：$100P_1^m-9P_2^m-42P_3^m$，$0P_1^o-91P_2^o-58P_3^o$，得到的$(TP_o)^I$ 为 29 328。

③ 采用自制/外协独立优化策略的$(TP_w)^R$

仅考虑自制的产品组合优化的最优解为

表 2　Coman and Ronen (2000)算例修改 2

Table 2　Example 2 modified from Coman & Ronen (2000)

产品	d_i	p_i	m_i	p_i^o	w_{ij}				t_{ij}/min			
					R_1	R_2	R_3	R_4	R_1	R_2	R_3	R_4
P_1	100	130	40	29	5.80	13.92	4.64	4.64	5	12	4	4
P_2	100	150	40	26	6.15	5.67	8.51	5.67	13	12	18	12
P_3	100	190	40	57	4.06	26.47	16.29	10.18	4	26	16	10
β_j $(j=1,2,3,4)$									2 400			

表 3　Coman and Ronen (2000)算例修改 3

Table 3　Example 3 modified from Coman & Ronen (2000)

产品	d_i	p_i	m_i	p_i^o	w_{ij}				t_{ij}/min			
					R_1	R_2	R_3	R_4	R_1	R_2	R_3	R_4
P_1	100	130	40	29	5.80	13.94	4.64	4.64	5	12	4	4
P_2	100	150	40	26	6.15	5.67	8.51	5.67	13	12	18	12
P_3	100	190	40	57	4.06	26.47	16.29	10.18	4	26	16	10
β_j $(j=1,2,3,4)$									903	2 400	1 350	1 000

$100P_1^m-19P_2^m-37P_3^m$，则通过非瓶颈剩余能力的二次分配，根据式(12)～式(16)，得到产品组合 $\boldsymbol{Y}^m$ 为 $\begin{bmatrix}100 & 100 & 100 & 100\\ 19 & 19 & 19 & 19\\ 39 & 37 & 38 & 37\end{bmatrix}$，根据式(21)得到 $(TP_w)^R$ 为 29 327.41。

④ 采用自制/外协集成优化策略的 $(TP_w)^I$

自制/外协集成优化的最优解 $\boldsymbol{Y}^w$ 为 $\begin{bmatrix}100 & 100 & 97 & 100\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 100 & 46 & 60 & 60\end{bmatrix}$，根据式(27)得到 $(TP_w)^I$ 为 29 897.90。

在此算例中，$(TP_w)^I\geqslant(TP_w)^R$，与定理1结论相吻合；$(TP_w)^R\geqslant(TP_o)^R$，与定理2结论相吻合；$(TP_w)^I\geqslant(TP_o)^I$，与定理3结论相吻合。另外，在表3算例中，$(TP_w)^R\leqslant(TP_o)^I$。结合表1算例、表2算例，验证了定理4的结论。

(2) 不同制造模式与不同优化策略下设备利用率的比较

将不同制造模式与不同优化策略下的设备平均利用率和有效产出进行对比，如表4所示。通过对比，可以发现：

① 针对同一制造模式(自制/外包、自制/外协)，采用集成优化策略得到的有效产出高、但设备平均利用率低。此结论说明集成优化策略是以尽可能少的资源得到尽可能大的有效产出。

② 同一优化策略下，自制/外协制造模式得到的有效产出、设备平均利用率均高于自制/外包制造模式。此结论说明以“单位工序”为组合优化的最小粒度比以“单位产品”为组合优化的最小粒度进行能力拓展更能提高企业设备平均利用率、增加企业整体有效产出。

③ 不论采用何种优化策略，采用自制/外协制造模式得到的设备平均利用率明显高于采用自制/外包制造模式。此结论说明自制/外协模式较好地利用了所有设备的利用率，使其平均利用率提高。

表4 表3算例设备平均利用率、有效产出比较

Table 4 Comparison of mean equipment utilization ratio and overall throughput of Example 3

混合描述	自制/外包		自制/外协	
	独立优化	集成优化	独立优化	集成优化
有效产出	29 303	29 328	29 327.41	29 897.90
设备平均利用率/%	99.328 1	92.785 0	99.845 8	99.838 2

4 结 论

针对“单位产品”级粗粒度的产品组合优化时，仅考虑极少数瓶颈设备的能力提升、忽略大多数非瓶颈的剩余能力、且对瓶颈和非瓶颈“一视同仁”进行能力提升而造成产品规划保守和接单损失等问题，提出“单位工序”级细粒度的产品组合优化方法。一方面是对“产品级”产品组合优化问题的延伸，另一方面是改进传统优化策略中缺乏与后续生产协同的不足，提前考虑产能提升，并提前进行自制和外协的集成优化，以使企业设备平均利用率最高、整体有效产出最优、市场需求满意度最好。

从自制商角度和外协商角度分别定义了外协有效产出，并推导了工序外协和产品外包两种不同制造模式下有效产出的关系。基于两种TOC运作逻辑，根据独立优化和集成优化两种优化策略，构建了考虑工序外协的TOC产品组合优化的两种数学模型，通过对两种优化策略、两种制造模式得到的TOC产品组合有效产出进行分析证明，得到：①不同优化策略、同一制造模式下，集成优化得到的TOC产品组合有效产出不差于独立优化策略；②同一优化策略、不同制造模式下，工序外协制造模式得到的TOC产品组合有效产出不差于产品外包有效产出，证明了“工序级”产品组合优化能解决传统“产品级”产品组合优化产生的规划保守和接单损失的问题；③不同制造模式、不同优化策略情形下，采用独立优化策略的工序外协有效产出不一定大于采用集成优化策略的产品外包有效产出。最后通过单瓶颈、多瓶颈算例分析验证了模型以及定理的有效性。

得到的定理和推理不仅为实际工序外协提供决策依据，而且为后续新型仿生算法构建与缩短进化时间提供理论支撑。后续研究将考虑超产/欠产、需求多变、产品间关联等情形，进行多目标产品组合优化决策研究。另外，考虑到工序外协优化问题和产品外包、自制优化问题存在一定的继承和发展，后续将研究自制、外包、工序外协3种制造模式下统一的产品组合优化数学模型。考虑到实际问题规模较大，将研究新型仿生算法进行优化求解。

参 考 文 献

[1] Watson K J, Blackstone J H, Gardiner S C. The evolution of a management philosophy: the theory of constraints

[J]. Journal of Operations Management, 2007, 25(2): 387-402.

[2] Gupta M. Constraints management—recent advances and practices [J]. International Journal of Production Research, 2003, 41(4): 647-659.

[3] Bhattacharya A, Vasant P, Sarkar B. A fully fuzzified, intelligent theory-of-constraints product-mix decision[J]. International Journal of Production Research, 2008, 46 (3): 789-815.

[4] Hasuike T, Ishii H. On flexible product-mix decision problems under randomness and fuzziness[J]. Omega, 2009, 37(4): 770-787.

[5] Singh R K, Prakash, Kumar S, et al. Psycho-clonal based approach to solve a TOC product mix decision problem [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 29(11-12): 1194-1202.

[6] Bhattacharya A, Vasant P, Sarkar B. A fully fuzzified, intelligent theory-of-constraints product-mix decision[J]. International Journal of Production Research, 2008, 46 (3): 789-815.

[7] Hasuike T, Ishii H. On flexible product-mix decision problems under randomness and fuzziness[J]. Omega, 2009, 37(4): 770-787.

[8] Wang J Q, Sun S D, Si S B, et al. Theory of constraints product mix optimisation based on immune algorithm[J]. International Journal of Production Research, 2009, 47 (16): 4521-4543.

[9] Tsai W H, Lai C W. Outsourcing or capacity expansions: Application of activity-based costing model on joint products decisions[J]. Computers & Operations Research, 2007, 34(12): 3666-3681.

[10] Coman A, Ronen B. Production outsourcing: a linear programming model for the theory-of-constraints[J]. International Journal of Production Research, 2000, 38(7): 1631-1639.

[11] 王军强, 孙树栋, 李翌辉. 考虑外包能力拓展的 TOC 产品组合优化研究(I) [J]. 系统仿真学报, 2006, 18(11): 3287-3293.
Wang Junqiang, Sun Shudong, Li Yihui. TOC product mix optimization with the extending capacity of outsourcing—Part I: modeling[J]. Journal of System Simulation, 2006, 18(11): 3287-3293. (in Chinese)

[12] 王军强, 孙树栋. 考虑外包混合形式的 TOC 产品组合优化研究[J]. 航空学报, 2007, 28(5): 1216-1229.
Wang Junqiang, Sun Shudong. The multiform hybrid decision for TOC product mix optimization with the extending capacity of outsourcing based on immune algorithm [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28 (5): 1216-1229. (in Chinese)

[13] 王军强, 孙树栋, 张树生. 考虑外包形式受限的约束理论产品组合优化研究[J]. 计算机集成制造系统, 2007, 13 (10): 1891-1902.
Wang Junqiang, Sun Shudong, Zhang Shusheng. Theory of constraints product mix optimization considering outsourcing form constrained [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2007, 13(10): 1891-1902. (in Chinese)

[14] 王军强, 孙树栋, 于晓义, 等. TOC 产品组合优化新型运作逻辑研究[J]. 计算机集成制造系统, 2007, 13(5): 931-939.
Wang Junqiang, Sun Shudong, Yu Xiaoyi, et al. A new TOC operational logic for product mix optimization decision[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2007, 13(5): 931-939. (in Chinese)

作者简介:

王军强(1977－)　男,博士,副教授,硕士生导师。主要研究方向:生产系统的智能优化、约束理论、可重构车间生产管理与控制系统等。

Tel: 029-88494701

E-mail: wangjunqiang@hotmail.com

孙树栋(1963－)　男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:先进制造系统、机器人控制等。

Tel: 029-88494701

E-mail: sdsun@nwpu.edu.cn

(编辑:蔡斐, 杨冬)