

文章编号:1000-6893(2010)11-2259-07

# 冗余飞轮构型下力矩分配策略设计与分析

郭延宁, 马广富, 李传江

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

## Design and Analysis of Torque Allocation Strategy for Redundant Flywheel Configurations

Guo Yanning, Ma Guangfu, Li Chuanjiang

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**摘要:** 主要研究了航天器姿态控制系统中冗余飞轮构型的力矩分配问题。在阐明该问题的基础上,首先给出了能量最优的力矩分配策略,并考虑飞轮力矩约束对其进行了限幅处理;接着基于静态最优化理论和飞轮系统性质,对四飞轮和多飞轮情况分别设计了相应的力矩最优分配策略,由于可有效地输出飞轮系的最大力矩,其有重要的工程应用价值;最后研究并对比了几种典型构型下两种分配策略所能输出的力矩包络,表明了所设计方法的有效性。

**关键词:** 冗余系统; 飞轮; 姿态控制; 力矩分配; 能量最优; 力矩最优

**中图分类号:** V488.22 **文献标识码:** A

**Abstract:** This article deals with torque allocation for redundant flywheel configurations in a spacecraft attitude control system. First of all, an energy-based optimal allocation strategy is introduced after some fundamental description of this issue, and a saturation logic is devised subject to the physical constraints of flywheel torque. Then for a four-flywheel and a multi-flywheel system, two torque-based optimal allocation logics are developed respectively based on static optimization theory and attributes of flywheels. Since both allocation strategies can drive the corresponding flywheel system to reach their maximal torque capacity, they are both of significant value in engineering applications. Finally, torque envelopes for some general flywheel configurations using the energy-based and torque-based optimal allocation strategies are analyzed and compared to show the effectiveness of the proposed methods.

**Key words:** redundant system; flywheels; attitude control; torque allocation; energy optimal; torque optimal

随着航天事业的发展,航天器快速姿态机动问题成为目前主要的研究内容。而作为航天器快速精确完成机动任务的重要保证,其姿态控制系统的设计吸引了众多研究者的目光。

出于长期可靠应用的考虑,可使用仅消耗电能的反作用飞轮作为姿态控制系统的执行机构。为实现三轴稳定控制且带有一定冗余,一般配置4个或以上的飞轮组成飞轮系输出控制力矩,在姿态调节任务时可以仅使用其中3个以减小机械磨损;而在姿态捕获或姿态机动期间,则希望飞轮系能发挥最大作用以期最短时间内实现姿态控制目的。而此时控制力矩维数小于飞轮个数,如何将期望的控制力矩分配到每个飞轮,在允许的力矩范围内有效输出所有飞轮力矩,则需要通过设

计相应的力矩分配策略来解决,这也就是本文要研究的主要内容。

在现有力矩分配策略中,最简单常用的是能量最优方法,即通过求解飞轮系构型矩阵的伪逆矩阵,实现控制力矩到飞轮指令力矩的一对一映射<sup>[1]</sup>。由于飞轮系的力矩矢量与角动量矢量计算方式相同,所以徐帆等<sup>[2]</sup>于1986年发表的对飞轮角动量包络的研究结果有较大参考价值,他首次提出了两类角动量包络的概念,并利用几何方法分析对比了几种飞轮构型的实际最大角动量包络和伪逆解可以达到的角动量包络情况,不过并没有给出实现最大角动量包络的分配策略。B. Wie等<sup>[3]</sup>则研究了考虑力矩受限情况的飞轮系在姿态机动中的应用,使用的力矩分配策略为能量最优解。R. Wisniewskia和W. H. Steyn等<sup>[4-5]</sup>也都研究了使用飞轮系的航天器姿态机动控制问题。兼顾系统带宽和执行机构幅值限制,O. Harkegard<sup>[6]</sup>

收稿日期:2010-01-27; 修订日期:2010-03-23

基金项目:国家自然科学基金(60774062);哈尔滨工业大学优秀青年教师培养计划(HITQJNS.2008.006)

通讯作者:马广富 E-mail: magf@hit.edu.cn

基于约束二次规划方法给出了执行器的实时动态分配策略。出于控制力矩的连续性和瞬时能耗等因素考虑, Y. Choi 和 H. Schaub 等<sup>[7-8]</sup>也都设计了相应的力矩分配策略。Y. Choi 等<sup>[9]</sup>又分析并设计了四斜装飞轮系的力矩分配策略以增大飞轮系的力矩输出能力。而 F. L. Markley 等<sup>[10]</sup>则对各种构型的最大力矩和最大角动量包络进行了详细的分析, 并给出了可发挥飞轮系最大能力的力矩最优分配策略。其主要实现方法为: 将力矩包络面分成和飞轮个数有关的多个区域, 通过适当的逻辑判定期望力矩在哪个区域内, 然后通过预先计算的转换矩阵将控制力矩分配到各个飞轮上。不过该判断方法并不直观, 且需要大量的存储空间, 一旦个别飞轮出现故障需重新计算并注入转换矩阵, 实际操作较为复杂。

在上述研究的基础上, 本文首先针对四飞轮情况, 基于线性方程解的性质提出了一种简单有效的力矩最优分配策略。在多于 4 个飞轮时, 将文献[10]中的结果进行改进, 无需存储转换矩阵, 仅根据当前飞轮构型即可快速完成力矩分配。

## 1 多飞轮系统及力矩分配

设航天器装有  $n(n \geq 3)$  个反作用飞轮, 各飞轮的角动量方向矢量分别为  $\mathbf{h}_{w1}, \mathbf{h}_{w2}, \dots, \mathbf{h}_{wn}$ 。当对应飞轮系角动量幅值向量为  $\tilde{\mathbf{h}}_w = [h_{w1} \quad h_{w2} \quad \dots \quad h_{wn}]^T$  时, 其角动量在本体系的投影为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{h}_w = h_{w1}\mathbf{h}_{w1} + h_{w2}\mathbf{h}_{w2} + \dots + h_{wn}\mathbf{h}_{wn} = \mathbf{C}_w\tilde{\mathbf{h}}_w \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{C}_w$  为飞轮系构型矩阵, 取决于飞轮在航天器中的安装方式, 其表达式为

$$\mathbf{C}_w = [\mathbf{h}_{w1} \quad \mathbf{h}_{w2} \quad \dots \quad \mathbf{h}_{wn}] \quad (2)$$

一般将飞轮系的角动量变化率视为其指令力矩, 即

$$\mathbf{u}_c \equiv \dot{\mathbf{h}}_w = \mathbf{C}_w\dot{\tilde{\mathbf{h}}}_w = \mathbf{C}_w\tilde{\mathbf{u}}_w \quad (3)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{u}}_w = [u_{w1} \quad u_{w2} \quad \dots \quad u_{wn}]^T$  为飞轮系分配到的力矩幅值向量。

所谓力矩分配策略, 即在给定期望力矩情况下, 根据当前飞轮系构型及力矩约束, 合理地给定各飞轮指令力矩, 从而输出与期望力矩相等或在该方向上最大的控制力矩, 也就是式(3)的逆问题。

当使用 3 个飞轮时, 若其不共面, 则构型矩阵

$\mathbf{C}_w$  可逆, 飞轮指令力矩可由式(4)唯一确定:

$$\tilde{\mathbf{u}}_w = \mathbf{C}_w^{-1}\mathbf{u}_c \quad (4)$$

而在实际应用中飞轮个数一般多于 3 个来确保系统有一定的冗余, 此时给定期望力矩后式(3)有无穷多个解, 需要根据一定的指标或约束来实现期望力矩与飞轮系力矩的一对一映射。

## 2 能量最优分配策略

能量最优分配策略为在式(3)的所有可行解中寻找能耗最小的解的分配方法。

利用飞轮力矩向量构造如下能量指标函数:

$$J_2 = 0.5 \|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_2^2 = 0.5\tilde{\mathbf{u}}_w^T\tilde{\mathbf{u}}_w \quad (5)$$

此时力矩分配策略即为求解式(3)约束下的指标函数  $J_2$  的极小值。

构造如式(6)所示的拉格朗日函数:

$$H = 0.5\tilde{\mathbf{u}}_w^T\tilde{\mathbf{u}}_w - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{u}_c - \mathbf{C}_w\tilde{\mathbf{u}}_w) \quad (6)$$

式中:  $\boldsymbol{\lambda}$  为拉格朗日乘子。将  $H$  对  $\tilde{\mathbf{u}}_w$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  求偏导, 得

$$\left. \begin{aligned} \partial H / \partial \tilde{\mathbf{u}}_w &= \tilde{\mathbf{u}}_w - \mathbf{C}_w^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \partial H / \partial \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{u}_c - \mathbf{C}_w\tilde{\mathbf{u}}_w = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

求解式(7)即可得到式(3)的能量最优解为<sup>[1-2]</sup>

$$\tilde{\mathbf{u}}_w = \mathbf{C}_w^T(\mathbf{C}_w\mathbf{C}_w^T)^{-1}\mathbf{u}_c \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{C}_w^T(\mathbf{C}_w\mathbf{C}_w^T)^{-1}$  又称构型矩阵  $\mathbf{C}_w$  的伪逆, 为与飞轮构型相关的常值矩阵。式(8)通过  $\mathbf{C}_w$  的伪逆给出了期望力矩和飞轮指令力矩的线性映射关系。而当  $\tilde{\mathbf{u}}_w$  超出飞轮力矩限制时, 需对该指令进行适当转换以保持力矩方向不变。假设飞轮系中各飞轮可输出的最大力矩均为  $u_{wm}$ , 则有实际可行的指令力矩为

$$\tilde{\mathbf{u}}_{wcom} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_w & \|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_\infty \leq u_{wm} \\ \tilde{\mathbf{u}}_w \frac{u_{wm}}{\|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_\infty} & \|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_\infty > u_{wm} \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_\infty$  为  $\tilde{\mathbf{u}}_w$  各元素绝对值的最大值。

## 3 力矩最优分配策略

力矩最优分配策略为在式(3)的所有可行解中寻找所需各飞轮力矩最小的分配方法。一般情况下, 该策略分配得到的解并非能量最优, 但其可有效发挥飞轮系能力, 因此在力矩需求较大的姿态机动中有着重要意义。

构造基于无穷范数的指标函数为

$$J_\infty = \|\tilde{\mathbf{u}}_w\|_\infty^2 \quad (10)$$

此时力矩分配策略目标即为求解式(3)约束下的

指标函数  $J_\infty$  的极小值。

### 3.1 飞轮系 $n=4$ 情况

$n=4$  时,矩阵  $C_w$  存在一维核向量  $\tilde{u}_Z = [u_{z1} \ u_{z2} \ u_{z3} \ u_{z4}]^T$  满足  $C_w \tilde{u}_Z = 0$ 。由线性方程解的性质可知,此时式(3)的通解为特解  $\tilde{u}_T = [u_{t1} \ u_{t2} \ u_{t3} \ u_{t4}]^T$  与  $\tilde{u}_Z$  的线性组合,即

$$\tilde{u}_w = \tilde{u}_T + \rho \tilde{u}_Z \quad (11)$$

式中: $\tilde{u}_T$  可取为系统伪逆解; $\rho$  为待定标量系数,选取时应满足指标  $J_\infty$  取极小值。特别地,四斜装构型和三正交加一斜装构型对应的核向量分别为

$$\tilde{u}_Z^4 = [-1 \ 1 \ -1 \ 1]^T / 2 \quad (12)$$

$$\tilde{u}_Z^{3\&1} = [1 \ 1 \ 1 \ -\sqrt{3}]^T / \sqrt{6} \quad (13)$$

此时分配策略即为参数  $\rho$  的静态最优化问题,可以描述如下。

对于如式(14)所示的  $\rho$  的函数:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\rho) &= u_{w1}^2 = (u_{t1} + \rho u_{z1})^2 \\ f_2(\rho) &= u_{w2}^2 = (u_{t2} + \rho u_{z2})^2 \\ f_3(\rho) &= u_{w3}^2 = (u_{t3} + \rho u_{z3})^2 \\ f_4(\rho) &= u_{w4}^2 = (u_{t4} + \rho u_{z4})^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

适当选取  $\rho$ , 使得

$$\max f_i(\rho) = \|\tilde{u}_w\|_\infty^2 = J_\infty \quad (15)$$

取极小值。

对于四斜装构型,式(14)中各函数对应最小值为 0 且开口向上的抛物线簇,且由式(12)中核向量  $\tilde{u}_Z^4$  形式可知各曲线形状相同,对称轴分别为  $-u_{ti}/u_{zi} (i=1,2,\dots,4)$ , 如图 1 所示。

令  $f_l(\rho)$  和  $f_r(\rho) (l, r=1,2,\dots,4)$  分别为最左侧和最右侧的抛物线,由图 1 容易得出该静态最优问题的解  $\rho_w$  即为这两条抛物线的交点:

$$\rho_w = -\frac{1}{2} \left( \frac{u_{tl}}{u_{zl}} + \frac{u_{tr}}{u_{zr}} \right) \quad (16)$$

此处飞轮  $l$  和飞轮  $r$  分配到的力矩最大,对应  $J_\infty$  取极小值。

对于三正交加一斜装构型,参考式(13)中核向量  $\tilde{u}_Z^{3\&1}$  可知,正交飞轮相对应的抛物线  $f_1(\rho) \sim f_3(\rho)$  形状相同,而斜装飞轮相对应的抛物线  $f_4(\rho)$  开口较窄。在 3 个正交飞轮中同样定义  $f_l(\rho)$  和  $f_r(\rho) (l, r=1,2,3)$  并设其交点为  $\rho_w^0$  (如图 2 所示),若  $f_4(\rho)$  也过  $\rho_w^0$ , 则有

$$f_4(\rho_w^0) = f_l(\rho_w^0) = f_r(\rho_w^0) \quad (17)$$

此时  $f_4(\rho)$  的位置有两种可能,对应的对称轴分别为

$$\rho_w^{+/-} = \rho_w^0 \pm \frac{\sqrt{f_l(\rho_w^0)}}{|u_{z4}|} \quad (18)$$

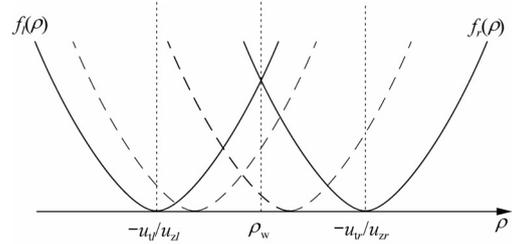


图 1  $f_i(\rho) (i=1,2,\dots,4)$  与  $\rho$  的关系(四斜装飞轮系)  
Fig. 1 Relationship between  $f_i(\rho) (i=1,2,\dots,4)$  and  $\rho$  (4 skewed flywheels)

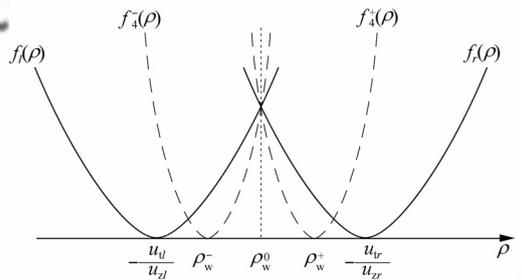


图 2  $f_i(\rho) (i=1,2,\dots,4)$  与  $\rho$  的关系(三正交加一斜装飞轮系)  
Fig. 2 Relationship between  $f_i(\rho) (i=1,2,\dots,4)$  and  $\rho$  (3 orthogonal and 1 skewed flywheel array)

令  $\rho_4 = -u_{t4}/u_{z4}$  为  $f_4(\rho)$  的顶点,结合图 2 将  $\rho$  的最优取值分为 3 种情况,分别对应抛物线  $f_l(\rho)$ 、 $f_r(\rho)$  以及  $f_4(\rho)$  两两之间的交点。需要注意的是  $f_4(\rho)$  与其他抛物线会存在两个交点,应取对应函数  $f_i$  值较小的交点,在  $\rho_w^0$  两侧分别为较大和较小的  $\rho$ ,具体为

$$\rho_w = \begin{cases} \max\left(\frac{u_{t4} - u_{tr}}{u_{zr} - u_{z4}}, -\frac{u_{t4} + u_{tr}}{u_{z4} + u_{zr}}\right) & \rho_4 < \rho_w^- \\ \rho_w^0 & \rho_w^- \leq \rho_4 \leq \rho_w^+ \\ \min\left(\frac{u_{t4} - u_{tl}}{u_{z4} - u_{z4}}, -\frac{u_{t4} + u_{tl}}{u_{z4} + u_{z4}}\right) & \rho_4 > \rho_w^+ \end{cases} \quad (19)$$

### 3.2 飞轮系 $n \geq 4$ 情况

3.1 节的方法对于  $n=4$  的情况能够简单快捷地实现最优力矩分配,而对于  $n \geq 4$  的情况,需要研究更具一般性的方法。由文献[10]可知,此时飞轮系对应的最大力矩包络为  $n(n-1)$  面体,每一面都是边长为  $2u_{wm}$  的菱形,对应两条边分别平行于两个飞轮(设为飞轮  $i$  和  $j$ )的力矩方向。在此面上,除飞轮  $i$  和  $j$  外其他飞轮力矩均达到

极值(正最大或负最大);对应棱上的点意味着除与之平行的飞轮外其他飞轮力矩均达到极值;多面体各顶点均代表所有飞轮力矩都达到极值。

在研究力矩分配策略前,需要研究飞轮系力矩包络面性质。令飞轮  $i$  和  $j$  对应菱形为  $\tau_{ij}$ , 其法向量为<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_j}{|\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_j|} \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{h}_i$  和  $\mathbf{h}_j$  为对应飞轮的角动量单位矢量。此外  $\mathbf{n}_{ji} = -\mathbf{n}_{ij}$  为与之对称的另一菱形  $\tau_{ji}$  的法向量。在  $\tau_{ij}$  面内,其他飞轮均输出在该法向量方向的最大力矩,有合力矩为

$$\mathbf{u}_{ij}^{\dagger} = \sum_{k \neq i, j} \mathbf{u}_k = u_{wm} \sum_{k \neq i, j} \mathbf{h}_k \operatorname{sgn}(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{n}_{ij}) \quad (21)$$

即包络体原点至菱形面对角线交点的连接矢量。通过合理分配飞轮  $i$  和  $j$  的力矩,系统合力矩可到达  $\tau_{ij}$  面内任意位置。

令  $u_c$  和  $\mathbf{e}$  分别为期望力矩  $\mathbf{u}_c$  的幅值和方向矢量。若  $\mathbf{e}$  指向位于  $\tau_{ij}$  面内,设其可输出最大力矩幅值为  $u_{\max}$ , 则有

$$u_{\max} \mathbf{e} = \mathbf{u}_{ij}^{\dagger} + u_{wi} \mathbf{h}_i + u_{wj} \mathbf{h}_j \quad (22)$$

求解式(22)得

$$\begin{bmatrix} u_{\max} \\ u_{wi} \\ u_{wj} \end{bmatrix} = [\mathbf{e} \quad -\mathbf{h}_i \quad -\mathbf{h}_j]^{-1} \mathbf{u}_{ij}^{\dagger} \quad (23)$$

结合式(21)和式(23)可得飞轮系分配的力矩向量为  $\tilde{\mathbf{u}}_w$ , 对应为飞轮系在期望控制力矩方向所能达到的最大力矩,若该值大于控制力矩,还需要对其进行线性变换处理,即有飞轮指令力矩为

$$\tilde{\mathbf{u}}_{wcom} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_w & u_{\max} \leq u_c \\ \frac{u_c}{u_{\max}} \tilde{\mathbf{u}}_w & u_{\max} > u_c \end{cases} \quad (24)$$

判定  $\mathbf{e}$  位于哪个  $\tau_{ij}$  面内时,需引入参数

$$\mu_{ij} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{u}_{ij}^{\dagger} \cdot \mathbf{n}_{ij}} \quad (25)$$

式中:  $\mu_{ij}$  的分子为力矩方向矢量  $\mathbf{e}$  在菱形面  $\tau_{ij}$  法向量  $\mathbf{n}_{ij}$  的投影,分母为菱形对角线交点方向  $\mathbf{u}_{ij}^{\dagger}$  在  $\mathbf{n}_{ij}$  的投影,即该面与原点的距离,如图3所示。

图3为沿着  $\tau_{ij}$  面和  $\tau_{mm}$  面交线方向的视图,图中:  $O$  为原点;  $OA$  和  $OB$  分别为原点到两个面的垂线;  $OM$  为原点到两面的交线方向。若力矩方向矢量  $\mathbf{e}$  沿着  $OM$  方向,则容易看出  $\mu_{ij} = \mu_{mm}$ , 当  $\mathbf{e}$  指向  $\tau_{ij}$  面时,由于在  $\mathbf{n}_{ij}$  方向投影增加而在  $\mathbf{n}_{mm}$  方向投影减小,有  $\mu_{ij} > \mu_{mm}$ 。

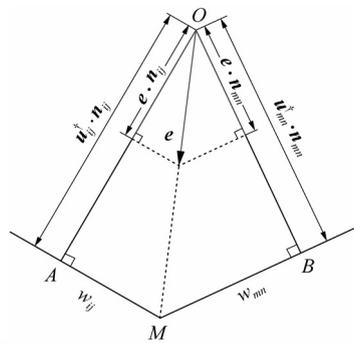


图3 菱形面与矢量  $\mathbf{e}$  的关系

Fig. 3 Relationship between rhombus facet and vector  $\mathbf{e}$

不同于文献[10]中大量存储转换矩阵实现力矩最优分配的方法,本文策略实现简单,计算及存储量较小,有较强的工程应用价值。此外,出于实际应用中能量消耗和计算量的考虑,在力矩需求较小时(如稳态保持阶段)应使用相对简单且节能的能量最优分配策略,仅当期望力矩较大时(如姿态机动阶段)才引入力矩最优分配策略。

### 3.3 冗余飞轮构型下力矩分配实现

综合第2节和第3节内容,在给定  $u_c$  及  $C_w$  后,结合两种分配律的实际情况,得到可用于工程实际的力矩分配策略计算流程如图4所示。

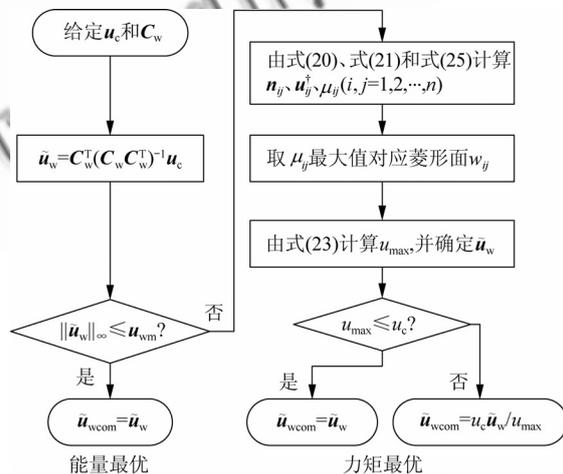


图4 力矩分配策略流程图

Fig. 4 Flow chart of torque allocation logic

上述分配策略虽计算量较能量最优情况有所增加,但由于能有效输出飞轮系的最大力矩,因此对实现姿态快速机动有着重要意义。

## 4 典型飞轮构型力矩分配及分析

参考文献[1]、文献[2]和文献[10],本节绘制了几种典型飞轮构型能量及力矩最优分配策略的

力矩包络面,并给出两者之差,有助于直观地了解航天器绕不同欧拉轴姿态机动时力矩最优分配策略的优越性。设  $u_{wm}$  为单位值,即各力矩包络面的棱长度为 1。

### 4.1 四斜装飞轮系

设各飞轮力矩方向与  $z$  轴夹角为  $\phi$ ,在  $x-y$  面内的投影与  $x$  轴夹角依次为  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  时,有其构型矩阵为

$$C_w^4 =$$

$$\begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta_1 & \sin \phi \sin \theta_2 & \sin \phi \cos \theta_3 & \sin \phi \sin \theta_4 \\ \sin \phi \sin \theta_1 & \sin \phi \cos \theta_2 & \sin \phi \sin \theta_3 & \sin \phi \cos \theta_4 \\ \cos \phi & \cos \phi & \cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

取  $\phi=54.74^\circ, \theta_1 \sim \theta_4$  依次为  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 。给定各方向力矩需求均大于其力矩包络值时,利用本文的能量最优和力矩最优分配策略,可得四斜装飞轮系对应的力矩包络如图 5 所示。其中使用 3.1 节和 3.2 节两种力矩最优分配策略对应的结果一致,对三正交一斜装飞轮系也是如此。

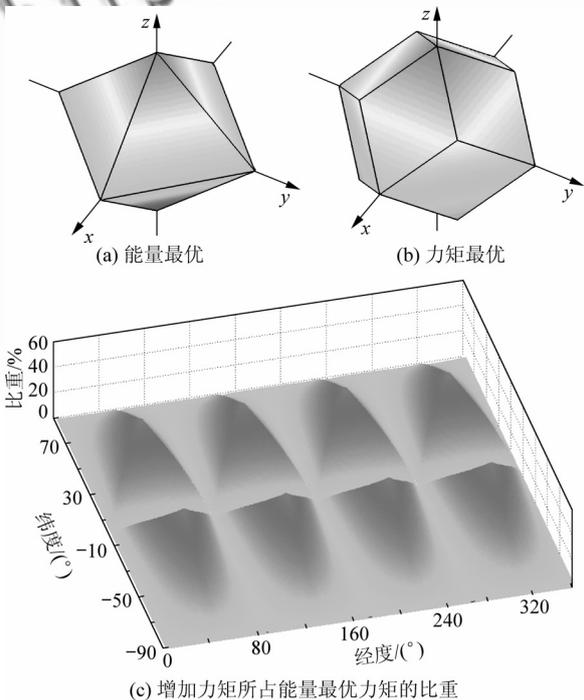


图 5 四斜装飞轮系不同力矩分配策略对比

Fig. 5 Comparison of different torque allocation logics (4 skewed flywheel array)

图 5(a)为能量最优策略所能得到的最大力矩包络面,为两个底面相接的正四棱锥,各顶点距离原点的距离均为 2.309 7。图 5(b)为力矩最优策略对应的最大力矩包络面,为十二面体,其在各

轴的顶点同图 5(a)一致,但在原有八面体的每个面增加了一个四面体。图 5(c)为剖面视图,给出了各个方向上使用力矩最优分配策略相对能量最优分配策略增加的力矩所占后者的比重,最大可达 48.94%。

对于四斜装飞轮系而言,无论何种包络面,其形状均与参数  $\phi$  和  $\theta_i (i=1, 2, 3, 4)$  密切相关,前者决定了包络面在  $z$  轴的拉伸程度,后者则对应着其在  $x-y$  面内的相对位置,可根据任务的干扰力矩特性或姿态控制需求等适当选取。

### 4.2 三正交加一斜装飞轮系

三正交加一斜装飞轮系构型矩阵为

$$C_w^{3\&1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

能量最优和力矩最优可得的最大力矩包络面如图 6 所示,两者对应的同样为八面体和十二面体,不过相对复杂,各顶点坐标不再一一给出。图 6(c)同样表示了两者的力矩差占前者比重,最大可达 44.98%。

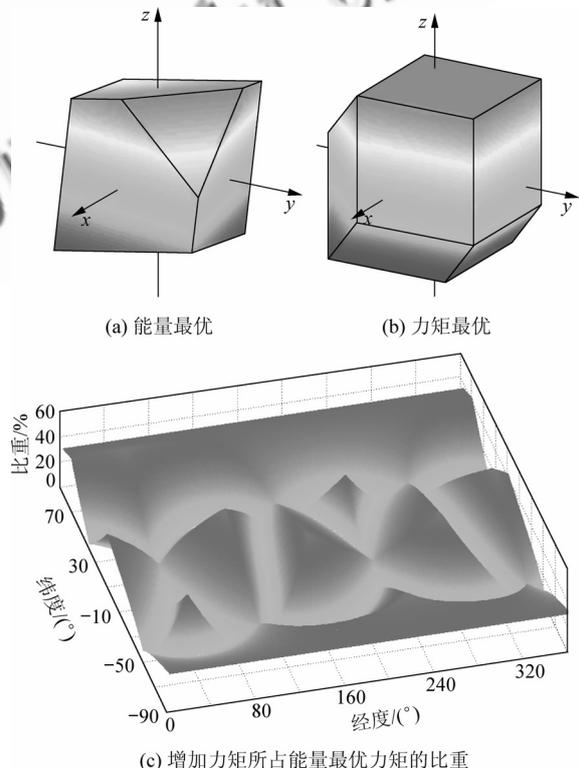


图 6 三正交加一斜装飞轮系不同力矩分配策略对比

Fig. 6 Comparison of different torque allocation logics (3 orthogonal and 1 skewed flywheel array)

可以看出无论何种策略该构型得到的力矩包络对于坐标轴并不对称,由于不能均衡有效地发挥飞轮系的能力,且该构型较为固定,不能根据任务需求调整,在实际应用中受到一定约束。

### 4.3 六斜装飞轮系

同四斜装飞轮系,六斜装飞轮系有如下构型矩阵:

$$C_w^6 = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta_1 & \sin \phi \sin \theta_2 & \cdots & \sin \phi \sin \theta_6 \\ \sin \phi \sin \theta_1 & \sin \phi \cos \theta_2 & \cdots & \sin \phi \cos \theta_6 \\ \cos \phi & \cos \phi & \cdots & \cos \phi \end{bmatrix}$$

取  $\phi = 60^\circ$ ,  $\theta_1 \sim \theta_6$  依次为  $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ , 可得对应力矩包络面如图 7 所示。图中能量最优对应的为两个底面相接的正六棱锥,各顶点与原点的距离均为 3。而力矩最优对应的为三十面体,其  $z$  轴上的两个顶点距原点的距离同样为 3,但在  $x-y$  面内的 6 个顶点距原点的距离均为  $2\sqrt{3}$ 。两者的差别见图 7(c),其中增加的力矩占能量最优的比重最大为 33.33%。

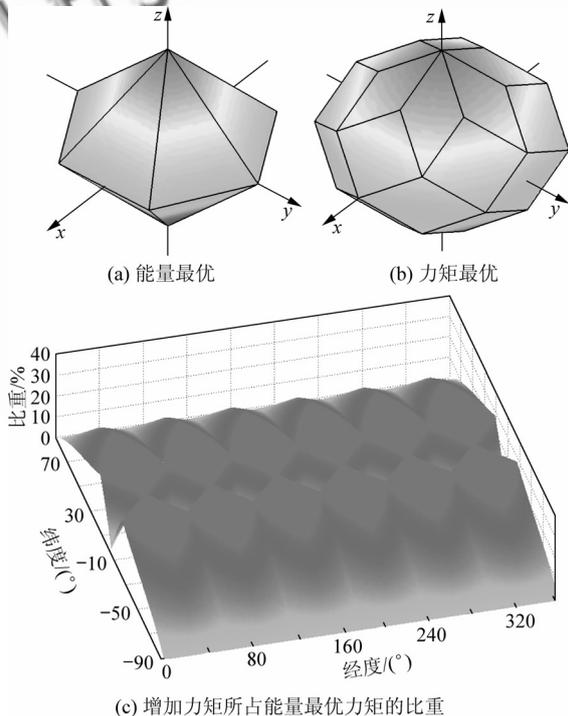


图 7 六斜装飞轮系不同力矩分配策略对比  
Fig. 7 Comparison of different torque allocation strategies (6 skewed flywheel array)

### 4.4 一个飞轮损坏的六斜装飞轮系

考虑六斜装飞轮中 2 号飞轮损坏,此时得到的力矩包络(见图 8)均相对飞轮 2 和飞轮 4 所在

平面对称,能量最优对应十面体,力矩最优对应二十面体。由图 8(c)可知,此时增加的力矩占能量最优的比重最大可达 54.62%,因此能有效提高飞轮失效情况下航天器的姿控系统可靠性。

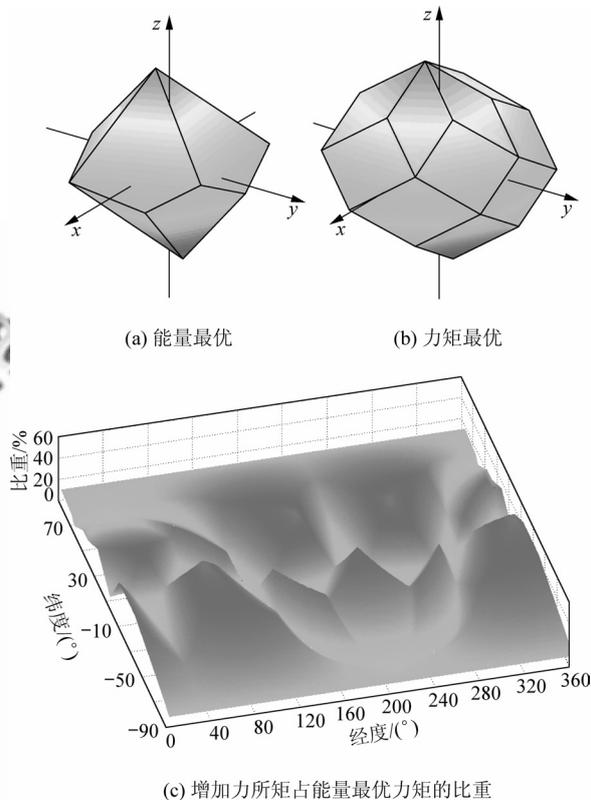


图 8 一个飞轮损坏的六斜装飞轮系不同力矩分配策略对比

Fig. 8 Comparison of different torque allocation strategies (6 skewed flywheel array with one failed)

## 5 结论

为了使飞轮系最大限度地输出控制力矩以高效快速地完成航天器姿态机动控制任务,分别针对四飞轮和多飞轮情况设计了简单有效的力矩最优分配策略。通过研究几种典型飞轮系的力矩包络,并通过与传统的能量最优解的对比验证了设计分配方法的优越性。特别地,在多飞轮安装但个别飞轮失效情况下,本文的力矩最优分配策略在某些方向可比能量最优解多输出 54.62% 的控制力矩,有效提高系统的可靠性。

不过,本研究基于确知的飞轮工作特性,当飞轮故障时需首先通过合理的故障诊断与分离技术获知其工作构型,这也将是后续的研究内容。

## 参 考 文 献

- [1] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2008.  
http://hkxb.buaa.edu.cn

- 空航天大学出版社, 1998: 270-278.
- Zhang Renwei. Dynamics and control of satellites orbit and attitude[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1998: 270-278. (in Chinese)
- [2] 徐帆, 林来兴. 角动量包及斜装飞轮的卸载系统[J]. 航天控制, 1986(1): 22-30.
- Xu Fan, Lin Laixing. Angular momentum envelope and unloading system of skewed flywheel system[J]. Aerospace Control, 1986(1): 22-30. (in Chinese)
- [3] Wie B, Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(6): 1372-1379.
- [4] Wisniewskia R, Kulczycki P. Slew maneuver control for spacecraft equipped with star camera and reaction wheels [J]. Control Engineering Practice, 2005, 13(3): 349-356.
- [5] Steyn W H. Near-minimum-time eigenaxis rotation maneuvers using reaction wheels[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(5): 1184-1189.
- [6] Harkegard O. Dynamic control allocation using constrained quadratic programming[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(6): 1028-1034.
- [7] Choi Y, Bang H, Lee H. Dynamic control allocation for shaping spacecraft attitude control command[R]. AIAA-2006-6040, 2006.
- [8] Schaub H, Lappas V J. Redundant reaction wheel torque distribution yielding instantaneous  $L_2$  power-optimal spacecraft attitude control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(4): 1269-1276.
- [9] Choi Y, Leeghim H, Bang H. Efficient control torque distribution approach for spacecraft attitude control [R]. AIAA-2008-7234, 2008.
- [10] Markley F L, Reynolds R G, Liu F X, et al. Maximum torque and momentum envelopes for reaction wheel arrays [R]. AIAA-2009-6109, 2009.

#### 作者简介:

郭延宁(1985—) 男, 博士研究生。主要研究方向: 航天器姿态确定与姿态机动控制。

E-mail: guoyin@hit.edu.cn

马广富(1963—) 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 航天器姿态控制, 挠性航天器主动振动控制, 最优控制, 非线性控制等。

E-mail: magf@hit.edu.cn

李传江(1978—) 男, 博士, 副教授, 硕士生导师。主要研究方向: 航天器姿态控制, 最优控制, 非线性控制等。

E-mail: chuanjiangli@gmail.com

(编辑: 孔琪颖)