

文章编号: 1001-0920(2012)02-0266-05

# 一类纯反馈非线性系统的简化自适应神经网络动态面控制

刘树光, 孙秀霞, 董文瀚, 张龙军

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

**摘要:** 针对一类完全非仿射纯反馈非线性系统, 提出一种简化的自适应神经网络动态面控制方法. 基于隐函数定理和中值定理将未知非仿射输入函数进行分解, 使其含有显式的控制输入; 利用简化的神经网络逼近未知非线性函数, 对于  $n$  阶 SISO 纯反馈系统, 仅一个参数需要更新; 动态面控制可消除反推设计中由于对虚拟控制反复求导而导致的复杂性问题. 通过 Lyapunov 稳定性定理证明了闭环系统的半全局稳定性, 数值仿真验证了方法的有效性.

**关键词:** 自适应控制; 动态面控制; 神经网络; 纯反馈系统

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Simplified adaptive neural dynamic surface control for a class of nonlinear systems in pure feedback form

LIU Shu-guang, SUN Xiu-xia, DONG Wen-han, ZHANG Long-jun

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: LIU Shu-guang, E-mail: dawny418@126.com)

**Abstract:** A simplified adaptive neural dynamic surface control approach is proposed for a class of completely non-affine pure-feedback nonlinear systems. By using implicit function theorem and mean value theorem, unknown non-affine input functions can be transformed to partially affine forms. The simplified neural networks are used to approximate the unknown nonlinearities in systems, and for a  $n$ -th order strict feedback nonlinear system, only one parameter is needed to be estimated on-line. The problem of explosion of terms in traditional backstepping design is eliminated by utilizing dynamic surface control. It is proved that the developed method can guarantee the semi-global stability of the close-loop system. Simulation results show the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** adaptive control; dynamic surface control; neural network; pure-feedback systems

### 1 引言

近年来,反推自适应控制方法受到了国内外学者的广泛关注<sup>[1]</sup>,在带有未知参数<sup>[2]</sup>或未知不确定性<sup>[3]</sup>的严反馈非线性系统控制领域,取得了大量的研究成果.事实上,不确定纯反馈非线性系统较严反馈系统更具普遍性,可以表示很多实际系统<sup>[4]</sup>.但是,纯反馈系统的重叠和非仿射特性使得其控制器设计变得困难,因而现有文献仅取得了较少的研究成果.文献[4-8]针对具有下三角结构的纯反馈非线性系统,讨论了自适应神经网络反推控制方案.为了克服反推控制的“微分爆炸”问题<sup>[9]</sup>,[10]在[4]的基础上,提出了一类纯反馈非线性系统的自适应神经网络动态面控制方案.注意到[4-5,10]研究的纯反馈系统均为最后一个方程或两个方程为仿射形式的较单纯反馈系统.

上述文献中,将神经网络或模糊逻辑系统用于逼近未知不确定性,将反推控制方法用于构造控制器.然而,自适应神经网络或模糊逻辑系统方案的一个共同缺点是,更新参数的数量依赖于神经网络节点或模糊规则基的数量.换言之,随着节点数或规则基数的增加,需要更新参数的数量随之显著增加,使得在线学习时间难以接受.为解决此问题,文献[11-12]针对严反馈非线性系统提出了一种直接自适应神经网络(模糊)控制方法,有效减少了需要更新参数的数量,但传统反推控制固有的“微分爆炸”问题仍然存在.

基于以上分析,本文就一类完全非仿射纯反馈非线性系统,提出一种新的简化自适应神经网络动态面控制方法.具体方案为:基于隐函数定理和中值定理将未知非仿射输入函数进行分解,使其含有显式的控

收稿日期: 2010-09-29; 修回日期: 2011-01-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60904038); 空军工程大学学术基金项目(XS0901014).

作者简介: 刘树光(1981—),男,博士,从事自适应控制、飞行控制等研究; 孙秀霞(1962—),女,教授,博士生导师,从事鲁棒控制、飞行控制等研究.

制输入; 利用神经网络逼近未知非线性函数后, 以所有神经网络权值范数平方的最大值为更新参数来设计控制器, 仅一个参数需要更新; 利用动态面控制方法完成控制律的设计.

## 2 问题描述

考虑如下完全非仿射纯反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + d_i(\mathbf{x}, t), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u) + d_n(\mathbf{x}, t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为系统状态向量;  $u, y \in \mathbf{R}$  为系统的输入和输出;  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T, i = 1, 2, \dots, n$ ;  $f(\cdot)$  为未知光滑非线性函数;  $d_i(\mathbf{x}, t)$  为未知不确定干扰.

控制目标: 对系统(1)设计控制律  $u$ , 使得闭环系统的所有信号有界, 且输出跟踪误差可收敛到 0 附近的一个邻域内.

本文通过 RBF NN 在线逼近未知非线性函数. 给定某一未知光滑函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , 则存在一基函数向量  $\xi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$  及理想权值矩阵  $W^* \in \mathbf{R}^l$ , 使得

$$f(Z) = W^{*T} \xi(Z) + \delta. \quad (2)$$

其中: 输入向量  $Z \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$ ;  $\delta \in \mathbf{R}$  为神经网络的逼近误差, 满足  $|\delta| \leq \delta^*$ ; 理想权值矩阵  $W^*$  定义为

$$W^* = \arg \min_{W \in \mathbf{R}^l} \left\{ \sup_{Z \in \Omega} |f(Z) - W^T \xi(Z)| \right\}. \quad (3)$$

$W = [w_1, \dots, w_l]^T \in \mathbf{R}^l$ , 节点数  $l > 1$ ;  $\xi(Z) = [\xi_1(Z), \dots, \xi_l(Z)]^T$ ,  $\xi_i(Z)$  通常选择为高斯函数

$$\xi_i(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta_i} \exp\left(-\frac{\|Z - \mu_i\|^2}{2\eta_i^2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (4)$$

$\mu_i = [\mu_{i1}, \dots, \mu_{im}]^T$  为基函数的中心,  $\eta_i$  为基函数的宽度.

对于纯反馈系统(1), 令  $x_{n+1} = u$ , 则可定义

$$g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5)$$

为完成控制器设计, 作如下假设:

**假设 1**  $g_i(\cdot)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 符号已知, 且存在正常数  $g_{im}$  和  $g_{iM}$ , 使得  $g_{im} \leq |g_i(\cdot)| \leq g_{iM}$ . 不失一般性, 假设  $g_i(\cdot) > 0$ .

**假设 2** 期望轨迹  $y_r$  光滑有界, 且  $y_r \in \Omega_d = \{(y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r) \mid y_r^2 + \dot{y}_r^2 + \ddot{y}_r^2 \leq B_0\}$ ,  $B_0$  为已知正常数.

**假设 3** 存在非负光滑函数  $\rho_i(\bar{x}_i)$  和未知正常数  $p_i^*$ , 对  $\forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ , 使得  $|d_i(\mathbf{x}, t)| \leq p_i^* \rho_i(\bar{x}_i)$ .

**假设 4** 理想权值矩阵  $W_i^*$  有界, 即可令  $\|W_i^*\| \leq W_m$ ,  $W_m$  为已知正常数.

## 3 控制器设计

控制器设计过程包括  $n$  步, 在第  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 步利用神经网络  $W_i^{*T} \xi_i(Z_i)$  逼近未知非线性函数, 在最后一步设计出实际控制信号  $u$ . 定义常数

$$\phi := \max\{\|W_i^*\|^2, 1 \leq i \leq n\}. \quad (6)$$

**Step 1** 定义动态面变量  $S_1 = x_1 - \omega_1$ ,  $\omega_1 = y_r$ , 其导数为

$$\dot{S}_1 = f_1(x_1, x_2) + d_1(\mathbf{x}, t) - \dot{\omega}_1. \quad (7)$$

由假设 1 知,  $\partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_2 \geq g_{1m} > 0$ , 定义  $v_1 = -\dot{\omega}_1$ , 考虑事实  $\partial v_1/\partial x_2 = 0$ , 则

$$\frac{\partial [f_1(x_1, x_2) + v_1]}{\partial x_2} \geq g_{1m} > 0. \quad (8)$$

根据文献[4]中引理 1 知, 对于任意  $x_1$  和  $v_1$ , 存在一光滑理想控制输入  $x_2 = \alpha_1^*(x_1, v_1)$ , 使得

$$f_1(x_1, \alpha_1^*) + v_1 = 0 \Rightarrow f_1(x_1, \alpha_1^*) = -v_1. \quad (9)$$

由中值定理可知存在  $\lambda_1$ ,  $0 < \lambda_1 < 1$ , 使得

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, \alpha_1^*) + g_{1\lambda_1}(x_1 - \alpha_1^*). \quad (10)$$

式中:  $g_{1\lambda_1} = g_1(x_1, x_{2\lambda_1})$ ,  $x_{2\lambda_1} = \lambda_1 x_2 + (1 - \lambda_1)\alpha_1^*$ .  $g_{1\lambda_1}$  是  $\bar{x}_2$  和  $\alpha_1^*$  的函数, 由式(9)知,  $\alpha_1^*$  是  $x_1$  和  $\dot{y}_r$  的函数, 故  $g_{1\lambda_1}$  是  $\bar{x}_2$  和  $\dot{y}_r$  的函数. 将式(10)代入(7)得

$$\dot{S}_1 = g_{1\lambda_1}(x_2 - \alpha_1^*) + d_1(\mathbf{x}, t). \quad (11)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2g_{1\lambda_1}} S_1^2 + \frac{1}{2r} \tilde{\phi}^2. \quad (12)$$

根据假设 3 和 Young's 不等式可得

$$\frac{|S_1 d_1(\mathbf{x}, t)|}{g_{1\lambda_1}} \leq \frac{|S_1| p_1^* \rho_1(x_1)}{g_{1\lambda_1}} \leq \frac{S_1^2 \rho_1^2(x_1)}{2g_{1m}^2} + \frac{p_1^{*2}}{2}. \quad (13)$$

对  $V_1$  求导, 并将式(11)和(13)代入得

$$\dot{V}_1 \leq S_1 [x_2 + \bar{f}_1(Z_1)] + \frac{p_1^{*2}}{2} - \frac{\dot{g}_{1\lambda_1} S_1^2}{2g_{1\lambda_1}^2} + \frac{1}{r} \tilde{\phi} \dot{\phi}. \quad (14)$$

未知非线性函数

$$\bar{f}_1(Z_1) = -\alpha_1^* + \frac{S_1^2 \rho_1^2(x_1)}{2g_{1m}^2}, \quad (15)$$

应用神经网络逼近  $\bar{f}_1(Z_1)$ , 给定一紧集  $\Omega_{Z_1}$ , 有

$$\bar{f}_1(Z_1) = W_1^{*T} \xi_1(Z_1) + \delta_1, \quad |\delta_1| \leq \delta_1^*, \delta_1^* > 0. \quad (16)$$

根据式(16)并结合  $\phi$  的定义可得

$$\begin{aligned} S_1 \bar{f}_1(Z_1) &= \\ S_1 \frac{W_1^{*T}}{\|W_1^{*T}\|} \xi_1(Z_1) \|W_1^{*T}\| + S_1 \delta_1^* &\leq \\ \frac{1}{2a_1^2} S_1^2 \phi \xi_1^T(Z_1) \xi_1(Z_1) + \frac{1}{2} a_1^2 + S_1 \delta_1^* & \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)代入(14)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq S_1 \left[ x_2 + \frac{1}{2a_1^2} S_1 \phi \xi_1^T(Z_1) \xi_1(Z_1) + S_1 \right] + \\ \frac{1}{4} \eta_1^2 (S_1, \bar{x}_2, y_r, \dot{y}_r) + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{p_1^{*2}}{2} + \frac{1}{r} \tilde{\phi} \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $\eta_1(S_1, \bar{x}_2, y_r, \dot{y}_r)$  为连续函数<sup>[10]</sup>, 满足

$$\left| \delta_1^* - \frac{\dot{y}_1 \lambda_1 S_1}{2g_{1\lambda_1}^2} \right| \leq \eta_1(S_1, \bar{x}_2, y_r, \dot{y}_r). \quad (19)$$

选择可行的虚拟控制信号为

$$x_{2f} = -k_1 S_1 - \frac{1}{2a_1^2} S_1 \hat{\phi} \xi_1^T(Z_1) \xi_1(Z_1). \quad (20)$$

将式(18)右边增加和减少一项  $S_1 x_{2f}$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq S_1(x_2 - x_{2f}) - (k_1 - 1)S_1^2 + \frac{1}{4}\eta_1^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \\ &\frac{p_1^{*2}}{2} + \frac{1}{r}\tilde{\phi}\left[\dot{\phi} - \frac{r}{2a_1^2} S_1^2 \xi_1^T(Z_1) \xi_1(Z_1)\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

为了避免在下述设计步骤中对  $\dot{\omega}_2$  的解析运算, 考虑通过一阶滤波器来获得  $\omega_2$  和  $\dot{\omega}_2$ , 有

$$\tau_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 = x_{2f}, \quad \omega_2(0) = x_{2f}(0). \quad (22)$$

**Step i** 定义动态面变量  $S_i = x_i - \omega_i$ , 并定义 Lyapunov 函数  $V_i = S_i^2/2g_{i\lambda_i}$ , 类似 Step 1 得可行的虚拟控制信号为

$$x_{i+1f} = -k_i S_i - S_{i-1} - \frac{1}{2a_i^2} S_i \hat{\phi} \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq S_i(x_{i+1} - x_{i+1f}) - (k_i - 1)S_i^2 - S_{i-1}S_i + \\ &\frac{1}{4}\eta_i^2 + \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{p_i^{*2}}{2} - \frac{1}{2a_i^2} S_i \tilde{\phi} \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\tau_{i+1} \dot{\omega}_{i+1} + \omega_{i+1} = x_{i+1f}, \quad \omega_{i+1}(0) = x_{i+1f}(0). \quad (25)$$

**Step n** 定义动态面变量  $S_n = x_n - \omega_n$ , 得到最终控制信号, 并选择参数更新律分别为

$$u = -k_n S_n - S_{n-1} - \frac{1}{2a_n^2} S_n \hat{\phi} \xi_n^T(Z_n) \xi_n(Z_n), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -(k_n - 1)S_n^2 - S_{n-1}S_n + \frac{1}{4}\eta_n^2 + \frac{1}{2}a_n^2 + \\ &\frac{p_n^{*2}}{2} - \frac{1}{2a_n^2} S_n \tilde{\phi} \xi_n^T(Z_n) \xi_n(Z_n), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\phi}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{r}{2a_i^2} S_i^2 \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i) - b_0 \hat{\phi}, \quad \hat{\phi}(0) \geq 0. \quad (28)$$

上述设计过程中,  $r > 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $b_0 > 0$  均为设计参数;  $\tau_{i+1}$  为滤波器时间常数;  $Z_i := (\bar{x}_i, S_i, \dot{\omega}_i) \in \Omega_{Z_i} \subset \mathbf{R}^{i+2}$ ;  $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi$ ,  $\hat{\phi}$  为  $\phi$  的估计值.

#### 4 闭环系统稳定性和跟踪性能分析

定义边界层误差  $y_{i+1} = \omega_{i+1} - x_{i+1f}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 并考虑式(23)和(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i+1} &= -\frac{y_{i+1}}{\tau_{i+1}} + (k_i + 1)\dot{S}_i + \frac{1}{2a_i^2} [\dot{S}_i \hat{\phi} \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i) + \\ &S_i \hat{\phi} \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i) + 2S_i \hat{\phi} \xi_i^T(Z_i) \xi_i(Z_i)], \end{aligned} \quad (29)$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \dot{y}_{i+1} + \frac{y_{i+1}}{\tau_{i+1}} \right| &\leq \\ C_{i+1}(S_1, \dots, S_i, y_2, \dots, y_{i+1}, \hat{\phi}, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r), \end{aligned} \quad (30)$$

故有

$$\dot{y}_{i+1} y_{i+1} \leq -\frac{y_{i+1}^2}{\tau_{i+1}} + |y_{i+1}| C_{i+1}, \quad (31)$$

式中  $C_{i+1}(\cdot)$  为某一连续函数.

**定理 1** 考虑式(1)构成的闭环系统, 定义 Lyapunov 能量函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}^2, \quad (32)$$

在满足假设 1~假设 4 的条件下, 控制律选择为式(26), 则对于任意给定正常数  $p$ , 若  $V(0) \leq p$ , 则存在设计参数  $k_i, \tau_{i+1}, a_i, r, b_0$ , 使闭环系统的所有信号半全局一致终结有界; 且通过适当选择设计参数及任意给定初始紧集, 可使闭环系统的所有状态信号和参数  $\hat{\phi}$  最终收敛到某一有界紧集内.

**证明** 对  $V(t)$  求导, 并将前述式子代入整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ &-\sum_{i=1}^n (k_i - 1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} S_i y_{i+1} - \frac{b_0}{r} \tilde{\phi} \hat{\phi} + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1} \dot{y}_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{4}\eta_i^2 + \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{p_i^{*2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

由假设 2 和定理 1 表述知, 对于任意  $B_0 > 0$  和  $p > 0$ , 集合  $\Omega_d$  和  $\Omega_i = \left\{ \sum_{j=1}^i V_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} y_{j+1}^2 \leq p \right\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 分别是  $\mathbf{R}^3$  和  $\mathbf{R}^{2i-1}$  内的紧集, 则  $\Omega_d \times \Omega_i$  也是  $\mathbf{R}^{2i+2}$  内的紧集. 故  $C_{i+1}(\cdot)$  在集合  $\Omega_d \times \Omega_i$  内存在一个最大值  $M_{i+1}$ , 则由式(31)得

$$\dot{y}_{i+1} y_{i+1} \leq -\frac{y_{i+1}^2}{\tau_{i+1}} + \frac{y_{i+1}^2}{2} + \frac{M_{i+1}^2}{2}. \quad (34)$$

根据 Young's 不等式, 且注意到  $-2\tilde{\phi}\hat{\phi} \leq \phi^2 - \tilde{\phi}^2$ , 将式(34)代入(33)整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\sum_{i=1}^{n-1} \left( k_i - 1 - \frac{1}{2a_i} \right) S_i^2 - (k_n - 1)S_n^2 - \\ &\frac{b_0}{2r} \tilde{\phi}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\tau_{i+1}} - \frac{1}{2} - \frac{a_i}{2} \right) y_{i+1}^2 + \frac{b_0}{2r} \phi^2 + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4}\eta_i^2 + \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{p_i^{*2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

选择设计参数  $k_i \geq 1 + \frac{1}{2a_i} + 0.5\lambda_0$ ,  $k_n \geq 1 + 0.5\lambda_0$ ,  $\frac{1}{\tau_{i+1}} \geq 0.5\lambda_0 + \frac{1}{2} + \frac{a_i}{2}$ ,  $\lambda_0 = b_0$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,

且令  $c_0 = \frac{b_0}{2r} \phi^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4}\eta_i^2 + \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{p_i^{*2}}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{i+1}^2}{2}$ , 则式(35)可整理为

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_0 V + c_0. \quad (36)$$

令  $\lambda_0 > c_0/p$ , 则当  $V(t) = p$  时  $\dot{V}(t) < 0$ , 即对于  $\forall t \geq 0$ , 若  $V(0) \leq p$ , 则  $V(t) \leq p$ , 说明  $V(t) \leq p$  为

一个不变集. 将式(36)两边在  $[0, t]$  内积分, 可得

$$0 \leq V(t) \leq c_0 \lambda_0^{-1} + [V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}] e^{-\lambda_0 t}. \quad (37)$$

定义  $x(t) = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(t) = [y_1, \dots, y_n]^T$ ,  $x_r(t) = [y_r, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ ,  $x_r(t) \in \Omega_r \subset \mathbf{R}^n$ ; 令  $S(t) = x(t) - x_r(t)$ ,  $Q(t) = \text{diag}\{1/g_{i\lambda_i}\}$ , 则

$$V(t) = \frac{1}{2} S^T(t) Q(t) S(t) + \frac{1}{2} y^T(t) y(t) + \frac{1}{2r} \tilde{\phi}^2(t). \quad (38)$$

对式(37)进一步缩放得

$$0 \leq V(t) \leq V(0) + c_0 \lambda_0^{-1}, \quad \forall t \geq 0. \quad (39)$$

由式(39)知, 通过适当选择设计参数及给定初始紧集  $\Omega_0 = \{x(0), x_r(0), \hat{\phi}(0), y(0) \mid x(0), \hat{\phi}(0), y(0), x_r(0) \in \Omega_r\}$  可以确定  $V(0)$ . 由式(38)可得

$$\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|S(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q(t)) \|S(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} S^T(t) Q(t) S(t) \leq V(t), \quad (40)$$

$$\frac{1}{2r} \tilde{\phi}^2(t) \leq V(t), \quad \frac{1}{2} \|y(t)\|^2 \leq V(t), \quad (41)$$

结合式(39)得到

$$\|S(t)\| \leq c_{S \max}, \quad \|y(t)\| \leq c_{y \max}, \quad |\tilde{\phi}| \leq c_{\tilde{\phi} \max}. \quad (42)$$

因为  $S(t) = x(t) - x_r(t)$  和  $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi$ , 所以

$$\|x(t)\| \leq c_{S \max} + \|x_r(t)\| \leq c_{S \max} + \max_{\tau \in [0, t]} \{\|x_r(\tau)\|\}, \quad (43)$$

$$|\hat{\phi}| \leq c_{\tilde{\phi} \max} + |\phi|. \quad (44)$$

其中

$$c_{S \max} = \sqrt{\frac{2[V(0) + c_0 \lambda_0^{-1}]}{\lambda_{Q \min}}},$$

$$\lambda_{Q \min} = \min_{\tau \in [0, t]} \{\lambda_{\min}(Q(\tau))\};$$

$$c_{y \max} = \sqrt{2[V(0) + c_0 \lambda_0^{-1}]},$$

$$c_{\tilde{\phi} \max} = \sqrt{2r[V(0) + c_0 \lambda_0^{-1}]}. \quad (45)$$

闭环系统的所有状态信号和参数  $\hat{\phi}$  将保持在有界紧集  $\Omega$  内, 即

$$\Omega =$$

$$\{x(t), \hat{\phi}(t), y(t) \mid \|x(t)\| \leq c_{S \max} + \max_{\tau \in [0, t]} \{\|x_r(\tau)\|\},$$

$$x_r(t) \in \Omega_r, |\hat{\phi}| \leq c_{\tilde{\phi} \max} + |\phi|, \|y(t)\| \leq c_{y \max}\}.$$

由式(37), (40), (41)可得

$$\|S(t)\| \leq \sqrt{\frac{2[V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}] e^{-\lambda_0 t} + 2c_0 \lambda_0^{-1}}{\lambda_{Q \min}}}, \quad (45)$$

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{2\{[V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}] e^{-\lambda_0 t} + c_0 \lambda_0^{-1}\}}, \quad (46)$$

$$|\tilde{\phi}(t)| \leq \sqrt{2r\{[V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}] e^{-\lambda_0 t} + c_0 \lambda_0^{-1}\}}. \quad (47)$$

若  $V(0) = c_0/\lambda_0$ , 则  $\|S(t)\| \leq \mu_S^*$ . 若  $V(0) \neq c_0/\lambda_0$ , 由式(45)可知对于任意给定的  $\mu_S > \mu_S^*$ , 存在  $T_S$ ,

使得对  $\forall t > T_S$ , 有  $\|S(t)\| \leq \mu_S$ . 给定任意

$$\mu_S = \sqrt{\frac{2[V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}] e^{-\lambda_0 t} + 2c_0 \lambda_0^{-1}}{\lambda_{Q \min}}}, \quad V(0) \neq \frac{c_0}{\lambda_0},$$

若取

$$T_S = -\frac{1}{\lambda_0} \ln \left( \frac{\mu_S^2 \lambda_{Q \min} - 2c_0 \lambda_0^{-1}}{2[V(0) - c_0 \lambda_0^{-1}]} \right), \quad (48)$$

则当  $\forall t > T_S$  时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\| = \mu_S^*; \quad (49)$$

同理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = \mu_y^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\phi}| = \mu_{\tilde{\phi}}^*. \quad (50)$$

其中

$$\mu_S^* = \sqrt{\frac{2c_0}{\lambda_0 \lambda_{Q \min}}}, \quad \mu_y^* = \sqrt{2c_0 \lambda_0^{-1}}, \quad \mu_{\tilde{\phi}}^* = \sqrt{2r c_0 \lambda_0^{-1}}.$$

闭环系统的所有信号即  $S_i, y_{i+1}, \hat{\phi}$  等均半全局一致终结有界, 且闭环系统的所有状态信号和参数  $\hat{\phi}$  最终收敛到有界紧集  $\Omega_s$  内, 即

$$\Omega_s = \{x(t), y(t), \hat{\phi}(t) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\| = \mu_S^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = \mu_y^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\phi}| = \mu_{\tilde{\phi}}^*\}. \quad (51)$$

由此定理得证.  $\square$

**注1** 在定理中有3个集合: 初始紧集  $\Omega_0$ , 有界紧集  $\Omega$  和稳态紧集  $\Omega_s$ . 从证明过程可以看到: ① 当  $x_1(0) \in \Omega_0$  时,  $x_1(t)$  将不会离开集合  $\Omega$ , 且最终收敛到集合  $\Omega_s$  内; ②  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $\Omega_0$  域的大小影响  $\Omega$ , 但不影响  $\Omega_s$ ; ③  $\Omega_s$  (即稳态误差和  $\tilde{\phi}$ ) 可以通过选择神经网络节点数  $l_i$  和适当调节设计参数  $k_i, \tau_{i+1}, a_i, r, b_0$  而取得任意小.

## 5 数值仿真

考虑如下—类纯反馈非线性系统<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_2^3/5 + 0.1 \sin(x_1 x_2 t), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u + u^3/7 + 0.1 \cos(x_2 t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (52)$$

期望跟踪信号为  $y_r = 0.5[\sin t + \sin(1.5t)]$ . 初始条件为  $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 1.8, \hat{\phi}(0) = 0$ ; 控制器参数选择为  $k_1 = 12, k_2 = 15, a_1 = a_2 = 1, r = 15, b_0 = 0.02, \tau_2 = 0.1$ ; 神经网络节点数选择为  $l_1 = 13, l_2 = 25$ , 中心值  $\mu_i$  分别在区间  $[-2, 2]$  内均匀取值, 宽度  $\eta_i = 2$ .

仿真结果如图1~图3所示. 图1显示输出  $y = x_1$  能很好地跟踪期望信号  $y_r$ , 过渡过程好, 且稳态误差可收敛到0附近的一个小邻域内; 图2显示控制信号  $u$  在初始的1s内幅值最大值超过了25, 但随后快速收敛; 图3显示了更新参数  $\hat{\phi}$  的有界性. 从仿真结果可以清楚地看到, 所设计的控制器保证了闭环系统所有信号的有界性, 并且与文献[6]比较, 对于同样

的2阶SISO纯反馈系统,仅一个参数需要在线更新,而与神经网络节点数量无关,计算量明显减小.另外,定义的神经网络输入变量 $Z_2$ 的维数较文献[4-6]显著减少,降低了神经网络节点数,减轻了分析和计算的难度.

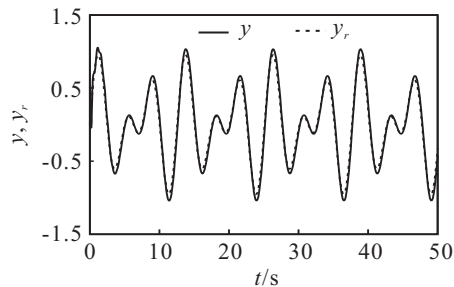


图1  $y$ 跟踪 $y_r$ 性能曲线

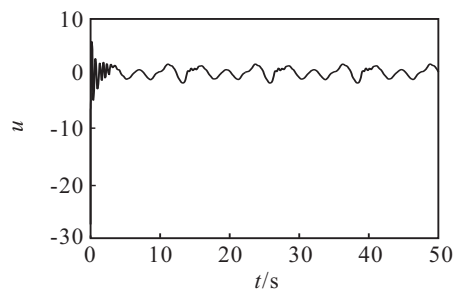


图2 控制信号 $u$ 曲线

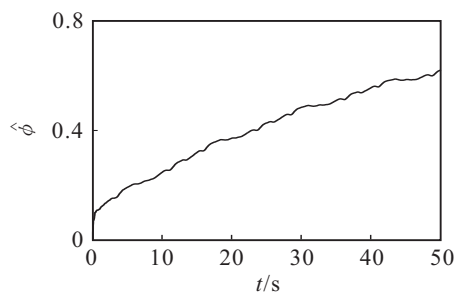


图3 更新参数 $\hat{\phi}$ 曲线

## 6 结论

本文就一类完全非仿射纯反馈非线性系统,提出了一种简化的自适应神经网络动态面控制方法.该控制方案具有以下特点:

1) 控制器结构简单,与文献[4-8]及其他反推方案相比,消除了反推控制固有的“微分爆炸”问题.

2) 计算量小,对于 $n$ 阶SISO纯反馈非线性系统,仅一个参数需要在线更新,且与神经网络节点数量无关;而现有的神经网络动态面控制方法<sup>[10]</sup>在设计的一步中至少需要设计一个自适应律.

3) 不需要增加任何附加项,完全避免了反馈线性化方法中可能出现的控制器奇异性问题.而为避免该问题,文献[10,13]均因引入附加项而增加了控制器设计和计算的复杂性.

4) 定义的神经网络输入变量 $Z_i$ 的维数较文献[4-6]显著减少,不仅降低了神经网络节点数,而且减轻了分析和计算的难度.

最后,通过Lyapunov稳定性定理证明了闭环系统的半全局稳定性,数值仿真验证了方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] 董文瀚, 孙秀霞, 林岩. 反推自适应控制的发展及应用[J]. 控制与决策, 2006, 21(10): 1081-1086.  
(Dong W H, Sun X X, Lin Y. Backstepping adaptive control: Development and applications[J]. Control and Decision, 2006, 21(10): 1081-1086.)
- [2] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995.
- [3] Ge S S, Hang C C, Lee T H, et al. Stable adaptive neural network control[M]. Norwell: Kluwer Academic, 2001.
- [4] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. Automatica, 2002, 38(4): 671-682.
- [5] Wang D, Huang J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form[J]. Automatica, 2002, 38(8): 1365-1372.
- [6] Wang C, Hill D J, Ge S S, et al. An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems[J]. Automatica, 2006, 42(5): 723-731.
- [7] Du Hongbin, Shao Huihe, Yao Pingjing. Adaptive neural network control for a class of low-triangular-structured nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2006, 17(2): 509-514.
- [8] Ren B, Ge S S, Lee T H, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input[C]. Proc of the 47th IEEE Conf on Decision and Control Cancun. Mexico, 2008: 86-91.
- [9] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [10] Zhang T P, Ge S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1895-1903.
- [11] Chen Bing, Liu Xiaoping, Liu Kefu, et al. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear strict-feedback systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1530-1535.
- [12] Chen Bing, Liu Xiaoping, Liu Kefu, et al. Novel adaptive neural control design for nonlinear MIMO time-delay systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1554-1560.
- [13] Ge S S, Tee K P. Approximation-based control of nonlinear MIMO time-delay systems[J]. Automatica, 2007, 43(1): 31-43.