第28卷第6期
2011 年 12 月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 28, No. 6
December 2011

文章编号:1007-4708(2011)06-0813-08

梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理

李锡夔*， 张俊波， 张 雪

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘 要:基于经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理,在平均场理论的框架下导出了梯度增强 Cosserat 连续体细、宏观均匀化方法的广义 Hill 定理。在梯度增强 Cosserat 连续体中,不仅宏观样条点上的应变和应力张量,而且它们的梯度均作用于与该样条点相关联的细观表征元(RVE)。依据此广义 Hill 定理,对梯度增强 Cosserat 连续体表征元提出了满足 Hill-Mandel 能量等价条件和平均场理论的强形式及弱形式边界条件。

关键词:Hill 定理;Hill-Mandel 条件;梯度增强 Cosserat 连续体;平均场理论;RVE 边界条件
中图分类号:TP273　　**文献标志码**:A

1 引 言

经典 Cauchy 连续体中基于 Hill-Mandel 能量等价条件的经典细宏观均匀化方法已经被扩展到 Cosserat 连续体[1]。Cosserat 连续体模型中由于考虑了微转角自由度,因此比 Cauchy 连续体模型能更准确地模拟颗粒材料的力学响应,同时在 Cosserat 连续体中引入的高阶连续结构能在宏观空间离散求解过程中作为正则化机制在材料失稳情况下保持问题的适定性。经典的一阶细、宏观计算途径假设细观层次的表征元(RVE)尺度远小于宏观表征尺度,与每个微结构表征元(RVE)相关联的宏观(应力应变)场假定为均匀场。这一均匀场假定使得一阶细、宏观计算均匀化方法不能有效处理微结构的尺寸效应。同时,均匀场假定对于宏观场急剧变化、且其高梯度不能忽略的关键区域并不适用。为了建立精确的多尺度计算均匀化模型,应在一阶计算均匀化方法的基础上发展高阶计算均匀化方法,即作用于微结构表征元的宏观量不仅只有应变张量(或应力张量),同时还应包括它的梯度[2,3]。

Kouznetsova 等提出了非均质 Cauchy 连续体的梯度增强计算均匀化过程[2,3]。为发展非均质梯度增强 Cosserat 连续体在平均场理论框架下的细宏观均匀化方法,需要首先建立梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理。但在目前已有文献中尚未见到相关工作发表。本文首先详细推导了梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理。值得强调的是,本文所导出的广义 Hill 定理可退化成梯度增强 Cauchy 连续体、经典 Cosserat 连续体以及经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理形式。

在表征元(RVE)上施加正确的边界条件,对于推导基于细观分析的宏观本构模型和相应的宏观本构张量以及求解非均质细观结构 RVE 的力学响应至关重要。Hill 定理正是指导如何正确施加 RVE 边界条件,以保证 Hill-Mandel 能量等价条件成立的理论基础。经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理首先由 Hill[4] 提出。随着 Cosserat 连续体理论在复合材料和颗粒材料分析领域的广泛应用[5-8] 以及针对 Cosserat 连续体均匀化方法的研究进展[9-13],李锡夔等[1,14] 导出了 Cosserat 连续体的 Hill 定理,并对其表征元的边界条件进行了讨论。基于本文推导建立的广义 Hill 定理,本文进一步对梯度增强 Cosserat 连续体及其退化情况推导和讨论了满足 Hill-Mandel 能量等价条件和平均场理论的表征元强形式及弱形式边界条件。

2 Cosserat 理论基本公式

Cosserat 连续体模型中的独立运动学自由度包含线位移 u_i 和微转角 ω_i。因而作用于一个材料点上除经典的 Cauchy 应力 σ_{ji},还有偶应力 μ_{ji}。与应力 σ_{ji} 和偶应力 μ_{ji} 共轭的应变张量 ε_{ji} 及微曲率

收稿日期:2010-04-26;**修改稿收到日期**:2010-12-18.
基金项目:国家自然科学基金(90715011,10672033);国家 973(2010CB731502)资助项目.
作者简介:李锡夔*(1940-),男,教授,博士生导师(E-mail:xikuili@dlut.edu.cn).

κ_{ji} 定义如下：

$$\varepsilon_{ji}=u_{i,j}-e_{kji}\omega_k,\ \kappa_{ji}=\omega_{i,j} \tag{1,2}$$

式中 e_{kji} 为置换张量，应变 ε_{ji} 的梯度由三阶张量 E_{ljk} 表示，其可以分解成以下两部分，即

$$\mathrm{E}_{ljk}=\frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x_l}=\hat{\mathrm{E}}_{ljk}+\hat{\hat{\mathrm{E}}}_{ljk} \tag{3}$$

式中

$$\hat{\mathrm{E}}_{ljk}=\frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_l}=u_{k,jl},\ \hat{\hat{\mathrm{E}}}_{ljk}=-e_{ijk}\omega_{i,l} \tag{4}$$

需要指出的是 $\hat{\mathrm{E}}_{ljk}$ 具有对称性，即

$$\hat{\mathrm{E}}_{ljk}=\frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_l}=u_{k,jl}=\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x_j}=u_{k,lj}=\hat{\mathrm{E}}_{jlk} \tag{5}$$

平衡方程：

$$\sigma_{ji,j}=0,\ \mu_{ji,j}+e_{ijk}\sigma_{jk}=0 \tag{6,7}$$

边界条件：

$$t_i=\sigma_{ji}n_j,\ m_i=\mu_{ji}n_j \tag{8,9}$$

式中 t_i 为表面力，m_i 为表面力矩，n_j 为表面的单位外法向量。

3 梯度增强 Cosserat 连续体计算均匀化的广义 Hill 定理

假设以一个典型的宏观样条点（比如有限元网格中的 Gauss 积分点）为中心所取的表征元（RVE）体积为 V，边界为 S。对于 RVE 在指定边界力（t_i，m_i）或边界位移（u_i，ω_i）作用下的任意细观应力场 σ_{ji}，μ_{ji} 和细观应变场 ε_{ji}，κ_{ji}；定义 $\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}$ 和 $\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}$ 分别表示 RVE 内相应物理量的体积平均，即

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}\mathrm{dV} \tag{10}$$

$$\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\mu_{ji}\kappa_{ji}\mathrm{dV} \tag{11}$$

在本文中约定，若（$*$）表示细观量，则（$\bar{*}$）表示细观量在表征元全域的体积平均。根据平均场理论可有如下表达式：

$$\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{ji}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\sigma_{ji}\mathrm{dV}=\langle\sigma_{ji}\rangle\\
&\bar{\varepsilon}_{ji}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\varepsilon_{ji}\mathrm{dV}=\langle\varepsilon_{ji}\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{ji}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\mu_{ji}\mathrm{dV}=\langle\mu_{ji}\rangle\\
&\bar{\kappa}_{ji}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\kappa_{ji}\mathrm{dV}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\omega_{i,j}\mathrm{dV}=\langle\kappa_{ji}\rangle
\end{aligned} \tag{13}$$

式（12，13）表示 RVE 细观应力和细观应变的体积平均分别等于宏观样本点处的宏观应力量和宏观应变量，如 $\bar{\sigma}_{ji}=\langle\sigma_{ji}\rangle$。进一步地，梯度增强 Cosserat 连续体宏观样本点上的细观平均应变 $\bar{\varepsilon}_{jk}$ 的梯度 $\bar{\mathrm{E}}_{ljk}$ 以及细观平均应力偶 $\bar{\Sigma}_{ljk}$ 的定义如下：

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{E}}_{ljk}&=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\mathrm{E}_{ljk}\mathrm{dV}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x_l}\mathrm{dV}=\\
&\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\frac{\partial(u_{k,j}-e_{ijk}\omega_i)}{\partial x_l}\mathrm{dV}=\\
&\bar{u}_{k,jl}-e_{ijk}\bar{\omega}_{i,l}=\langle\mathrm{E}_{ljk}\rangle
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\bar{\Sigma}_{ljk}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\Sigma_{ljk}\mathrm{dV}=\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\sigma_{jk}x_l\mathrm{dV}=\langle\Sigma_{ljk}\rangle \tag{15}$$

式中 三阶细观应力偶：

$$\Sigma_{ljk}=\sigma_{jk}x_l \tag{16}$$

与式(3) 类似，$\bar{\mathrm{E}}_{ljk}$（或者 $\langle\mathrm{E}_{ljk}\rangle$）能够作如下分解：

$$\bar{\mathrm{E}}_{ljk}=\hat{\bar{\mathrm{E}}}_{ljk}+\hat{\hat{\bar{\mathrm{E}}}}_{ljk}$$

式中

$$\hat{\bar{\mathrm{E}}}_{ljk}=\bar{u}_{k,jl},\ \hat{\hat{\bar{\mathrm{E}}}}_{ljk}=-e_{ijk}\bar{\omega}_{i,l} \tag{17}$$

式(15) 中的 $\bar{\Sigma}_{ljk}$ 能分解成对称和反对称部分：

$$\bar{\Sigma}_{ljk}=\hat{\bar{\Sigma}}_{ljk}+\tilde{\bar{\Sigma}}_{ljk} \tag{18}$$

式中

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{\Sigma}}_{ljk}&=\frac{1}{2\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}(\sigma_{jk}x_l+\sigma_{lk}x_j)\mathrm{dV}=\\
&\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\hat{\Sigma}_{ljk}\mathrm{dV}=\langle\hat{\Sigma}_{ljk}\rangle
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{\Sigma}}_{ljk}&=\frac{1}{2\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}(\sigma_{jk}x_l-\sigma_{lk}x_j)\mathrm{dV}=\\
&\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}}\tilde{\Sigma}_{ljk}\mathrm{dV}=\langle\tilde{\Sigma}_{ljk}\rangle
\end{aligned} \tag{20}$$

对称部分 $\hat{\bar{\Sigma}}_{ljk}$ 和反对称部分 $\tilde{\bar{\Sigma}}_{ljk}$ 满足公式

$$\hat{\bar{\Sigma}}_{ljk}=\hat{\bar{\Sigma}}_{jlk},\ \tilde{\bar{\Sigma}}_{ljk}=-\tilde{\bar{\Sigma}}_{jlk} \tag{21}$$

基于以上定义和表达式，梯度增强 Cosserat 连续体计算均匀化的广义 Hill 定理可表示为

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}+\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-\bar{\Sigma}_{lji}\bar{\mathrm{E}}_{lji}=\\
&\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{S}}(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{dS}+\\
&\frac{1}{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{S}}(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i-\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_{i,l}x_l)\mathrm{dS}
\end{aligned} \tag{22}$$

式中 x_j（或者 x_l）为 RVE 边界 S 上的点的坐标分量。

为证明式(22) 给出的广义 Hill 定理成立，首先将式(22) 等号右端的第一项边界积分展开成三

部分，并进行如下推导。

推导 1：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})u_i\,dS=$$
$$\frac{1}{V}\int_S n_k\sigma_{ki}u_i\,dS-\frac{1}{V}\int_S n_k\bar{\sigma}_{ki}u_i\,dS=$$
$$\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial(\sigma_{ki}u_i)}{\partial x_k}dV-\frac{1}{V}\left(\int_V\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dV\right)\bar{\sigma}_{ki}=$$
$$\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\sigma_{ki}\,dV-\bar{u}_{i,k}\bar{\sigma}_{ki}=$$
$$\overline{\sigma_{ki}u_{i,k}}-\bar{u}_{i,k}\bar{\sigma}_{ki}=\overline{\sigma_{ji}u_{i,j}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{u}_{i,j}\tag{23}$$

推导 2：

$$-\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\bar{u}_{i,j}x_j\,dS=$$
$$-\left(\frac{1}{V}\int_S n_k\sigma_{ki}x_j\,dS\right)\bar{u}_{i,j}+\left(\frac{1}{V}\int_S n_kx_j\,dS\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,j}=$$
$$-\left(\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial(\sigma_{ki}x_j)}{\partial x_k}dV\right)\bar{u}_{i,j}+\left(\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial x_j}{\partial x_k}dV\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,j}=$$
$$-\left(\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\sigma_{ki}\,dV\right)\bar{u}_{i,j}+\left(\frac{1}{V}\int_V\delta_{jk}\,dV\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,j}=$$
$$-\left(\frac{1}{V}\int_V\sigma_{ji}\,dV\right)\bar{u}_{i,j}+\bar{\sigma}_{ji}\bar{u}_{i,j}=0\tag{24}$$

推导 3：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\left(-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l\right)dS=$$
$$-\frac{1}{2V}\left[\left(\int_S n_k\sigma_{ki}x_jx_l\,dS\right)\bar{u}_{i,jl}-\left(\int_S n_kx_jx_l\,dS\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,jl}\right]=$$
$$-\frac{1}{2V}\left[\left(\int_V\frac{\partial(\sigma_{ki}x_jx_l)}{\partial x_k}dV\right)\bar{u}_{i,jl}-\left(\int_V\frac{\partial(x_jx_l)}{\partial x_k}dV\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,jl}\right]=$$
$$-\frac{1}{2V}\left[\left(\int_V\left(\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x_k}x_jx_l+\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\sigma_{ki}x_l+\frac{\partial x_l}{\partial x_k}\sigma_{ki}x_j\right)dV\right)\bar{u}_{i,jl}-\right.$$
$$\left.\left(\int_V\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}x_l+\frac{\partial x_l}{\partial x_k}x_j\right)dV\right)\bar{\sigma}_{ki}\bar{u}_{i,jl}\right]=$$
$$-\frac{1}{2V}\left(\int_V(\sigma_{ji}x_l+\sigma_{li}x_j)dV\right)\bar{u}_{i,jl}=-\hat{\bar{\Sigma}}_{lji}\hat{\bar{E}}_{lji}\tag{25}$$

式(25) 中第四个等号的成立是利用了式(6) 以及如下等式：

$$\int_V x_l\,dV=0,\quad\int_V x_j\,dV=0\tag{26}$$

只需将未变形的 RVE 的几何中心作为局部 Cartesian 坐标的原点即可使得上式成立，如图 1 所示。需要指出的是，这里局部坐标系的设置并不会失去问题提法的一般性。式(25) 中第 5 个等号的成立是利用了式(17，19)。根据式(23～25) 的推导结果，式(22) 等号右端第一项边界积分可以写成如

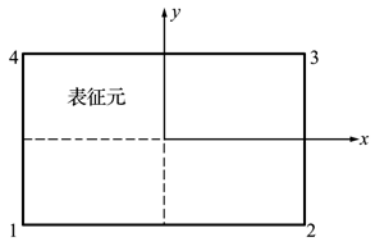

图 1　表征单元(RVE)

Fig. 1　Representative Volume Element (RVE)

下形式：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\left(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l\right)dS=$$
$$\overline{\sigma_{ji}u_{i,j}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{u}_{i,j}-\hat{\bar{\Sigma}}_{lji}\hat{\bar{E}}_{lji}\tag{27}$$

同时，将式(22) 等号右端的第二项边界积分类似的展开成三部分，并进行如下推导。

推导 4：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\omega_i\,dS=$$
$$\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ji}\omega_i)_{,j}\,dV-\bar{\mu}_{ji}\frac{1}{V}\int_V\omega_{i,j}\,dV=$$
$$\frac{1}{V}\int_V\mu_{ji}\omega_{i,j}\,dV+\frac{1}{V}\int_V\mu_{ji,j}\omega_i\,dV-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}=$$
$$\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}+\frac{1}{V}\int_V\mu_{ji,j}\omega_i\,dV=$$
$$\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}+\frac{1}{V}\int_V(-e_{ijk}\sigma_{jk})\omega_i\,dV=$$
$$\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-e_{kji}\overline{\sigma_{ji}\omega_k}\tag{28}$$

推导 5：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(-\bar{\omega}_i)dS=$$
$$-\frac{1}{V}\bar{\omega}_i\int_V\mu_{ji,j}\,dV=$$
$$-\frac{1}{V}\bar{\omega}_i\int_V(-e_{ijk}\sigma_{jk})dV=e_{kji}\bar{\sigma}_{ji}\bar{\omega}_k\tag{29}$$

推导 6：

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(-\bar{\omega}_{i,l}x_l)dS=$$
$$\left(-\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}x_l\,dS\right)\bar{\omega}_{i,l}+\left(\frac{1}{V}\int_S n_kx_l\,dS\right)\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,l}=$$
$$\left(-\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial(\mu_{ki}x_l)}{\partial x_k}dV\right)\bar{\omega}_{i,l}+\left(\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial x_l}{\partial x_k}dV\right)\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,l}=$$
$$-\frac{1}{V}\int_V\left(\frac{\partial\mu_{ki}}{\partial x_k}x_l+\delta_{lk}\mu_{ki}\right)dV\bar{\omega}_{i,l}+\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,k}=$$
$$\left(-\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial\mu_{ki}}{\partial x_k}x_l\,dV\right)\bar{\omega}_{i,l}=\left(-\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial x_j}x_l\,dV\right)\bar{\omega}_{i,l}=$$
$$\left(-\frac{1}{V}\int_V-e_{ijk}\sigma_{jk}x_l\,dV\right)\bar{\omega}_{i,l}=e_{ijk}\bar{\Sigma}_{ljk}\bar{\omega}_{i,l}\tag{30}$$

将式(28 ～ 30)代入式(22)右端第二项积分得

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i-\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_{i,l}x_l)\mathrm{d}S=$$
$$\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-e_{kji}(\overline{\sigma_{ji}\omega_k}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{\omega}_k)+e_{ijk}\bar{\bar{\Sigma}}_{ljk}\bar{\omega}_{i,l} \tag{31}$$

合并式(27,31)得

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i-\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_{i,l}x_l)\mathrm{d}S=$$
$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}+\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-\hat{\bar{\Sigma}}_{lji}\hat{\bar{E}}_{lji}+e_{ijk}\bar{\Sigma}_{ljk}\bar{\omega}_{i,l}=$$
$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}+\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-\bar{\Sigma}_{lji}\hat{\bar{E}}_{lji}-\bar{\Sigma}_{ljk}\hat{\bar{\bar{E}}}_{ljk}=$$
$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}+\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}-\bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji}-\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}-\bar{\Sigma}_{lji}\bar{E}_{lji} \tag{32}$$

至此,式(22)得证,即式(22)为梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理。

4 梯度增强 Cosserat 连续体的 Hill-Mandel 条件和 RVE 边界条件

由式(22)可知,梯度增强 Cosserat 连续体的 Hill-Mandel 条件为

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}}+\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}}=\bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji}+\bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}+\bar{\Sigma}_{lji}\bar{E}_{lji} \tag{33}$$

仅当 RVE 满足如下两个边界条件时才成立:

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S=0 \tag{34}$$

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i-\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_{i,l}x_l)\mathrm{d}S=0 \tag{35}$$

利用式(22)给出的梯度增强 Cosserat 连续体广义 Hill 定理可以指导如何满足 Hill-Mandel 条件,即 RVE 边界条件必须满足式(34,35)。可以通过强形式或弱形式,即两个边界积分中被积项逐点为零或积分意义上满足式(34,35)及满足以上两个边界条件。

4.1 梯度增强 Cosserat 连续体的强形式边界条件

由式(34,35)可知,为满足 Hill-Mandel 条件在 RVE 边界 S 上施加强形式边界条件可能有如下四类。

(1) 位移边界条件:指定边界线位移和微转角

$$u_i|_S=\bar{u}_{i,j}x_j+\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l$$
$$\omega_i|_S=\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_{i,l}x_l \tag{36}$$

(2) 力的边界条件:指定表面力和表面力矩

$$t_i|_S=(n_k\sigma_{ki})|_S=n_k\bar{\sigma}_{ki}$$
$$m_i|_S=(n_k\mu_{ki})|_S=n_k\bar{\mu}_{ki} \tag{37}$$

(3) 混合边界条件 1:指定边界线位移和表面力矩

$$u_i|_S=\bar{u}_{i,j}x_j+\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l \tag{38}$$

$$m_i|_S=(n_k\mu_{ki})|_S=n_k\bar{\mu}_{ki} \tag{39}$$

(4) 混合边界条件 2:指定边界微转角和表面力

$$\omega_i|_S=\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_{i,l}x_l \tag{40}$$

$$t_i|_S=(n_k\sigma_{ki})|_S=n_k\bar{\sigma}_{ki} \tag{41}$$

在此需要指出的是,以上四类边界条件虽然均满足 Hill-Mandel 能量等价条件,却并非均能作为 RVE 的边界条件。若选取式(37)作为 RVE 的边界条件,则表征元的力矩平衡方程为

$$\int_S e_{ijk}x_jt_k\mathrm{d}S+\int_S m_i\mathrm{d}S=\int_S e_{ijk}x_jn_m\bar{\sigma}_{mk}\mathrm{d}S+$$
$$\int_S n_k\bar{\mu}_{ki}\mathrm{d}S=e_{ijk}\bar{\sigma}_{jk}V\neq 0 \tag{42}$$

即 RVE 并非自平衡,违背了平均场理论的基本假设,表明式(37)不能取作 RVE 的边界条件。下面论证由式(36)给出的位移边界条件能够满足平均场理论,

$$\frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_S \omega_in_j\mathrm{d}S=$$
$$\frac{1}{V}\int_S (\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_{i,l}x_l)n_j\mathrm{d}S=$$
$$\bar{\omega}_i\frac{1}{V}\int_S n_j\mathrm{d}S+\bar{\omega}_{i,l}\frac{1}{V}\int_S x_ln_j\mathrm{d}S=$$
$$\bar{\omega}_{i,l}\frac{1}{V}\int_V x_{l,j}\mathrm{d}V=\bar{\omega}_{i,l}\delta_{lj}=\bar{\omega}_{i,j} \tag{43}$$

$$\frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_S u_in_j\mathrm{d}S=$$
$$\frac{1}{V}\int_S (\bar{u}_{i,k}x_k+\frac{1}{2}\bar{u}_{i,kl}x_kx_l)n_j\mathrm{d}S=$$
$$\bar{u}_{i,k}\frac{1}{V}\int_V x_{k,j}\mathrm{d}V+\bar{u}_{i,kl}\frac{1}{2V}\int_V (x_kx_l)_{,j}\mathrm{d}V=$$
$$\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{i,kl}\frac{1}{2V}\int_V (x_{k,j}x_l+x_kx_{l,j})\mathrm{d}V=$$
$$\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{i,jl}\frac{1}{2V}\int_V x_l\mathrm{d}V+\bar{u}_{i,kj}\frac{1}{2V}\int_V x_k\mathrm{d}V=\bar{u}_{i,j} \tag{44}$$

式(44)最后一个等号的成立是利用了式(26)。式(43,44)表明式(36)给出的位移边界条件满足

平均场理论。同样可以验证采用式(38 ～ 41)所表示的两组混合边界条件也满足平均场理论(可参考上述对另两类 RVE 边界条件的讨论作出验证,因限于篇幅和与以上讨论的类似性,验证过程略去)。但注意到在宏观尺度的梯度增强 Cosserat 连续体有限元等数值方法分析中通常采用位移(应变)驱动方案,因此 RVE 边界 S 上施加式(36)所表示的位移边界条件是合理的自然选择。

4.2 梯度增强 Cosserat 连续体的弱形式边界条件

本节讨论满足 Hill-Mandel 能量等价条件的弱形式边界条件。例如,对矩形 RVE 设定某种在积分意义上使式(34,35)满足的周期性边界条件。在经典 Cauchy 连续体中选择采用周期性边界条件已有许多论述,与均一位移和力的边界条件相比,采用周期性边界条件能得到更合理的宏观有效模量。

为讨论方便,本文仅考虑初始形状为矩形的 RVE,如图 1 所示。

(I) 在式(34)中,线位移 u_i 和应力 σ_{ki} 分别指定为

$$u_i|_S=(\bar{u}_{i,j}x_j+\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l+u_i^*)|_S \quad (45)$$

$$t_i|_S=(n_k\sigma_{ki})|_S=t_i^*|_S=(n_k\sigma_{ki}^*)|_S \quad (46)$$

式(45)中 $u_i^*|_S$ 表示 RVE 周期性边界位移,周期性位移边界条件满足,

$$u_i^*(s)|_b=u_i^*(s)|_t,\ u_i^*(s)|_l=u_i^*(s)|_r \quad (47)$$

式中 下标 b,t,l 和 r 分别为 RVE 的下边界、上边界、左边界和右边界(见图 1),s 为边界上的局部坐标,式(47)表示 RVE 上对应边界的任意两个具有相同局部坐标值的点具有相同的周期性位移 u_i^*。

力的周期性边界条件要求作用于 RVE 上对应边界的任意两个具有相同局部坐标值的点的面力大小相等、方向相反,即

$$t_i^*(s)|_b=-t_i^*(s)|_t,\ t_i^*(s)|_l=-t_i^*(s)|_r \quad (48)$$

或者

$$[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]|_b=-[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]|_t$$

$$[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]|_l=-[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]|_r \quad (49)$$

由图 1 所示的 RVE 形状可知,有

$$n_k(s)|_b=-n_k(s)|_t,\ n_k(s)|_l=-n_k(s)|_r \quad (50)$$

考察式(49,50)可得

$$\sigma_{ki}^*(s)|_b=\sigma_{ki}^*(s)|_t,\ \sigma_{ki}^*(s)|_l=\sigma_{ki}^*(s)|_r \quad (51)$$

值得强调的是,式(45)中指定的边界位移由均一边界线位移与周期性边界线位移两部分组成,分别如式(38,48)所示。

为验证式(45,46)所给出边界条件的合理性,首先来证明式(45)中指定的位移边界条件服从一阶平均场理论,即

$$<u_{i,j}>=\bar{u}_{i,j}=\frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V \quad (52)$$

注意到应变梯度 $\bar{u}_{i,kl}$ 的对称性,即 $\bar{u}_{i,kl}=\bar{u}_{i,lk}$,利用高斯定理和式(45)可进行如下推导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V&=\frac{1}{V}\int_S u_in_j\mathrm{d}S=\\&\frac{1}{V}\int_S(\bar{u}_{i,k}x_k+\frac{1}{2}\bar{u}_{i,kl}x_kx_l+u_i^*)n_j\mathrm{d}S=\\&\bar{u}_{i,j}+\frac{1}{2V}\int_S\bar{u}_{i,kl}x_kx_ln_j\mathrm{d}S+\frac{1}{V}\int_S u_i^*n_j\mathrm{d}S=\\&\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{i,jk}\frac{1}{V}\int_V x_k\mathrm{d}V+\frac{1}{V}\int_S u_i^*n_j\mathrm{d}S\end{aligned} \quad (53)$$

由式(26)可知,式(53)中最后一个等式中的第二项为零。由式(47,50)可知,最后一个等式中的第三项为零。因此,式(52)成立。

下面继续证明式(45,46)是否满足 Hill-Mandel 能量等价条件,即验证式(34)是否成立。将式(45,46)代入式(34)可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j-\frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S=\\&\frac{1}{V}\int_S(n_k\sigma_{ki}^*-n_k\bar{\sigma}_{ki})u_i^*\mathrm{d}S=\\&\frac{1}{V}\int_S n_k\sigma_{ki}^*u_i^*\mathrm{d}S-\frac{1}{V}\bar{\sigma}_{ki}\int_S n_ku_i^*\mathrm{d}S\end{aligned} \quad (54)$$

由式(47,50,51)可知,最后一个等式中的两个积分项均为零。因此,式(34)成立。

(II) 在式(35)中,微转角 ω_i 和偶应力 μ_{ki} 分别指定为

$$\omega_i|_S=(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_{i,j}x_j+\omega_i^*)|_S \quad (55)$$

$$m_i|_S=(n_k\mu_{ki})|_S=m_i^*|_S=(n_k\mu_{ki}^*)|_S \quad (56)$$

与式(47,48,51)类似,RVE 边界上 $\omega_i^*|_S$,$m_i^*|_S$ 和 $\mu_{ki}^*|_S$ 的周期性条件要求满足,

$$\omega_i^*(s)|_b=\omega_i^*(s)|_t,\ \omega_i^*(s)|_l=\omega_i^*(s)|_r \quad (57)$$

$$m_i^*|_b=-m_i^*(s)|_t,\ m_i^*(s)|_l=-m_i^*(s)|_r \quad (58)$$

$$\mu_{ki}^*(s)|_b=\mu_{ki}^*(s)|_t,\ \mu_{ki}^*(s)|_l=\mu_{ki}^*(s)|_r \quad (59)$$

值得强调的是,式(55)中指定的边界位移由均一微转角边界条件与周期性边界条件两部分组成,分别如式(40,57)所示。

为验证式(55,56)所给出边界条件的合理性，首先来证明式(55)中指定的位移边界条件服从一阶平均场理论，即

$$\langle \omega_{i,j} \rangle = \bar{\omega}_{i,j} = \frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j} \mathrm{d}V \tag{60}$$

利用高斯定理和式(55)可进行如下推导，

$$\frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S \omega_i n_j \mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,k}x_k + \omega_i^*) n_j \mathrm{d}S =$$
$$\bar{\omega}_i \frac{1}{V}\int_S n_j \mathrm{d}S + \bar{\omega}_{i,j} + \frac{1}{V}\int_S \omega_i^* n_j \mathrm{d}S \tag{61}$$

由式(50,57)可知，最后一个等式中的第一项和第三项为零。因此，式(60)成立。

下面证明式(55,56)是否满足 Hill-Mandel 能量等价条件，即验证式(35)是否成立。

将式(55,56)代入式(35)可得

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i - \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (m_i^* - n_k\bar{\mu}_{ki})\omega_i^* \mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S m_i^*\omega_i^* \mathrm{d}S - \bar{\mu}_{ki}\frac{1}{V}\int_S n_k\omega_i^*\mathrm{d}S \tag{62}$$

由式(50,57,58)可知，最后一个等式中的两个积分项均为零。因此，式(35)成立。

综上所述，对于梯度增强宏观 Cosserat 连续体，在 RVE 上由式(45,46)表示的位移和应力边界条件以及式(55,56)表示的微转角和偶应力边界条件可行，即在弱形式下满足式(34,35)或式(33)中的 Hill-Mandel 能量等价条件，同时也满足平均场理论。

如果式(45,55)中指定的边界条件仅包含周期性边界条件，即

$$u_i|_S = (u_i^*)|_S, \quad \omega_i|_S = (\omega_i^*)|_S \tag{63,64}$$

式中 $(u_i^*)|_S$ 和 $(\omega_i^*)|_S$ 满足式(47,57)，由式(63)可得

$$\frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S u_i n_j \mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S u_i^* n_j \mathrm{d}S = 0 \neq \bar{u}_{i,j} \tag{65}$$

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki}^* - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i^* - \bar{u}_{i,j}x_j - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S \neq 0 \tag{66}$$

由周期性微转角边界条件式(64)可得

$$\frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S \omega_i n_j \mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S \omega_i^* n_j \mathrm{d}S = 0 \neq \bar{\omega}_{i,j} \tag{67}$$

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i - \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (m_i^* - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i^* - \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S \neq 0 \tag{68}$$

式(65～68)表明，若 RVE 的边界条件采用如式(63,64)所表示的纯周期位移边界条件，平均场理论和 Hill-Mandel 能量等价条件均不能被满足。

5 广义 Hill 定理的退化和经典 Cosserat 连续体 RVE 边界条件

5.1 广义 Hill 定理的退化

本文导出的广义 Hill 定理是现有 Hill 定理的一般形式，它能够退化为梯度增强 Cauchy 连续体、经典 Cosserat 连续体以及经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理形式。

当忽略与微转角、微曲率和偶应力相关的项，式(22)退化成如下形式：

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}} - \bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji} - \bar{\Sigma}_{lji}\bar{E}_{lji} =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S \tag{69}$$

式中

$$\bar{E}_{lji} = \bar{\hat{E}}_{lji} = \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial x_l} = \bar{u}_{i,jl} \tag{70}$$

即 $\bar{E}_{lji}$ 成为对称张量，式(69)即为梯度增强 Cauchy 连续体计算均匀化的 Hill 定理。应用式(69,70)也可改写成如下形式：

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}} - \bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji} - \bar{\hat{\Sigma}}_{lji}\bar{E}_{lji} =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,jl}x_jx_l)\mathrm{d}S \tag{71}$$

另一方面，若忽略与应变梯度、高阶应力相关的项，则式(22)退化成如下形式：

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}} + \overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}} - \bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji} - \bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji} =$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S +$$
$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i - \bar{\omega}_i)\mathrm{d}S \tag{72}$$

上式即为经典 Cosserat 连续体计算均匀化的 Hill 定理。最后，若在式(72)的基础上进一步忽略与微转角、微曲率和偶应力相关的项，则退化成如下形式：

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}} - \bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji} = \frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{\varepsilon}_{ji}x_j)\mathrm{d}S \tag{73}$$

式中

$$\bar{\varepsilon}_{ji} = \frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V \tag{74}$$

式(73) 即为经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理。

5.2　经典 Cosserat 连续体 RVE 边界条件

当颗粒材料模型化为经典非均质 Cosserat 连续体时，由式(71) 给出的 Hill 定理可得到 Hill-Mandel 能量等价条件为

$$\overline{\sigma_{ji}\varepsilon_{ji}} + \overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}} = \bar{\sigma}_{ji}\bar{\varepsilon}_{ji} + \bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji} \tag{75}$$

为满足 Hill-Mandel 能量等价条件要求在 RVE 上施加满足如下两个边界积分条件，即式(72) 右端为零，即

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S = 0 \tag{76}$$

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i - \bar{\omega}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{77}$$

与式(36～41) 指定的梯度增强 Cosserat 连续体 RVE 上强形式边界条件类似，对于经典 Cosserat 连续体如下。

(1) 位移边界条件：指定边界线位移和微转角

$$u_i|_S = \bar{u}_{i,j}x_j,\ \omega_i|_S = \bar{\omega}_i \tag{78}$$

(2) 力的边界条件：指定表面力和表面力矩

$$t_i|_S = (n_k\sigma_{ki})|_S = n_k\bar{\sigma}_{ki}$$
$$m_i|_S = (n_k\mu_{ki})|_S = n_k\bar{\mu}_{ki} \tag{79}$$

(3) 混合边界条件 1：指定边界线位移和表面力矩

$$u_i|_S = \bar{u}_{i,j}x_j,\ \ m_i|_S = (n_k\mu_{ki})|_S = n_k\bar{\mu}_{ki} \tag{80,81}$$

(4) 混合边界条件 2：指定边界微转角和表面力

$$\omega_i|_S = \bar{\omega}_i,\ \ t_i|_S = (n_k\sigma_{ki})|_S = n_k\bar{\sigma}_{ki} \tag{82,83}$$

然而，由式(78,82) 中指定的边界条件 $\omega_i|_S = \bar{\omega}_i$ 可得

$$\bar{\kappa}_{ji} = \bar{\omega}_{i,j} = \frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S \omega_i n_j\mathrm{d}S = \bar{\omega}_i\frac{1}{V}\int_S n_j\mathrm{d}S \equiv 0 \tag{84}$$

式(84) 表明宏观 Cosserat 连续体中微曲率恒等于零，由于在 Cosserat 连续体中假定存在非零的平均微曲率，因此与微曲率的一阶平均场理论不符；另外，由 4.1 节的讨论和式(42) 可排除第二种边界条件，即式(79) 中指定的力的边界条件。因此，对于经典 Cosserat 连续体满足 Hill-Mandel 能量等价条件式(75) 的强形式边界条件，只能是由式(80,81) 指定的线位移和表面力矩混合边界条件。

另外，也可以通过在 RVE 上施加弱形式边界条件满足能量等价条件式(75)，即在弱形式(或积分形式) 下满足式(76,77)。

考虑式(45,55) 指定周期性边界条件在经典 Cosserat 连续体中的退化形式，即

$$u_i|_S = (\bar{u}_{i,j}x_j + u_i^*)|_S,\ \ \omega_i|_S = (\bar{\omega}_i + \omega_i^*)|_S \tag{85,86}$$

以及周期性条件式(46,56)。式中 $u_i^*|_S$，$\omega_i^*|_S$，$t_i^*|_S$，$\sigma_{ki}^*|_S$，$m_i^*|_S$ 和 $\mu_{ki}^*|_S$ 分别满足式(47,57,48,51,58,59) 指定的周期性条件。

为验证式(85 ～ 86) 及式(46,56) 所表示的边界条件以弱形式(积分形式) 满足式(76,77)，并满足平均场理论，首先来验证式(85) 指定的线位移边界条件满足平均场理论，即

$$\frac{1}{V}\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S u_i n_j\mathrm{d}S = \frac{1}{V}\int_S (\bar{u}_{i,k}x_k + u_i^*)n_j\mathrm{d}S = \bar{u}_{i,j} + \frac{1}{V}\int_S u_i^* n_j\mathrm{d}S \tag{87}$$

由式(47,50) 可知有

$$\frac{1}{V}\int_S u_i^* n_j\mathrm{d}S = 0 \tag{88}$$

因此，式(85)指定的线位移边界条件满足平均场理论。

然后验证是否满足 Hill-Mandel 能量等价条件。将式(85,46) 代入式(76) 可得

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S = \frac{1}{V}\int_S (n_k\sigma_{ki}^* - n_k\bar{\sigma}_{ki})u_i^*\mathrm{d}S = \frac{1}{V}\int_S n_k\sigma_{ki}^* u_i^*\mathrm{d}S - \frac{1}{V}\bar{\sigma}_{ki}\int_S n_k u_i^*\mathrm{d}S \tag{89}$$

利用由式(47,51,50) 分别指定的 $u_i^*|_S$，$\sigma_{ki}^*|_S$ 和 $n_k|_S$，式(89) 中最后一个等式的第一项为零，由式(88) 可知最后一个等式的第二项为零，因此式(76) 成立。将式(86,56) 代入式(77) 可得

$$\frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})(\omega_i - \bar{\omega}_i)\mathrm{d}S = \frac{1}{V}\int_S (n_k\mu_{ki}^* - n_k\bar{\mu}_{ki})\omega_i^*\mathrm{d}S = 0 \tag{90}$$

因此,式(85,86)指定的位移边界条件和式(46,56)指定的力边界条件满足 Hill-Mandel 能量等价条件。

但是,由式(86,50)可知

$$\bar{\kappa}_{ji}=\bar{\omega}_{i,j}=\frac{1}{V}\int_V \omega_{i,j}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_S \omega_i n_j \mathrm{d}S=$$

$$\frac{1}{V}\int_S (\bar{\omega}_i+\omega_i^*)n_j \mathrm{d}S\equiv 0 \tag{91}$$

式(91)表明宏观 Cosserat 连续体中微曲率恒等于零,由于在 Cosserat 连续体中假定存在非零的平均微曲率,即式(86)所表示的微转角位移边界条件违背了一阶平均场理论。

综上所述,对于经典 Cosserat 连续体,虽然在 RVE 上施加线位移 u_i 和应力 σ_{ki} 的广义周期性边界条件式(85,46)可行,但式(86,56)中指定微转角 ω_i 和偶应力 μ_{ki} 的广义周期性边界条件不可行。

6 结 论

本文导出了非均质梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理,它能够退化成梯度增强 Cauchy 连续体、经典 Cosserat 连续体以及经典 Cauchy 连续体的 Hill 定理形式。由广义 Hill 定理出发,详细讨论了满足 Hill-Mandel 能量等价条件和平均场理论的 RVE 强形式以及弱形式边界条件。从广义 Hill 定理推导得到的 RVE 边界条件对于计算均匀化方法中推导正确的一致性切线模量张量以及定义在样条点上包含该点细观非均质信息的宏观本构关系至关重要。

参考文献(References):

[1] Li X K, Liu Q P. A version of Hill's lemma for Cosserat continuum[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, **25**:499-506.

[2] Kouznetsova V, Geers M G D, Brekelmans W A M. Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **54**:1235-1260.

[3] Kouznetsova V G, Geers M G D, Brekelmans W A M. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**:5525-5550.

[4] Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1963, **11**:357-372.

[5] 陈少华,王自强. 应变梯度理论进展[J]. 力学进展, 2003, **33**(2):207-216. (CHEN Shao-hua, WANG Zi-qiang. Advances in strain gradient theory[J]. *Advances in Mechanics*, 2003, **33**(2):207-216. (in Chinese))

[6] Zhang H, Wang H, Liu Z. Quadrilateral isoparametric finite elements for plane elastic Cosserat bodies[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, **21**(4):1614-3116.

[7] Dai T M. Renewal of basic laws and principles for polar continuum theories (XI)-consistency problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(2):147-155.

[8] Li X K, Tang H X. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization[J]. *Computers & Structures*, 2005, **83**:1-10.

[9] Forest S, Sab K. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials[J]. *Mechanics Research Communications*, 1998, **25**(4):449-454.

[10] Forest S, Dendievel R, Canova G R. Estimating the overall properties of heterogeneous Cosserat materials[J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1999, **7**:829-840.

[11] Yuan X, Tomita Y. Effective properties of Cosserat composites with periodic microstructure[J]. *Mechanics Research Communications*, 2001, **28**(3):265-270.

[12] Hu G K, Liu X N, Lu T J. A variational method for non-linear micopolar composites[J]. *Mechanics of Materials*, 2005, **37**:407-425.

[13] Chang C S, Kuhn M R. On virtual work and stress in granular media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**:3773-3793.

[14] Li X K, Liu Q P, Zhang J B. A micro-macro homogenization approach for discrete particle assembly-Cosserat continuum modeling of granular materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**:291-303.

(下转第 832 页)

Structrual optimization design based on non-probabilistic set-theoretic reliability

WANG Xiao-jun*, YANG Hai-feng, QIU Zhi-ping, QIN Zi-xuan

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Considering the uncertainties in structural system, the non-probabilistic reliability optimization method for structures is proposed based on the non-probabilistic set-theoretic model for structural reliability. In this method, the uncertainties are considered as interval numbers, and the non-probabilistic reliability of structures can be calculated by interval mathematics. Then the structural optimization problem, in which the non-probabilistic reliability index is taken as the constraint condition, can be solved through Lagrange multiplier method. The mass optimization for a truss structure is performed using the proposed method, and the optimization results illustrate its feasibility and effectiveness.

Key words: structural reliability optimization; non-probabilistic set-theoretic reliability; non-probabilistic set-theoretic stress-strength interference model; uncertainties

(上接第 820 页)

A generalized Hill's lemma for gradient-enhanced Cosserat continuum

LI Xi-kui*, ZHANG Jun-bo, ZHANG Xue

(State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: Based on the Hill's lemma for classical Cauchy continuum, a generalized Hill's lemma for micro-macro homogenization modeling of gradient-enhanced Cosserat continuum is presented in the frame of the average-field theory. In the gradient-enhanced Cosserat continuum modeling not only the strain and stress tensors defined in classical Cosserat continuum but also their gradients at the macroscopic sampling point are attributed to associated micro-structural representative volume element (RVE). The admissible boundary conditions required to prescribe on the RVE in strong and/or weak forms for the modeling are discussed and given to ensure the satisfaction of the enhanced Hill-Mandel energy condition and the average-field theory.

Key words: Hill's lemma; Hill-Mandel condition; Gradient-enhanced Cosserat continuum; Average-field theory; RVE boundary conditions