

# 背景值优化的GM(1,1)预测模型及应用

李星毅<sup>1</sup>, 李奎<sup>1</sup>, 施化吉<sup>1</sup>, 周双全<sup>2</sup>

(1. 江苏大学计算机学院 江苏 镇江 212013; 2. 北京北大千方科技有限公司 北京 海淀区 100086)

**【摘要】**针对GM(1,1)模型背景值存在的缺陷,在分析背景值误差产生原因的基础上,提出了新的背景值计算方法。该方法用非齐次指数函数模拟一次累加生成序列,根据原序列与一次累加生成序列的关系重构背景值计算公式,得到实际曲线在区间上的面积作为背景值。利用深圳市2007年10月9日和10日8:00~8:50的交通流数据验证,结果表明,与基于背景值优化的GM(1,1)模型相对比,新构建背景值的GM(1,1)模型的平均相对模拟误差和平均相对预测分别提高了0.46和2.61个百分点,在精度上取得了更好的效果。

**关键词** 背景值; GM(1,1)模型; 优化; 预测

中图分类号 TP391

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.06.020

## Optimization of GM(1,1) Prediction Model Based on Background Value and Its Application

LI Xing-yi<sup>1</sup>, LI Kui<sup>1</sup>, SHI Hua-ji<sup>1</sup>, and ZHOU Shuang-quan<sup>2</sup>

(1. College of Computer, Jiangsu University Zhenjiang Jiangsu 212013; 2. ChinaTransInfo Technology Corp Haidian Beijing 100086)

**Abstract** According to the drawback of the background value in GM(1,1) model, a new method for computing background value is proposed which uses the non-homogeneous exponential law to fit the accumulated sequence in order to get the area where the practical curve is on as background value. Experiment by using traffic data of Shenzhen between 8:00 to 8:50 on October 9 and 10 in 2007 shows that fitting precision and prediction precision of the new reconstructing background value of GM(1,1) model are improved.

**Key words** background value; GM(1,1) model; optimization; prediction

作为灰色系统理论的重要内容——GM(1,1)模型,因其具有所需建模数据少、计算简单等特点,已被广泛应用于工业、农业、经济、气象、交通、军事等领域<sup>[1-3]</sup>。为了改进传统GM(1,1)模型背景值存在的局限性,一些学者对其进行了相应研究<sup>[4-10]</sup>。如文献[9]用齐次指数函数  $x^{(1)}(t) = Be^{At}$  拟合一次累加生成序列,提出了一种背景值的构造方法<sup>[9]</sup>,获得了较高的预测精度。但从GM(1,1)模型白化微分方程解的形式看,一次累加生成序列的指数函数是非齐次的。针对该缺陷,文献[10]提出了一种改进的方法,由  $x^{(0)}(k) = g e^{k\epsilon}$  和  $x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C$  推导出  $a_k = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)$  和  $g_k = x^{(0)}(k) \times [x^{(0)}(k)/x^{(0)}(k-1)]^{1-k}$ 。显然,在假设  $x^{(0)}(k) = ge^{a(k-1)}$  的前提下,  $a_k$ 、 $g_k$  都是常量。然而,在模拟和预测实际数据时,原始数据往往不是严格等比序列,  $a_k$ 、 $g_k$  会随着级比的波动而变化,因此在模拟或预测实际

非严格等比序列时,只有将级比  $x^{(0)}(k)/x^{(0)}(k-1)$  近似看成一个常数,文献[10]构造的新背景值才有意义。

因此,本文提出一种更为合理的背景值计算公式以优化GM(1,1)模型。数据模拟精度的比较表明,与原始模型和文献[10]的模型相比,本文优化后的模型模拟精度和预测精度都有显著提高,尤其是当预测的步数增大时还能保持较好的预测效果。

## 1 相关工作介绍

### 1.1 GM(1,1)模型误差产生的原因分析

设  $X^{(0)}$  为非负序列,  $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ ,  $X^{(1)}$  为  $X^{(0)}$  的一次累加(1-AGO)序列,  $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 。其中,  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。

收稿日期: 2010-03-08; 修回日期: 2011-06-09

基金项目: 十一五国家科技支撑计划(2006BAG01A0)

作者简介: 李星毅(1969-),男,副教授,主要从事空间数据库交通信息系统与控制等方面的研究。

$Z^{(1)}$  为  $X^{(1)}$  的紧邻均值生成序列:

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)\}$$

$$Z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

因有:

$$x^{(0)}(k) + a z^{(1)}(k) = b \quad (2)$$

称式(2)为GM(1,1)模型的基本形式和灰微分方程,式(1)为GM(1,1)模型的背景值。其中  $a$ 、 $b$  是需要通过建模求解的参数,若  $\hat{a} = (a, b)^T$  为参数列,且:

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

则求微分方程(2)的最小二乘估计系数列满足:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

又因有:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (4)$$

称式(4)为灰微分方程(2)的白化方程,也叫影子方程。则灰色微分方程(2)的时间响应序列为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

累减还原值为:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

从式(6)可以看出,GM(1,1)模型拟合和预测值的精度取决于参数  $a$  和  $b$ , 而参数  $a$  和  $b$  又取决于对模型的背景值  $z^{(1)}(k)$  的求解,可见合理构造模型的背景值可以提高模型的预测精度。

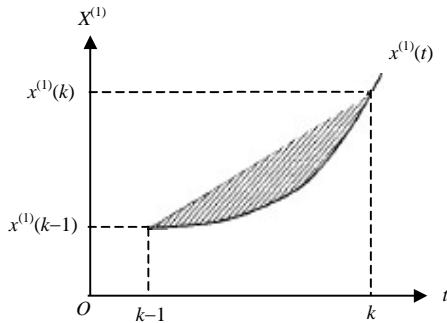


图1 原GM(1,1)模型误差来源示意图

GM(1,1)模型的背景值计算公式是利用数值积分的梯形公式即式(1)得到GM(1,1)预测模型的基本模型。而真正的背景值应该是  $x^{(1)}(t)$  在区间  $[k-1, k]$  上与  $t$  围成的面积。图1为原GM(1,1)模型误差来源示意图,图中的阴影部分面积正是传统的背景值计算公式的误差部分。目前,主要的改进方法是把背景值的均值生成改为线性插值。从GM(1,1)模型白化微分方程解的形式可以看出,一次累加生成序列的指

数函数是非齐次的。因此,本文提出用非齐次指数函数拟合  $x^{(1)}(t)$ , 通过一种新的比较合理的方法来求解离散指数函数  $x^{(1)}(t)$ , 从而提高GM(1,1)预测模型的拟合精度和预测精度。

### 1.2 背景值的优化

在区间  $[k-1, k]$  上对方程(4)积分,得:

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b$$

亦即:

$$x^{(0)}(k) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b \quad (7)$$

将方程(7)与灰微分方程(2)相比较知,用  $\int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt$  作为背景值  $z^{(1)}(k)$  更为合适。从上面的分析能看到传统模型误差正是来源于用式(1)代替  $\int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt$  所致。为消除由此产生的误差,记:

$$z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt \quad (8)$$

**定理** 设有原始数据序列  $X^{(0)}$  和其1-AGO序列  $X^{(1)}$ , 若白化方程(4)的解,即时间响应函数  $x^{(1)}(t)$  为非齐次指数函数,则背景值为:

$$z^{(1)}(k) = \begin{cases} x^{(0)}(1) - \frac{x^{(0)}(k)}{e^{L(k)k} - e^{L(k)(k-1)}} \left( \frac{x^{(0)}(k)}{L(k)} \right) + \frac{x^{(0)}(k)}{L(k)} & x^{(1)}(k) \neq x^{(1)}(k-1) \\ x^{(1)}(k) & x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1) \end{cases}$$

式中,  $L(k) = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ 。

证明 由方程(4)的时间响应函数知道  $x^{(1)}(t)$  为非齐次指数函数。不妨设  $x^{(1)}(t) = De^{At} + C$ , 其中,  $A$ 、 $C$ 、 $D$  为待定常数。将其代入式(8)得:

$$z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = \int_{k-1}^k [De^{At} + C] dt = \frac{1}{A} [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + C = \frac{x^{(0)}(k)}{A} + C \quad (9)$$

根据原序列  $X^{(0)}$  和1-AGO序列  $X^{(1)}$  的关系,当  $t=1$  时,有  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ , 即:

$$De^A + C = x^{(0)}(1) \quad (10)$$

根据还原值公式(6)得:

$$x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = De^{Ak} - De^{A(k-1)}$$

由上式推导出:

$$D = \frac{x^{(0)}(k)}{e^{Ak} - e^{A(k-1)}} = \frac{x^{(0)}(k-1)}{e^{A(k-1)} - e^{A(k-2)}} \quad (11)$$

对等式  $\frac{x^{(0)}(k)}{e^{Ak} - e^{A(k-1)}} = \frac{x^{(0)}(k-1)}{e^{A(k-1)} - e^{A(k-2)}}$  进行约简得:

$$e^{-A} = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$$

再对上式约简, 最后求得:

$$A = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1) \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得到:

$$D = \frac{x^{(0)}(k)}{e^{L(k)k} - e^{L(k)(k-1)}} \quad (13)$$

式中,  $L(k) = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)$ 。

把式(12)、式(13)代入式(9)求得:

$$C = x^{(0)}(1) - \frac{x^{(0)}(k)}{e^{L(k)k} - e^{L(k)(k-1)}} \left( \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right) \quad (14)$$

最后将式(12)~(14)代入式(9)得到新构造的背景值计算公式为:

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{L(k)} + x^{(0)}(1) - \frac{x^{(0)}(k)}{e^{L(k)k} - e^{L(k)(k-1)}} \left( \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right)$$

式中,  $L(k) = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)$ ,  $k=2,3,\dots,n$ 。当  $x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1)$  时, 曲线  $x^{(1)}(t)$  与  $t$  轴围成的图形退化为一个矩形, 此时背景值的大小相当于该矩形的面积, 即  $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k)$ 。证毕

### 1.3 优化模型建模算法

经以上的理论分析, 利用新构建的背景值计算公式对数据进行建模, 可获得数据序列的模拟值和预测值, 其算法步骤如下。

输入原始序列:

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

输出模型模拟值与预测函数:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1-e^a) \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} \quad k=1,2,\dots,n$$

1) 计算  $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ , 其中,

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k=1,2,\dots,n。$$

2) 计算背景值  $z^{(1)}(k)$ , 如果  $x^{(1)}(k) \neq x^{(1)}(k-1)$ , 则:

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{L(k)} + x^{(0)}(1) - \frac{x^{(0)}(k)}{e^{L(k)k} - e^{L(k)(k-1)}} \left( \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right)$$

其中,  $L(k) = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)$ , 否则  $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k)$ ,  $k=2,3,\dots,n$ 。

3) 根据式(3)计算矩阵  $B$  和  $Y$ 。

4) 计算参数值  $a, b$ , 设参数列  $\hat{a} = [a, b]^T$ , 则  $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 。

5) 根据式(6)计算  $\hat{x}^{(0)}(k)$ , 并输出。

## 2 数据模拟精度的比较

记原GM(1,1)模型为  $M_0$ , 文献[10]的基于离散函数优化的GM(1,1)模型为  $M_1$ , 本文新构建的基于背景

值改进的GM(1,1)模型为  $M_2$ 。实验采用深圳市10200402号采样点(滨河大道和红岭南路的交界处)2007年10月9日和10月10日8:05~8:50之间时间间隔为5 min的2组车流量数据对  $M_0, M_1, M_2$  进行建模比较。利用8:05~8:35的5数据作建模值, 8:40~8:50的数据作预测值。原始车流量数据如表1所示。

表1 原始车流量数据

日期	车流量/辆				
	8:05	8:10	8:15	8:20	8:25
9	107	114	139	164	175
10	117	137	146	194	228

日期	车流量/辆				
	8:30	8:35	8:40	8:45	8:50
9	232	280	338	398	472
10	243	320	380	467	564

首先, 对10月9日的数据进行建模计算, 得到  $M_0$  模型的时间响应函数为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 562.718 2e^{0.1805k} - 455.718 7$$

$M_1$  时间响应函数为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 581.757 2e^{0.1808k} - 474.757 2$$

$M_2$  时间响应函数为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 561.729 5e^{0.1826k} - 454.729 5$$

3种模型的还原值和预测公式为:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = (1-e^a) \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

对以上3种建模方法的模拟值和预测值进行比较, 结果分别如表2和表3所示。

表2 10月9日数据模拟值精度比较

时间	$M_0$		$M_1$		$M_2$	
	模拟值/辆	相对误差	模拟值/辆	相对误差	模拟值/辆	相对误差
8:10	111.1	2.56	115.3	1.13	112.5	1.29
8:15	133.0	4.31	138.1	0.62	135.1	2.82
8:20	159.3	2.89	165.5	0.92	162.1	1.13
8:25	190.7	8.97	198.3	13.32	194.6	11.21
8:30	228.3	1.57	237.6	2.42	233.6	0.69
8:35	273.4	2.35	284.7	1.68	280.4	0.15

表3 10月9日数据预测值精度比较

时间	$M_0$		$M_1$		$M_2$	
	预测值/辆	相对误差	预测值/辆	相对误差	预测值/辆	相对误差
8:40	327.4	3.14	341.1	0.89	336.6	0.42
8:45	392.0	5.18	408.7	2.70	404.0	1.51
8:50	469.4	0.56	489.7	3.76	485.0	2.74

按照相同的方法, 对10月10日的交通流数据进

行建模，得到 $M_0$ 模型的时间响应函数为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 700.9411e^{0.1716k} - 583.9411$$

$M_1$ 时间响应函数为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 826.3752e^{0.1578k} - 709.3752$$

$M_2$ 时间响应函数为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 734.2667e^{0.1691k} - 617.2667$$

3种模型的还原值和预测公式为：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = (1 - e^a) \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

对以上3种建模方法的模拟值和预测值进行比较，结果分别如表4和表5所示。

表2中， $M_0$ 、 $M_1$ 和 $M_2$ 的相对误差的平均值分别为3.78、3.34和2.91。

表3中， $M_0$ 、 $M_1$ 和 $M_2$ 的相对误差的平均值分别为2.96、2.45和1.56。

从以上对10月9日和10日8:05~8:50同一时段的车流量数据建模精度比较可知，无论是平均相对模拟误差，还是平均相对预测误差，本文优化模型 $M_2$ 的误差显著小于原始GM(1,1)模型 $M_0$ 和文献[10]的优化模型 $M_1$ 。如表2和表3所示， $M_2$ 的平均相对模拟误差和平均相对预测较之于 $M_1$ 分别提高了0.43和0.89个百分点。同理，从表4和表5可知， $M_2$ 的平均相对模拟误差和平均相对预测比 $M_1$ 分别提高了0.59和4.33个百分点。对上述2组数据取平均值，可得： $M_2$ 的平均相对模拟误差和平均相对预测比 $M_1$ 分别提高了0.46和2.61个百分点。

表4 10月10日数据模拟值精度比较

时间	$M_0$		$M_1$		$M_2$	
	模拟值/辆	相对误差	模拟值/辆	相对误差	模拟值/辆	相对误差
8:10	131.2	4.23	141.3	3.11	135.3	1.26
8:15	155.8	6.69	165.4	13.29	160.2	9.73
8:20	184.9	4.67	193.7	0.17	189.7	2.21
8:25	219.6	3.71	226.8	0.54	224.7	1.46
8:30	260.6	7.26	265.5	9.28	266.1	9.49
8:35	309.4	3.30	310.9	2.84	315.1	1.54

表4中， $M_0$ 、 $M_1$ 和 $M_2$ 的相对误差的平均值分别为4.98、4.87和4.28。

以上的实验结果表明，采用非齐次指数函数模拟一次累加生成序列，根据原序列与一次累加生成序列的关系重构的背景值计算公式比较接近 $x^{(1)}(t)$ 的背景值。而文献[10]对GM(1,1)背景值的改进是在一个假设条件下完成的，原始的GM(1,1)模型的背景值是用一个梯形的面积近似地计算 $x^{(1)}(t)$ 的背景值。

所以，本文的方法能在模拟精度和预测精度上得到更好的效果。

表5 10月10日数据预测值精度比较

时间	$M_0$		$M_1$		$M_2$	
	预测值/辆	相对误差	预测值/辆	相对误差	预测值/辆	相对误差
8:40	367.4	3.33	364.1	4.19	373.1	1.81
8:45	436.1	6.61	426.3	8.71	441.9	5.38
8:50	517.8	8.20	499.1	11.49	523.3	7.22

表5中， $M_0$ 、 $M_1$ 和 $M_2$ 的相对误差的平均值分别为6.05、8.13和4.80。

### 3 总结

本文应用非齐次指数函数模拟一次累加生成序列，根据原序列与一次累加生成序列的关系重构背景值计算公式，将得到的实际曲线在区间上的面积作为背景值，既保持了原模型的特性，又使模型的模拟和预测精度得到了再一次的提高。但因GM(1,1)适用范围的限制，该方法也只是在数据序列近似指数函数时才具有较高的精度，即只有当发展系数 $|a| < 2$ 时才有意义。

对深圳市2007年10月9日和10日8:05~8:50的车流量数据的验证结果表明本文所构建模型能较好的反映车流量信息，平均相对模拟误差和平均相对预测比文献[10]分别提高了0.46和2.61个百分点，能应用于短时车流量预测，扩大了模型的使用范围，具有较高的理论价值和应用价值。

### 参 考 文 献

- [1] MAO Ming-zhi, CHIRWA E C. Application of grey model GM(1, 1) to vehicle fatality risk estimation[J]. Technological Forecasting & Social Chang, 2006, 73(5): 588-605.
- [2] ZHANG Ying-zi, FAN Ying-fang, HU Yu-dong, et al. Application of grey system theory to study the bond strength between corroded rebar and concrete[C]//GISIS. Nanjing: [s.n.], 2007.
- [3] HU Jun, LIU Zhi-feng, XU Wen-sheng. Application of grey system theory in peace avenue overpass bridge construction linear control[C]//International Conference on Management and Service Science, MASS 2009. Wuhan: [s.n.], 2009.
- [4] TZU-LI T. A new grey prediction model FGM(1,1)[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(7-8): 1416-1426.
- [5] LIN Yong-huang, LEE Pin-chan. Novel high-precision grey forecasting model[J]. Automation in Construction, 2007, 16(6): 771-777.
- [6] LI Bo, WEI Yong. Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. System Engineering Theory and Practice, 2009, 29(2): 100-105.

(下转第932页)