文章编号: 1007- 2985(2002)04- 0030- 05

# 风险理论及其在保险中的应用*

何树红
(云南大学数学系, 云南 昆明　650091)

摘　要: 简述了保险风险模型的主要内容(包括短期个别风险模型、短期聚合模型及破产理论), 并重点介绍了破产理论研究的一些主要问题.

关键词: 风险; 理赔量; 破产概率
中图分类号: F224.7　　　　文献标识码: A

近年来, 随着科学技术的进步及经济的发展, 风险因素越来越复杂, 风险的度量与管理日益引起人们的重视. 在保险中, 为了对保险合同的风险进行度量, Tetens 把风险定义为: 如果合同导致损失, 则合同的预期损失就是风险. 自 E. Halley 于 1693 年编制了世界上第一个生命表算起, 风险理论的发展已有 300 多年的历史. 在 20 世纪, H. Cramer, F. Lundberg 等人建立了风险理论与一般随机过程研究之间的关系. 如今, 风险理论已成为保险精算学的一个重要分支, 在保险理论与实践中具有重要的作用. 笔者简述了保险风险模型的主要内容(包括短期个别风险模型、短期聚合模型及破产理论), 并介绍了它们在保险中应用.

## 1　短期个别风险模型

在介绍短期个别风险模型之前, 先介绍风险理论的 2 个重要函数(矩母函数与 Laplace 变换)及 2 个条件分布的基本公式.

设 $X$ 为一随机变量, 其分布函数为 $F(x)$. 令 $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tx}\,dF(x)$, 称 $M_X(t)$ 为 $X$ 的矩母函数(简记为mgf). 矩母函数可以完全刻划随机变量 $X$ 的分布特征: 如果 2 个随机变量具有相同的矩母函数, 则它们的分布函数也相同. 由于这种一一对应的关系, 矩母函数便成为研究随机变量的一个得心应手的工具, 以矩母函数表达的结论均可转换成关于分布的结论. 另外, 矩母函数与矩有关系

$$E[X^k] = M_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} \tag{1}$$

对任意 $k \geqslant 1$ 成立. 这也是把 $M_X(t)$ 称为矩母函数的原因.

矩母函数有一个很好的性质: 独立和的矩母函数等于各变量的矩母函数之积, 即设 $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$, 其中 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 相互独立, 则有 $M_S(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_m}(t)$. 这一性质在研究总理赔量的的分布时具有重要意义.

再来看随机变量的另一个常用函数, $L_x(t) = E[e^{-tx}] \int e^{-tx}\,dF(x)$, 对任意 $t \geqslant 0$ 成立, $L_X(t)$ 称为 $X$ 的 Laplace 变换(简记为 LT). 显然, $L_X(t) = M_X(-t)$.

---

* 收稿日期: 2002- 05- 20
作者简介: 何树红(1966- ), 男, 云南省云溪人, 云南大学数学系教授, 博士, 主要从事金融数学与金融工程研究.

利用全概率公式,可得到下列 2 个条件分布的基本公式:

$$E[Y] = E[E[Y \mid X]], \tag{2}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = E[\mathrm{Var}[Y \mid X]] + \mathrm{Var}[E[Y \mid X]]. \tag{3}$$

公式(2) 称为期望的累计法则. 公式(3) 则表明, 总的方差可分解成方差的期望与条件期望的方差之和.

下面来介绍短期个别风险模型. 对于保险机构, 设其某种风险的随机损失(理赔量) 为 $S$, $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 其中 $X_i$ 是保险单 $i$ 的损失, 其分布函数为 $F_i(x)$, $n$ 是保单数. 假定 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立. 现在的问题是求出 $S$ 的分布, 主要有 2 种方法.

方法 1　由概率论可知, $S$ 的分布函数为 $F_S = F^{(n)}$, 其中 $F^{(n)}$ 为分布函数 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 的卷积, 其计算采用递归的方法. $F^{(1)} = F_1$, $F^{(2)} = F_2^* F^{(1)}$, $\cdots$, $F^{(n)} = F_n^* F^{(n-1)}$. 特别, 当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都具有同一分布函数 $F(x)$ 时, $F^{(n)}$ 改记为 $F^{*n}$, 称为 $F$ 的 $n$ 阶卷积.

方法 2　利用矩母函数的性质, $S$ 的矩母函数 $M_S(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_m}(t)$. 特别, 当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均和 $X$ 有同一分布, 即具有相同的矩母函数 $M_X(t)$ 时, $M_S(t) = [M_X(t)]^n$. 求出矩母函数后, 利用矩母函数的连续性与唯一性, 便可得到 $S$ 的分布.

对于方法 1, 当 $n$ 较大时, 卷积的计算是相当复杂的. 而方法 2 的优点是 $M_S(t)$ 的计算非常简便, 其难点在于识别出 $M_S(t)$ 是何分布的矩母函数, 有时需要高深的数学工具才能求出 $S$ 的分布. 因此, 在实际应用中往往是求得 $S$ 的分布的数值近似. 利用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的独立性, 有

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i], \quad \mathrm{Var}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i].$$

而由中心极限定理, 当 $n$ 较大时(在保险中 $n$ 一般都较大), $\dfrac{S - E[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0, 1)$.

短期个别风险模型可用于单险种的有关问题的研究, 如人寿保险、汽车保险、火灾保险等; 也可用于某一险种的再保险研究, 如自留额的计算等.

## 2　短期聚合风险模型

上一节讨论的个别风险模型是基于对个别保单理赔量分别考虑的, 保单数是非随机的, 且总理赔量为所有保单理赔量的总和. 而本节要介绍的聚合风险模型则将个别理赔的产生视为一随机过程. 短期聚合风险模型简述如下.

设 $N$ 是给定时期中保单的理赔次数, 它是一个取非负整数的随机变量, $X_i$ 是第 $i$ 次理赔的理赔量($i = 1, 2, \cdots, N$), 则这一时期的总理赔量 $S$ 可表示为 $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. 这里我们假定: (1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是和 $X$ 同分布的随机变量, 分布函数为 $P(x)$; (2) 随机变量 $N, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

本节的主要问题仍然是求出 $S$ 的分布. 令 $p_k = E[X^k]$ 为 $X$ 的 $k$ 阶原点矩. 首先由(2), (3) 式, 有

$$E[S] = E[X] \cdot E[N] = p_1 E[N], \tag{4}$$

$$\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[N](E[X])^2 + E[N]\mathrm{Var}[X] = p_1^2 \mathrm{Var}[N] + (p_2 - p_1^2) E[N]. \tag{5}$$

(4) 式表明, 总理赔量的期望值等于理赔次数的期望值与个别理赔量的期望值的乘积. 而(5) 式则表明, 总理赔量的方差可分解为 2 个分量: 第一个分量反映了理赔次数是随机的, 第二个分量反映了个别理赔量是随机的.

$S$ 的矩母函数为

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E[E[e^{tS} \mid N]] = E[M_X(t)^N] = E[e^{N \ln M_X(t)}] = M_N[\ln M_X(t)], \tag{6}$$

其中 $M_N$, $M_X$ 分别为 $N$ 和 $X$ 的矩母函数.

利用全概率公式, 可得 $S$ 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) \mathrm{Pro}(N = n), \tag{7}$$

其中 $P^{*n}$ 为$P(x)$ 的 $n$ 阶卷积,特别规定 $P^{*}=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geqslant 0.\end{cases}$

特别,如果个别理赔量是离散型分布,其概率函数为 $p(x)=\mathrm{Pro}(X=x)$,则总理赔量 $S$ 也是离散型的,其概率函数为

$$f(x)=\mathrm{Pro}(S=x)=\sum p^{*n}(x)\mathrm{Pro}(N=n),$$

其中 $p^{*n}(x)=p*p*\cdots*p(x)=\mathrm{Pro}(X_1+X_2+\cdots+X_n=x)$.

理赔次数 $N$ 取不同的分布,个别理赔量取不同的分布 $P(x)$,就得到了总理赔量 $S$ 的不同复合分布. 如果 $N$ 为 Poisson 分布,则 $S$ 的相应分布便成为复合 Poisson 分布;当 $N$ 为负二项分布时,$S$ 的分布则称为复合负二项分布. $N$ 也可取二项分布、对数分布等.

对于个别理量 $X$ 的分布,由于计算 $S$ 的分布 $F(x)$ 时需要作卷积运算,故应尽可能选择便于计算的分布族. 例如具有再生性的概率分布,如正态分布、Gamma 分布、对数分布等; $X$ 也可以取指数分布、Beta 分布、Cauchy 分布及 Pareto 分布等. 下面分析 2 种重要的复合分布:复合 Poisson 分布及复合负二项分布.

(1) 复合 Poisson 分布. 当理赔次数 $N$ 服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布,个别理赔量的分布函数为 $P(x)$ 时,称 $S$ 的分布为由参数 $\lambda$、分布函数 $P(x)$ 煞定的复合 Poisson 分布. 由(4) 至(7) 式,有

$$E[S]=\lambda p_1,\ \mathrm{Var}[S]=\lambda p_2,\ M_S(t)=\mathrm{e}^{\lambda[M_X(t)-1]},\ F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{*n}(x)\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

复合 Poisson 分布有一个非常好的性质,如定理 1 所示.

定理 1[1] 如果 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 为 $m$ 个相互独立的复合 Poisson 分布,$S_i$ 的参数为 $\lambda_i$,理赔量的分布函数为 $P_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$,则 $S=S_1+S_2+\cdots+S_m$ 也为复合 Poisson 分布,参数为 $\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$,理赔量分布函数为 $P(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}P_i(x)$.

定理 1 表明,复合 Poisson 分布的独立和仍为复合 Poisson 分布,其参数为原来的各参数之和,理赔量分布函数为原各理赔量分布函数的加权平均. 这一性质在建立保险模型中有 2 个重要应用:第一,如果有 $m$ 个险种,每个险种总理赔量是复合 Poisson 分布并且相互独立,则总理赔量也是复合 Poisson 分布;第二,考虑 $m$ 年期的单个险种,假设 $m$ 个年总理赔量均是复合 Poisson 分布(其分布也可以不相同),则 $m$ 年期的总理赔量也服从复合 Poisson 分布.

(2) 复合负二项分布. 假设理赔次数 $N$ 服从参数为 $\alpha,p$ 的负二项分布,其概率函数为

$$\mathrm{Pro}(N=n)=\binom{\alpha+n-1}{n}p^{\alpha}q^{n}\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\alpha>0,0<p<1,q=1-p$. 此时 $S$ 的分布称为复合负二项分布. 对于复合负二项分布 $S$,由(4) 至(7) 式,有

$$E[S]=\frac{\alpha q}{p}p_1,\ \mathrm{Var}[S]=\frac{\alpha q}{p}p_2+\frac{\alpha q^2}{p^2}p_1^2,$$

$$M_S(t)=\left[\frac{p}{1-qM_X(t)}\right]^{\alpha},\ F_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{*n}(x)\binom{\alpha+n-1}{n}p^{\alpha}q^{n}.$$

和个别风险模型一样,$S$ 的分布仍然需要通过卷积运算或利用矩母函数求得. 同样,也可以用正态分布来近似计算.

定理 2[1] (i) 设 $S$ 是参数为 $\lambda$,理赔量分布函数为 $P(x)$ 的复合 Poisson 分布,则当 $\lambda\to\infty$ 时,$Z=\frac{S-\lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}$ 的分布收敛于标准正态分布.

(ii) 如果 $S$ 是参数为 $\alpha,p$,理赔量分布函数为 $P(x)$ 的复合负二项分布,则 $Z=\dfrac{S-\frac{\alpha q}{p}p_1}{\sqrt{\frac{\alpha q}{p}p_2+\frac{\alpha q^2}{p^2}p_1^2}}$ 的分

布收敛于标准正态分布.

由于总理赔量的分布通常是被扭曲而带有偏性的, 而正态分布则是对称的, 故可考虑用有偏性的 Gamma 分布去近似.

## 3 破产理论

破产理论是风险理论中非常重要的一个问题. 对于保险公司而言, 它可以为决策者提供一个非常有用的早期风险的警示手段, 故对破产理论的研究也具有重要的现实意义.

对于某个确定的保险种, 记 $N(t)$ 为时刻 $t$ 以内的理赔次数, $S(t)$ 为时刻 $t$ 以内的总理赔量. 设初始时刻为 $t=0$, 则 $N(0)=0$. 如果 $N(t)=0$, 则有 $S(t)=0$. 设 $X_i$ 为第 $i$ 次理赔的理赔量, 则

$$S(t)=X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)}. \tag{8}$$

这里假定理赔次数过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程, 即假定发生在任何长度为 $h$ 的区间内的理赔次数服从参数为 $\lambda h$ 的 Poisson 分布, 而与该区间的位置及以前的信息无关. 显然, Poisson 过程是一个平稳的、具有独立增量的随机过程. 而各个理赔量则假定是独立的且具有同一分布函数 $P(x)$ 的非负随机变量, 具有有限均值 $p_1$.

考虑一个保险公司, 以 $U(t)$ 表示该公司在时刻 $t\geqslant 0$ 的盈余. 假设保费以常数率 $c$ 收取, $u=U(0)$ 为初始盈余, 则有

$$U(t)=u+ct-S(t) \qquad t\geqslant 0, \tag{9}$$

其中 $c$ 表示单位时间内收到的保险费, $c=(1+\theta)\lambda p_1$, $\theta>0$ 称为相对安全附加系数.

保险公司在实际经营中, 最关心的是破产概率. 当盈余首次在某一时刻为负, 理论上便认为保险公司破产. 记破产发生时刻为

$$T=\min\{t: t\geqslant 0 \text{ 且 } U(t)<0\}. \tag{10}$$

如果对一切 $t\geqslant 0$, 都有 $U(t)>0$, 则约定 $T=\infty$, 表示保险公司不会发生破产. 记 $\Psi(u)=\mathrm{Pro}(T<\infty)$, 称 $\Psi(u)$ 为初始盈余是 $u$ 的情况下破产发生的概率, 简称为破产概率; 而 $R(u)=1-\Psi(u)$, 则称为存活概率. 由此, 得出 $R(u)$ 的表达式便可得出 $\Psi(u)$ 的表达式.

对于 $R(u)$ 的表达式, 一般是通过调节系数 $r$ 求出的. 所谓调节系数 $r$, 是指

$$1+(1+\theta)p_1 r=M_X(r) \tag{11}$$

的正解. 可以证明, 在一定的条件下, 除了平凡解 $r=0$ 外, 方程(11) 存在唯一的正解 $r$, 即存在调节系数.

对于某些理赔量分布, 如参数为 $\beta$ 的指数分布, 容易解出其调节系数 $r=\dfrac{\theta\beta}{1+\theta}$. 但对于一般情形, 由于(11) 式是一个非线性方程, 故调节系数的求解是比较困难的, 此时可利用 Newton-Raphson 等递归方法求出近似解.

利用调节系数 $r$, 可以得到破产概率的一个上界, 如定理 3 所示.

定理 3[2] 设 $r$ 为调节系数, 则对一切 $u\geqslant 0$, 有

$$\Psi(u)\leqslant e^{-ru}. \tag{12}$$

这个结论可用于保险公司选择适当的相对安全附加系数 $\theta$, 使得破产发生的概率不超过预先给定的控制水平 $\alpha$. 事实上, 如果取 $\theta=\dfrac{u[M_X(-\frac{\log\alpha}{u})-1]}{-p_1\log\alpha}$, 则 $r=-\dfrac{\log\alpha}{u}$ 为(11) 式的解, 从而由(12) 式便可推出 $\Psi(u)\leqslant e^{-ru}=\alpha$.

利用随机过程中的所谓后向法, 可以推出 $R(u)$ 满足一个微分-积分方程, 如定理 4 所示.

定理 4[2] 存活概率满足下列方程:

$$cR'(u)=\lambda R(u)-\lambda\int_0^u R(u-x)\,\mathrm{d}P(x) \qquad u\geqslant 0. \tag{13}$$

对于方程(13), 可通过 Laplace 变换的方法, 求出 $R(u)$ 的 Laplace 变换, 再求 Laplace 逆变换, 便可得出

$R(u)$ 的表达式.

利用定理4,可以求出当保险公司没有初始准备金时的存活概率为 $R(0)=\dfrac{\theta}{1+\theta}$. 有趣的是,这一概率仅仅依赖于相对安全附加系数 $\theta$,而与参数 $\lambda$ 及个别理赔量分布函数 $P(x)$ 无关.

例1 设个别理赔量分布服从参数为 $\beta$ 的指数分布,则经过计算可得保险公司的破产概率为

$$\Psi(u)=1-R(u)=\frac{1}{1+\theta}\exp\left\{-\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\frac{u}{p_1}\right\}. \tag{14}$$

当保险公司确定一个破产概率限制后,从破产概率的表达式((14)式)可以得出所要求的初始准备金 $u$,这对保险公司而言具有重要的实践意义.

存活概率还可以表示为复合几何分布的分布函数,如定理5所示.

定理5[2] 存活概率 $R(u)$ 可以表示为

$$R(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n}F_Y^{*n}(u), \tag{15}$$

其中 $F_Y$ 是随机变量 $Y$ 的分布函数, $Y$ 具有密度函数 $f_Y(x)=\dfrac{1-P(x)}{p_1}$.

利用(15)式,可通过递归方法求出 $R(u)$ 的近似值.

## 4 结语

笔者对短期个别风险模型、短期聚合风险模型及破产理论的主要内容进行了讨论. 近年来,随着风险管理的发展,人们越来越重视风险理论,并对其某些方面进行了深入研究. 例如,(1) 混合分布的研究. 考虑理赔量的分布次数 $N$ 的分布中的参数也是随机变量,所得的总理赔量的分布即为混合分布. 混合分布更适宜于描述实际情况. (2) 如何根据保险实际,利用极大似然法等统计方法选择符合实际的风险模型,并对模型中的有关参数进行估计. (3) 破产概率的其它更为简便的求解方法,有限时间内的破产概率、破产时间、停时等问题的研究. (4) 再保险的不同形式对风险控制的作用. (5) 考虑通胀和利率因素的风险模型. (6) 各种风险模型的数值计算方法等. 另外,鞅方法的引入也给风险理论的研究注入了新的活力,详细内容可参见文献[3~6].

参考文献:

[1] 鲍尔斯[美]. 风险理论[M]. 上海: 科学技术出版社, 1995.
[2] PANJER H H. WILLMONT G E. Insurance Risk Models[M]. Society of Actuaries, 1994.
[3] 盖 佰[瑞士]. 数学风险论导引[M]. 北京: 世界图书出版公司, 1997.
[4] BUHLMANN H. Mathematical Methods in Risk Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1970.
[5] STRAUB E. Non-Life Insurance Mathematics[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
[6] GRANDELL J. Aspects of Risk Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

## Risk Theory and Application in the Insurance

HE Shu-hong
(Department of Math., Yunan University, Kunming 650091, Yunnan China)

**Abstract**: As an important branch of actuarial science, risk theory is of wide application in insurance theory and insurance management. The main theories of risk models in insurance and the central problems in ruin theory are introduced and studied.

**Key words**: risk; claim amount; probability of ruin