

文章编号: 1007- 2985(2004) 02- 0062- 04

图解 HOPF 定理在非线性振荡电路中的应用*

李义府¹, 李文华², 彭卫韶¹

(1. 中南大学信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 第一军医大学生物医学工程系, 广东 广州 510515)

摘要: 利用 HOPF 分叉定理时域形式的综合参数曲率系数 σ_0 与二维系统中的局部形式判断振荡, 必须进行大量的数值计算. 利用图解 HOPF 定理算法, 通过一系列步骤的图解可避免这个问题, 能较快地解决非线性系统的振荡问题.

关键词: 轨迹; 频域; Nyquist 判据; 图解 HOPF 算法

中图分类号: TN751. 2

文献标识码: A

HOPF 分叉定理对非线性振荡电路的分析给出了严格的数学证明, 其基本假设完全符合电子工程师的习惯, 用它研究正弦振荡电路是一种新方法. 李义府等^[1]利用 HOPF 分叉定理中综合参数曲率系数 σ_0 及二维系统中的局部形式, 可以有效地判断非线性自治二阶电路中是否出现振荡的情况, 但是这种形式的分析要进行大量的数值计算. 若改用图解 HOPF 定理算法, 则可避免复杂的计算, 能较快地解决非线性系统的振荡问题.

1 图解 HOPF 算法的步骤

图 1 所示的单回路反馈系统中, $G(j\omega)$ 表示一个标量传递函数, $f(\cdot)$ 表示一个连续可微(至少 4 次)的非线性向量函数, 它可包含一个参变量 μ . 以 Nyquist 判据形式的频域表达式为例, 图解 HOPF 定理步骤^[2-5]如下:

(1) 对静态工作点(平衡点) y_q 解非线性方程 $G(0) \cdot f(y) + y = 0$.

(2) 线性化开环传递函数为 $\lambda(j\omega) = G(j\omega) \cdot f'(y_q)$.

(3) 在 $\text{Re } \lambda(j\omega)$, $\text{Im } \lambda(j\omega)$ 平面上画 $\lambda(j\omega)$ 的 Nyquist 轨迹 Γ (如图 2 所示), 找出谐振频率 ω_R , 即 Γ 与实轴的交点. 在 $\omega = \omega_R$ 处, $\text{Im } \lambda(j\omega) = 0$.

(4) 计算 $S = 0$ 和 $S = 2j\omega_R$ 时的闭环传递函数 $H(S)$ 的值, 以求得 $H(0)$ 和 $H(j2\omega_R)$:

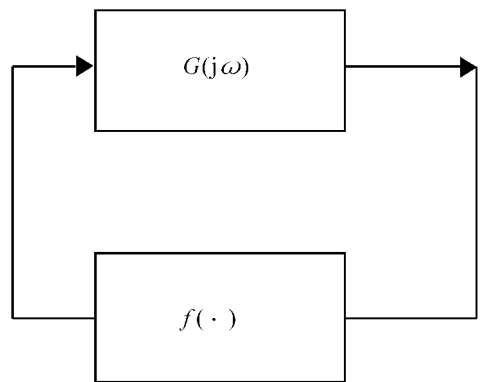


图 1 单回路反馈系统

* 收稿日期: 2003- 11- 01

作者简介: 李义府(1946-), 男, 湖南省长沙市人, 中南大学信息科学与工程学院教授, 主要从事电子技术理论与应用研究.

$$H(S) \overset{\Delta}{=} \frac{G(S)}{G(S) \cdot f(y_q) + 1}$$

(5) 计算 $\varepsilon(\omega_R)$ 的值:

$$\varepsilon(\omega_R) = G(j\omega_R) \left\{ f''(y_q)^2 \left[\frac{1}{4}H(0) + \frac{1}{8}H(j2\omega) \right] - \frac{1}{8}f'''(y_q) \right\}. \quad (1)$$

(6) 过 $-1 + j\sigma$ 点画平行于 $\varepsilon(\omega_R)$ 的向量. 如果向量 $\varepsilon(\omega_R)$ 与轨迹 Γ 在充分靠近 $-1 + j\sigma$ 的一点相交(交点处的 $\omega = \omega_0$) 并指向外侧(如图2所示), 则反馈系统有一频率近于 ω_0 的几乎是正弦的振荡, 幅值 $A \approx$

$$\sqrt{\frac{B}{|\varepsilon(\omega_R)|}}. \text{ 其中 } B \text{ 如图2所示定义.}$$

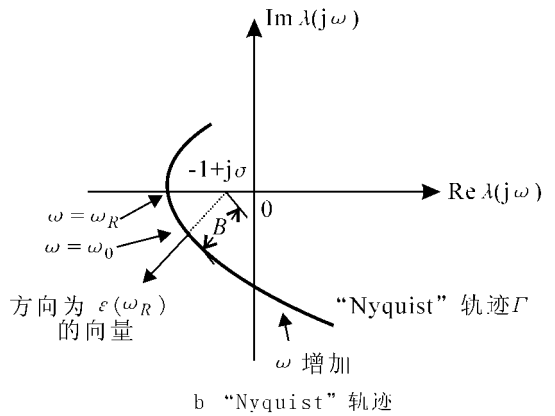


图2 “Nyquist” 轨迹

2 实例

隧道二极管振荡电路如图3所示, 隧道二极管的伏安特性如图4所示, 则状态方程为

$$\dot{i}_L = \left(\frac{1}{L}\right)uc, \dot{u}_C = \frac{1}{C}[g(V_B - uc) - i_L].$$

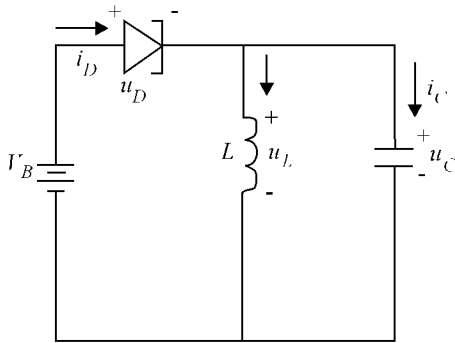


图3 隧道二极管振荡电路

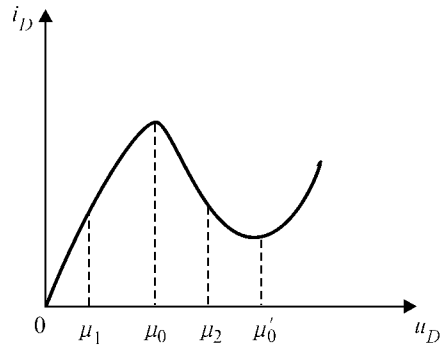


图4 隧道二极管的伏安特性

选择

$$G(S) \overset{\Delta}{=} \frac{S}{S^2 + S + 1}, f(y) \overset{\Delta}{=} -g(u - y) - y, \quad (2)$$

其中 $\mu \overset{\Delta}{=} V_B$ 为可调参数. 取 $L = 1, C = 1$, 应用该图解算法先解 $G(0) \cdot f(y) + y = 0$, 得平衡点 $y_q = 0$. 代入(2) 式得

$$\lambda(j\omega) = [g'(\mu) - 1] \left[\frac{j\omega}{(1 - \omega^2) + j\omega} \right] = \frac{-\omega^2 - j\omega(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

由(3) 式定义得“Nyquist” 轨迹, 取 $\mu = \mu_0$ (图4 中得最大值) 作于图5a 中. 此时轨迹 Γ 与实轴交于 $\omega_R = 1$ 处. 再计算

$$H(0) = [G(0)f'(\mu_0) + 1]^{-1}G(0) = 0, H(j2) = [G(j2)f'(\mu_0) + 1]^{-1}G(j2) = -j\frac{2}{3},$$

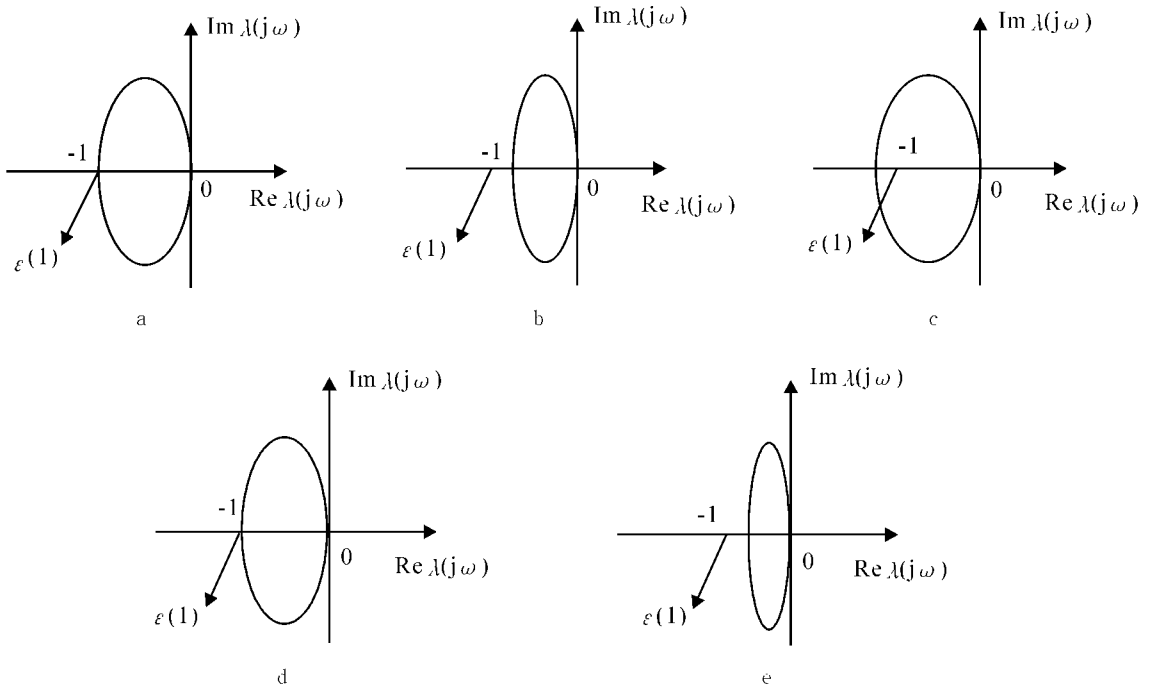
$$f''(0) = -g''(\mu_0), f'''(0) = g'''(\mu_0). \quad (4)$$

将(3), (4) 式代入(1) 式, 得

$$\varepsilon(\omega_R) = \varepsilon(1) = G(j1) \left\{ g''(\mu_0)^2 \left[\frac{1}{4}(0) + \frac{1}{8}(-j\frac{2}{3}) \right] - \frac{1}{8}g'''(\mu_0) \right\} = -\frac{1}{8}g'''(\mu_0) - \frac{j}{12}g''(\mu_0)^2.$$

这是一个指向第三象限的向量. 将它平移通过 $-1 + j^0$ 点, 使得图 5a 所示 $B = 0$ 的图形. 由图解 HOPF 定理可知, 当 $V_R = \mu_0$ 时, 这个电路在 $\omega_0 = 1$ 处开始振荡. 对于其他的 μ 值, 重复使用上述图解法可得如图 5b, 5c, 5d, 5e 所示的图形.

由图 5 可知, 当 $\mu_0 < V_R < \mu_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 是一个充分小的数) 时, 隧道二极管电路有一个频率为 ω_0 (向量与 Γ 相交处) 的稳定的正弦振荡. 由此可见, 利用该方法得出的结论与文献[1] 利用时域 HOPF 分叉定理所得的完全一致.



a- $\mu = \mu_0$; b- $\mu < \mu_0$; c- $\mu > \mu_0$; d- $\mu = \mu'_0$; e- $\mu > \mu_0$

图 5 隧道二极管振荡电路图解

3 结论

通过图解, 向量与轨迹 Γ 在充分靠近 $-1 + j^0$ 的一点相交(交点处 $\omega = \omega_0$) 并指向外侧, 则反馈系统有一频率近于 ω_0 的几乎是正弦的振荡, 振荡的幅值 $A \approx \sqrt{\frac{B}{|\varepsilon(\omega_0)|}}$. 这与 Nyquist 判据形式表达完全一致. 所以图解 HOPF 定理可理解为一个非线性的 Nyquist 判据. 同时, 图解 HOPF 定理还是一个可用于传递函数矩阵 $G(j\omega)$ 和非线性向量函数 $f(\bullet)$ 的更普遍定理的推论, 也可应用在微波振荡器的设计中, 并可由实验测定 Nyquist 轨迹.

参考文献:

- [1] 李义府, 谢长焱, 蔡自兴. HOPF 分叉定理在非线形振荡电路中的应用 [J]. 湖南师范大学学报(自然科学版), 2002, 25(1): 34-36.
- [2] HAYSHI C. Nonlinear Oscillation in Physical Systems [M]. New York: Me Craw Hill, 1964.
- [3] HASSARD B D. London Mathematical Society Lecture Note Series: Theory and Application of HOPF Bifurcation [M]. London, England, Cambridge, 1998.
- [4] TANG Y S, MEES A I, CHUA L O. HOPF Bifurcation Via. Volterra Series [J]. IEEE Trans., 1995, A. C 28(1): 37-41.
- [5] CHUA L O, ROBIN YING L P. Finding All Solution of Piecewise-Linear Circuit [J]. Circuit Theory and Application, 1982, 10: 201-229.

Application of HOPF Bifurcation Theorem by Using Graph in Nonlinear Oscillation Circuits

LI Yi-fu¹, LI Wen-hua², PENG Wei-shao¹

(1. Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. Department of Biomedical Engineering, First Military Medical University, Guangzhou 510515, China)

Abstract: By using coefficient of curvature of HOPF bifurcation theorem, in time domain is derived, and the local type of two-dimension system of the theorem to judge the oscillation, a new method of analyzing the oscillation of electronic circuits is provided. But the new means of analyzing have to include value computing. This article uses the arithmetic of the HOPF bifurcation theorem by using graph. A series of graphes can avoid a great deal of computing, easily settle the question of the oscillation of nonlinear circuit and provide another means of analyzing the oscillation of electronic circuits.

Key words: locus; frequency domain; Niquist criterion; the algorithm of the HOPF bifurcation theorem by using graph

(上接第 57 页)

参考文献:

- [1] 孙道椿, 杨乐. 拟亚纯映射的值分布 [J]. 中国科学(A 辑), 1997, 27(2): 132-139.
- [2] 李忠. 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 [M]. 北京: 科技出版社, 1988.
- [3] 高宗升. 关于拟亚纯映射值分布的若干结果 [J]. 山东大学学报(自然科学版), 1997, 32(4): 367-375.

Borel Point of K -Quasimeromorphic Mappings in the Unit Circle

WU Zhao-jun^{1,2}, SUN Dao-chun¹

(1. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, Guangdong China;
2. Department of Mathematics, Xianning University, Xianning 437005, Hubei China)

Abstract: In this paper, the existence of Borel points of K -quasimeromorphic mappings in the unit circle is established, the property of Borel points is discussed, and the following precise results about Borel points are obtained: there is at least a point $e^{i\theta_0}$ in circle $|z|=1$ such that for any $\varepsilon > 0$ and a (at most two exceptions) must have $\lim_{r \rightarrow r^-} \frac{\bar{n}(r, \theta_0, \varepsilon, a)}{S(r, f)} > 0$.

Key words: quasimeromorphic mapping; Borel point; Julia point