

文章编号: 1007- 2985(2003) 04- 0040- 03

# 岩土空间滑动面和抗剪强度的理论分析

张国祥, 陈灵玲

(中南大学土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

**摘要:** 通过理论推导出空间破坏面垂直中主应力作用面和岩土任意空间面上的抗剪强度通式  $s = f(\sigma, \tau)$ , 空间面上的抗剪强度只与法向应力大小和洛德参数有关, 无论是破坏面还是潜在滑移面, 均垂直于中主应力面。

**关键词:** 空间破坏面位置; 空间面上抗剪强度通式

中图分类号: TU43

文献标识码: A

岩土工程中的很多问题都属于空间问题. 只因按空间问题处理起来太复杂, 或者暂无分析方法, 故常常将其简化为平面问题来处理. 但简化可能会带来严重误差. 因此, 对岩土空间问题的研究是很有必要的: 一方面能对空间问题进行研究, 得出切合实际的结果; 另一方面, 当空间问题简化为平面问题处理时, 能对其分析结果的精度做出估计.

岩土空间破坏形式一般为剪切破坏. 因此, 要解决岩土空间破坏问题, 关键是如何解决岩土空间破坏面位置和空间面上抗剪强度通式问题. 在平面应变情况下, 岩土破坏时的滑移面肯定垂直于  $\sigma_1$  与  $\sigma_3$  作用线所组成的面, 空间面上的抗剪强度只与法向应力大小和洛德参数有关. 但对于空间应力情况, 岩土滑移面位置及空间面上的抗剪强度如何确定问题一直没有引起人们的重视, 亦很少有人进行深入研究. 松岗元(Matsukawa)等人根据所谓的空间滑动面提出了一种强度准则, 但所根据的空间滑动面不是真正最危滑动面. 笔者根据理论推导得出岩土任意空间面上的抗剪强度统一表达式、破坏面位置及其确定方法. 所得结论可为岩土空间滑移面的确定提供理论基础, 对寻找岩土强度准则具有指导意义.

## 1 岩土空间滑面上的抗剪强度

对于一般空间问题, 1 点的应力状态可以由 9 个应力分量表示, 如 P 点处应力状态在直角坐标系可表示为

$$s = \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix}$$

如图 1 所示, 在固定受力情况下, 应力分量大小与坐标轴方向有关. 但由弹性力学可知, 新旧坐标的应力分量具有一定变换关系, 通常称这种具有特定变换关系的一些量为张量.

若已知物体内某点 P 的 9 个应力分量, 则可求出过该点的任意倾斜面上的应力. 在 P 点处取出 1 个如图 2 所示的无限小四面体. 其 3 个面分别与 x, y, z 轴垂直. 另一面即任意倾斜面, 它的法线 N 的方向余弦为 l, m, n, 分别以 dF, dF<sub>x</sub>, dF<sub>y</sub>, dF<sub>z</sub> 代表 abc, obc, oac, oab 三角形面积, 则有 dF<sub>x</sub> = ldF, dF<sub>y</sub> = mdF, dF<sub>z</sub> = ndF. 在 3 个垂直于坐标的平面上有应力分量, 在倾斜面 abc 上有合应力 P<sub>N</sub>, 它可分解为正应力  $\sigma_N$  及切向剪应力  $\tau_N$ , 即

$$P_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 \tag{1}$$

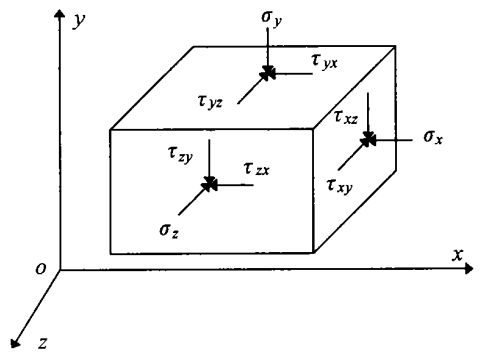


图 1 1 点的应力状态

收稿日期: 2003- 07- 09

基金项目: 铁道部科技攻关项目(2000G48F)

作者简介: 张国祥(1965- ), 男, 湖南省邵阳市人, 博士, 中南大学土木建筑学院副教授, 主要从事岩土力学、岩土本构关系及弹塑性有限元数值方法研究.

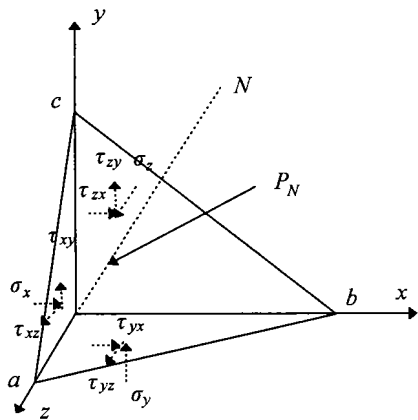


图 2 倾斜面上的应力

$P_N$  沿坐标轴方向分量为  $x_N, y_N, z_N$ , 由平衡条件可得

$$\begin{cases} x_N = x_N l + y_N m + z_N n, \\ y_N = x_N l + y_N m + z_N n, \\ z_N = x_N l + y_N m + z_N n. \end{cases}$$

由上式求出  $x_N, y_N, z_N$  在法线方向上的投影之和, 即得正应力

$$\sigma_N = x_N l + y_N m + z_N n = x_N^2 l^2 + y_N^2 m^2 + z_N^2 n^2 + 2 x_N y_N l m + 2 y_N z_N m n + 2 z_N x_N n l.$$

而剪应力则由式(1) 可得  $\tau_N^2 = P_N^2 - \sigma_N^2$ .

岩土用主应力表示的强度准则一般形式为

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{2}$$

强度准则与点的主应力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  有关. 当  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  满足(2) 式时, 则该点破坏. 但岩土一般是剪切破坏. 剪切破坏的条件是  $\tau = s$ , 即面上的剪应力等于其抗剪强度时, 该点破坏, 必然会产生滑动面. 对空间情况, 面上的抗剪强度大小及

破坏面位置如何确定有必要进一步研究.

如图 3 所示, 设主应力方向与坐标轴方向重合, 过该点作 1 平面, 面的法线与坐标轴的方向余弦为  $l, m, n$ , 则面的应力可表示为:

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \tag{3}$$

$$\tau_n^2 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2}, \tag{4}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \tag{5}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta. \tag{6}$$

由(3) ~ (6) 式可求出  $\sigma_n, \tau_n$  的表达式.  $\sigma_n, \tau_n$  的表达式与  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m, n, l$  有关, 将  $\sigma_n, \tau_n$  的表达式代入(2) 式整理后可得

$$F(\sigma_n, \tau_n, m, n) = 0. \tag{7}$$

由(7) 式可知, 过破坏点的任意面上剪应力与法向应力、洛德参数和面的法线方向余弦有关. 当面的法向应力和洛德参数一定时, 变化  $m, n$  使面上的剪应力达到最大值时, 根据面上抗剪强度定义可知该最大剪应力即为面上抗剪强度. 此时方向余弦  $m, n$  即为破裂面的位置(相对于主应力方向).

对剪应力求最大值时不能变化洛德参数, 否则得出面上抗剪强度式将出现问题. 即出现某点的应力满足强度准则, 但过该点没有 1 个面上剪应力达到抗剪强度的矛盾情况. 变化  $m, n$  对(7) 式的  $\tau_n$  求最大值, 由极值条件可求出  $m, n: \frac{\partial \tau_n}{\partial m} = 0, \frac{\partial \tau_n}{\partial n} = 0$ . 如极大值存在, 则将  $m, n$  代入(7) 式即可求得面上抗剪强度表达式

$$s = \tau_n = f(\sigma_n, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{8}$$

如果极值不存在, 则剪应力  $\tau_n$  将在  $m, n$  的取值区间的端点达到最大值. 总之, 面上的抗剪强度可用(8) 式的形式表示, 说明某面抗剪强度与法向应力大小和洛德参数有关.

## 2 空间破坏面位置

设某点应力未达到破坏状态, 那么过该点任意面的抗剪强度一般表达式为(8), 剪应力不能超过其抗剪强度  $s$ , 面上抗剪安全系数可定义为

$$F_s = \frac{s}{\tau_n} = \frac{f(\sigma_n, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\tau_n}. \tag{9}$$

面上的法向应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$  为:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1) n^2, \\ \tau_n &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2}. \end{aligned}$$

在  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  一定的情况下, 抗剪安全系数最小的面即为潜在滑动面, 对(9) 取极值得:

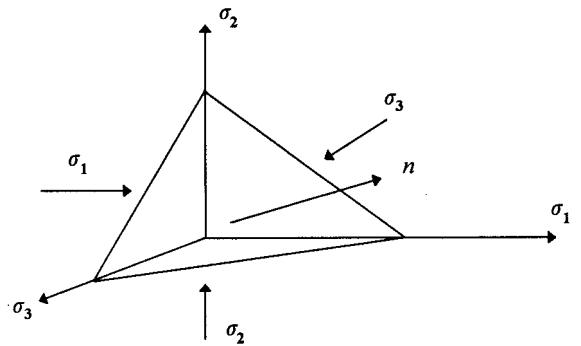


图 3 1 点主应力状态

$$\frac{F_s}{m} = 0, \frac{F_s}{n} = 0, \frac{f}{m} - f \frac{1}{m} = 0, \frac{f}{n} - f \frac{1}{n} = 0. \quad (10)$$

由(10) 可得

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}. \quad (11)$$

由(3) ~ (5) 式可得:

$$\frac{1}{m} = 2m(\sigma_2 - \sigma_1), \frac{1}{n} = 2n(\sigma_3 - \sigma_1), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} = & \frac{2(\sigma_1 - \sigma_1)l^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)n^2}{2} + \frac{-(\sigma_1 - \sigma_1)^2 2m + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 2m}{2} = \\ & - \frac{(2\sigma_1 l^2 + 2\sigma_2 m^2 + 2\sigma_3 n^2) - 2}{2} + \frac{m(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2)}{2} = \\ & \frac{m(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2)}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{n(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3 - 2)}{2}. \quad (14)$$

将(12) ~ (14) 代入(11) 得

$$\frac{2m(\sigma_2 - \sigma_1)n(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3 - 2)}{2} = \frac{2n(\sigma_3 - \sigma_1)m(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2)}{2}, \quad (15)$$

简化后得  $\frac{mn(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} = 0$ , 即  $m = 0$  或  $n = 0$ .

(15) 式成立的前提是  $m = 0$  或  $n = 0$ , 说明(9) 式在  $l, m, n$  的取值区间内无极值, 只有在  $l, m, n$  的取值区间的端点,  $F_s$  才可取最小值. 很显然, 只有  $m = 0, l^2 + n^2 = 1$  时,  $F_s$  才可能取得最小值, 即空间潜在滑面只可能垂直于  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  作用线所组成的面.

(9) 式定义的抗剪安全系数适合于任何情况. 当点未破坏时,  $F_s$  最小的面将是潜在滑移面; 当点破坏时,  $F_s$  最小的面将是破坏面. 不管是破坏面还是潜在滑移面, 均垂直于  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  作用线所组成的面, 即中主应力面. 此结论对求解岩土空间滑移面很有意义, 且使滑移面的求解过程大大简化, 使空间滑面问题转化为  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  作用线所组成的平面问题.

参考文献:

- [1] 张国祥. 三维边坡滑动面及稳定性的非线性弹塑性有限元分析 [D]. 长沙: 长沙铁道学院, 1999.
- [2] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用 [J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1- 9.
- [3] YU M H, HE L N. A New Model and Theory on Yield and Failure of Material Under the Complex Stress State [J]. Mechanical Behavior of Materials (ICM- 6), 1991, (3): 841- 846.
- [4] 张国祥, 刘宝琛. 潜在滑移线理论确定深基础承载力 [A]. 中国建筑学会地基基础专业委员会, 全国山区地基基础学术会议论文集 [C]. 重庆: 重庆大学出版社, 1997. 246- 251.
- [5] 张国祥. 土体最危险破坏面确定方法 [J]. 铁道工程学报, 1996, 52(4): 55- 60.
- [6] 张国祥, 刘宝琛. 潜在滑移线法分析边坡滑动面及稳定性 [J]. 土木工程学报, 2002, 35(6): 79- 81.
- [7] 张国祥, 刘宝琛. 岩土面抗剪强度与破坏面位置 [J]. 岩土力学, 2002, 23(6): 730- 732.
- [8] 张国祥, 刘新华, 魏伟. 二维边坡滑动面及稳定性弹塑性有限元分析 [J]. 铁道学报, 2003, 25(2): 79- 83.
- [9] 张国祥, 刘宝琛. 潜在滑移线理论及浅基承载力分析 [J]. 长沙铁道学院学报, 1997, 15(2): 95- 99.

## Theoretical Analysis of Geotechnical Space Slip Surface and General Shear Strength

ZHANG Guo-xiang, CHENG Ling-ling

(Civil Architectural Engineering College, Central South University, Changsha 410075, Hunan China)

**Abstract:** A general shear strength formula of geotechnical space slip surface and a general relation between space failure surface position and strength criterion are proposed in the paper. It is obtained by theoretical analysis that geotechnical space slip surface is vertical with intermediate principal stress plane and the shear strength of geotechnical space slip surface relates only to vertical stress and Lode parameter. It provides theoretical basis for the determination of geotechnical space slip surface and has a guiding significance for studying geotechnical strength criterion.

**Key words:** space failure surface position; general shear strength formula