第 24 卷 第 3 期
2003 年 9 月

吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)

Vol. 24 No. 3
Sept. 2003

文章编号: 1007-2985(2003)03-0003-03

一类非齐次 A-调和方程组弱解的正则性

周树清[1,2], 赵霆雷[2]

(1. 湖南师范大学数学系, 湖南 长沙 410081; 2. 中国科学院武汉物理与数学所, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 讨论满足 $p(1<p\le n)$ 次控制增长条件的散度型非齐次 A-调和方程组: $-D(A_i(x,u,Du))+B_i(x,u,Du)=0$, 其中 $i=1,\cdots,N$, 通过建立逆 Hölder 不等式, 得出该方程组弱解的局部 $W^{1,q}$-正则性及局部 Hölder 连续性.

关键词: 非齐次 A-调和方程组; 局部 $W^{1,q}$-正则性; 局部 Hölder 连续性; 逆 Hölder 不等式

中图分类号: O175.25　　文献标识码: A

A-调和方程和方程组

$$D A_i(x,u,Du)+B_i(x,u,Du)=0 \qquad i=1,\cdots,N, \tag{1}$$

其中 $A_i(x,u,Du)$ 和 $B_i(x,u,Du)$ 满足 p 次控制增长条件. 近年来, 对其弱解的正则性研究, GIAQUINTA M[1] 得到了方程组(1) 在 $p=2$ 时的局部 $W^{1,q}(q>2)$-正则性; SCHULZ F[2] 和周树清等[3] 分别得出了 $p=2$, $A_i(x,u,Du)=a(x,u,Du)Du^i$, $B_i(x,u,Du)=Df_i+g^i$ 时方程组(1) 的 Lipschitz 解与 Hölder 连续解的 $C^{1,\alpha}$-正则性; 谭中[4] 和冉启康[5] 分别得到了 $N=1$, $A(x,u,Du)=|Du|^{p-2}Du+f(x)$ 及 $A(x,u,Du)=|Du|^{p-2}Du+F(x,u)$ 时方程(组)(1) 的局部 $C^{1,\alpha}$-正则性; 郑神州[6] 在 $B_i(x,u,Du)=0$ 及 $A_i(x,u,Du)=A_i(x,Du)$ 且 $A_i(x,Du)$ 关于 Du 是齐次的以及单调的假设下得出了方程组(1) 的部分 $C^{0,\alpha}$-正则性; CAFFARELLI 等[7] 利用 Calderón-Zygmund 分解定理以及逼近理论得出了 $B_i(x,u,Du)=0$ 以及 $A_i(x,u,Du)=A_i(x,Du)$ 的方程(1) 的 $W^{1,q}$-正则性. 本文中, 笔者利用文献[1] 中的方法, 较 CAFFARELLI 等[7] 更为简单地得出了在 $B_i(x,u,Du)\ne 0$ 的情况下方程组(1) 的局部 $W^{1,q}$-正则性以及 Hölder 连续性, 从而推广了文献[1~7] 中的结果.

1 假设及主要结果

考虑散度型非齐次 A-调和方程组

$$-D A_i(x,u,Du)+B_i(x,u,Du)=0 \qquad i=1,\cdots,N. \tag{2}$$

其中 $A_i(x,u,h)$ 和 $B_i(x,u,h)$ 为 Caratheodory 函数, 满足

$$|A_i(x,u,h)|\le\lambda_1(|h|^{p-1}+|u|^{\frac{p-1}{p}r}+f_i), \tag{3}$$

$$|B_i(x,u,h)|\le\lambda_2(|h|^{p(1-\frac{1}{r})}+|u|^{r-1}+f_i), \tag{4}$$

其中, 当 $1<p<n$ 时, $r=\dfrac{np}{n-p}$, 当 $p=n$ 时, r 为大于 p 的任何数; f_i, f_i 满足适当的可积性条件.

$$A_i(x,u,h)h^i\ge\lambda|h|^p, \tag{5}$$

其中 $\lambda>0$, λ_1, $\lambda_2\ge 0$ 为常数.

定义 1 称 $u\in W^{1,p}(\Omega,R^N)$ 为方程组(2) 的弱解, 是指

收稿日期: 2003-06-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19531060, 10271118)
作者简介: 周树清(1968-), 男, 湖南省邵阳市人, 湖南师范大学数学系副教授, 中国科学院武汉物理与数学研究所博士研究生, 主要从事应用偏微分方程研究.

$$\int_{\Omega}[A_i(x,u,Du)D\varphi^i + B_i(x,u,Du)\varphi^i]\mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

对所有 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$ 都成立.

定理1 假设(3)至(5)式成立, 且 $f_i\in L^{\sigma}(\Omega)$, $f_i\in L^{s}(\Omega)$, $\sigma>\frac{p}{p-1}$, $s>\frac{r}{r-1}$, 则存在1个数 $q>p$, 使得若 $u\in W^{1,p}(\Omega,R^N)$ 为方程组(2)的弱解, 则 $u\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,R^N)$. 更一般地, 若 $B_{R/2}\subset B_R\subset\subset\Omega$, 当 $R<R_0$ 时, 有

$$[\int_{B_{R/2}}(|Du|^p+|u|^r)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}x]^{\frac{1}{q}} \le C\{[\int_{B_R}(|Du|^p+|u|^r)\mathrm{d}x]^{\frac{1}{p}} + [\int_{B_R}(\overline{F}^p+\overline{f}^p)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}x]\}.$$

记 $\int_{B_R} f\mathrm{d}x = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f\mathrm{d}x$, $\overline{F} = (\sum_i f_i^2)^{\frac{1}{2(p-1)}}$, $\overline{f} = R^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}(\int_{B_R}|f|^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}x)^{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}|f|^{\frac{r}{p(r-1)}}$, $|f| = (\sum_i f_i^2)^{\frac{1}{2}}$; B_R 表示以 x 为圆心, R 为半径的球; 这里 $C=C(n,\lambda,\lambda_1,\lambda_2,q)$, R_0 是依赖于 u 的常数.

利用 Sobolev 定理可有如下推论:

推论1 在定理1的假设条件下, 若 $p=n$, 则 u 是局部 Hölder 连续的.

2 定理的证明

证明 证明过程中, C 代表仅依赖于已知常数的不同常数. 记 $f=(f_i)$, $F=(f_i)$. 取 $\eta\in C_0^{\infty}(B_R)$, $0\le\eta\le 1$, 在 $B_{R/2}$ 上, $\eta\equiv 1$, $|D\eta|\le\frac{C}{R}$, 在(6)式中取 $\varphi=\eta^p(u-u_R)$ 为试验函数, 其中 $u_R=\int_{B_R}u\mathrm{d}x$, 得

$$\int_{B_R}\eta^p|Du|^p\mathrm{d}x \le p\lambda_1\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||Du|^{p-1}\mathrm{d}x + p\lambda_1\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||u|^{\frac{(p-1)r}{p}}\mathrm{d}x +$$
$$p\lambda_1\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||F|\mathrm{d}x + \lambda_2\int_{B_R}\eta^p|Du|^{p(1-\frac{1}{r})}|u-u_R|\mathrm{d}x +$$
$$\lambda_2\int_{B_R}\eta^p|u|^{r-1}|u-u_R|\mathrm{d}x + \lambda_2\int_{B_R}\eta^p|f||u-u_R|\mathrm{d}x.$$

现在来估计以上各式:

$$\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||Du|^{p-1}\mathrm{d}x \le (\int_{B_R}\eta^p|Du|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}(\int_{B_R}|D\eta|^p|u-u_R|^p\mathrm{d}x)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\le \varepsilon_1\int_{B_R}\eta^p|Du|^p\mathrm{d}x + \frac{C}{\varepsilon_1}\int_{B_R}|D\eta|^p|u-u_R|^p\mathrm{d}x;$$

$$\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||u|^{\frac{(p-1)r}{p}}\mathrm{d}x \le C\int_{B_R}|u|^r\mathrm{d}x + C\int_{B_R}|D\eta|^p|u-u_R|^p\mathrm{d}x;$$

$$\int_{B_R}\eta^{p-1}|D\eta||u-u_R||F|\mathrm{d}x \le C\int_{B_R}|F|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x + C\int_{B_R}|D\eta|^p|u-u_R|^p\mathrm{d}x;$$

$$\int_{B_R}\eta^p|Du|^{p(1-\frac{1}{r})}|u-u_R|\mathrm{d}x \le (\int_{B_R}|u-u_R|^r\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r}}(\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x)^{1-\frac{1}{r}}$$
$$\le CR^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}(\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x;$$

$$\int_{B_R}\eta^p|u|^{r-1}|u-u_R|\mathrm{d}x \le (\int_{B_R}|u-u_R|^r\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r}}(\int_{B_R}|u|^r\mathrm{d}x)^{\frac{r-1}{r}}$$
$$\le CR^{r[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}(\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x)^{\frac{r}{p}-1}\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x + C\int_{B_R}|u|^r\mathrm{d}x;$$

$$\int_{B_R}\eta^p|f||u-u_R|\mathrm{d}x \le (\int_{B_R}|u-u_R|^r\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r}}(\int_{B_R}|f|^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}x)^{\frac{r-1}{r}} \le CR^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}$$
$$(\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}(\int_{B_R}|f|^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}x)^{\frac{r-1}{r}} \le \varepsilon\int_{B_R}|Du|^p\mathrm{d}x +$$
$$\frac{C}{\varepsilon}R^{p[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}(\int_{B_R}|f|^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}x)^{\frac{p(r-1)}{r}}.$$

取合适的 ε_1, 由以上各式可得

$$\int_{B_{R2}} |Du|^p dx \quad CR^{-p}\int_{B_R} |u-u_R|^p dx + C\int_{B_R} |u|^r dx + C[\quad + R^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}(\int_{B_R} |Du|^p dx)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} +$$
$$R^{r[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}(\int_{B_R} |Du|^p dx)^{\frac{r}{p}-1}]\int_{B_R} |Du|^p dx + C\int_{B_R} |F|^{\frac{p}{p-1}} dx +$$
$$CR^{p[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}(\int_{B_R} |f|^{\frac{r}{r-1}} dx)^{\frac{p(r-1)}{r}}. \tag{7}$$

现在估计 $\int_{B_R} |u|^r dx$,

$$\int_{B_R} |u|^r dx \quad C\int_{B_R} |u-u_R|^r dx + C\int_{B_R} |u_R|^r dx \quad CR^{r[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}$$
$$(\int_{B_R} |Du|^p dx)^{\frac{r}{p}-1}\int_{B_R} |Du|^p dx +$$
$$C|B_R|(\int_{B_R} |u|^{r\frac{q}{p}} dx)^{\frac{p}{q}}, \tag{8}$$

这里 $1 < q < p$.

令 $\overline{F} = |F|^{\frac{1}{p-1}}$, $\overline{f} = R^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}(\int_{B_R} |f|^{\frac{r}{r-1}} dx)^{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} |f|^{\frac{r}{p(r-1)}}$, 在(7) 式两边各加上 $\int_{B_{R2}} |u|^r dx$, 并利用(8) 式得

$$\int_{B_{R2}} (|Du|^p + |u|^r) dx \quad CR^{-p}\int_{B_R} |u-u_R|^p dx + C|B_R|(\int_{B_R} |u|^{r\frac{q}{p}} dx)^{\frac{p}{q}} + C\int_{B_R} (\overline{F}^p + \overline{f}^p) dx +$$
$$C[\quad + R^{n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1}(\int_{B_R} |Du|^p dx)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} + R^{r[n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1]}$$
$$(\int_{B_R} |Du|^p dx)^{\frac{r}{p}-1}]\int_{B_R} |Du|^p dx. \tag{9}$$

注意到, 当 $n > p$ 时, $\frac{r}{p}-1$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{r} > 0$, 当 $n = p$ 时, $n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}) + 1 > 0$. 于是由 Lebesgue 绝对连续性定理可知, (9) 式中 $\int_{B_R} |Du|^p dx$ 的系数在 $R \quad 0$ 时, 趋近于 C. 因而, 两边同除以 R^n, 并且令 $q = \frac{np}{n+p}$, 使用 Sobolev- Poincar 不等式, 同时取 适当小, 当 $R \quad R_0$ 时, 得到

$$\int_{B_{R/2}} (|Du|^p + |u|^r) dx \quad C[\int_{B_R} (|Du|^p + |u|^{r\frac{q}{p}}) dx]^{\frac{p}{q}} + C\int_{B_R} (\overline{F}^p + \overline{f}^p) dx +$$
$$\frac{1}{2}\int_{B_R} (|Du|^p + |u|^r) dx.$$

于是由下面的命题可知结论成立.

命题 1[1]　设 Q 是一个 n 维方体. 假设对每一个 $x_0 \quad Q$ 和每一个 $R < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_0, \quad Q) \quad R_0$, 都有

$$\int_{Q_R(x_0)} g^q dx \quad b(\int_{Q_{2R}(x_0)} g dx)^q + C\int_{Q_{2R}(x_0)} f^q dx + \int_{Q_{2R}(x_0)} g^q dx,$$

其中 $R_0, b, C,$ 是满足 $b, C > 1$, $R_0 > 0$, $0 \quad 1$ 的常数, 则存在仅依赖于 $R_0, b, C, \ , q, n$ 的正常数 和 c, 使得对 $p \quad [q, + \quad)$, 有 $g \quad L^p_{loc}(Q)$, 且对 $R < R_0$, $Q_{2R} \quad Q$, 有

$$\int_{Q_R} g^q dx \quad c[(\int_{Q_{2R}} g^q dx)^{\frac{1}{q}} + (\int_{Q_{2R}} f^p dx)^{\frac{1}{p}}].$$

参考文献:

[1] GIAQUINTA M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Eliptic Systems [M]. New Jersy: Princeton University Press, 1983.

[2] SCHULZ F. Regularity for Certain Quasi- Linear Elliptic Systems of Divergence Structure [J]. Indiana Univ. Math., 1990, 39(2): 303- 314.

[3] ZHOU Shu-qing, RAN Qi-kang. Regularity for Certain Quasi- Linear Elliptic Systems of Divergence Structure [J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21B(2): 196- 202.

[4] TAN Zhong, YAN Zi-qian. Regularity of Weak Solutions to Some Degenerate Elliptic Equations and Obstacle Problem [J]. Northeastern Math., 1993, 9(27): 143- 156.

(下转第 12 页)

ing, 2002, 29(3): 5- 10.

[4] YAR M. HAMMOND J K. Parameter Estimation for Hysteretic Systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 117(1): 161- 172.

[5] CHEN Nai-li, TONG Zhong-fang. Separately Identifying the Parameters of Nonlinear Hysteretic System [J]. Vibration and Shock, 1994, 13(4): 7- 14.

[6] ZHAO Rong-guo, CHEN Zhong-fu, ZHANG Chun-yuan. A Nonlinear Viscoelastic Constitutive Model and Its Application for Polymer [J]. Journal of Xiangtan Mining Institute, 2003, 18(1): 48- 52.

[7] MASRI S F. Forced Vibration of the Damped Bilinear Hysteretic Oscillator [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1975, 57 (1): 106- 112.

[8] BABER T T, WEN Y K. Random Vibration of Hysteretic Degrading Systems [J]. American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1982, 107: 1 069- 1 089.

[9] BADRAKHAN F. Dynamic Analysis of Yielding and Hysteretic System by Polyno- Mial Approximation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 125(1): 23- 42.

类椭圆非线性迟滞隔振系统的动力学模型

赵荣国[1,2], 陈忠富[2], 徐友钜[1], 胡绍全[1], 黄西成[1]

(1. 中国工程物理研究院结构力学研究所, 四川 绵阳 621900;
2. 中国工程物理研究院研究生部, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 应用类椭圆函数建立了非线性迟滞隔振系统的动力学模型, 并导出了系统动力学模型的实用表达式. 该模型由非线性刚度和非线性阻尼构造而成, 模型中各个参数具有明确的物理意义, 各阶刚度系数能很好地描述系统中存在的线性和非线性特性, 而阻尼函数能很好地描述系统的迟滞和耗能特性. 模型中含有待辨识的阻尼成分函数, 该函数能反映系统中可能存在的高阶阻尼、粘性阻尼和干摩擦阻尼等各种阻尼成分. 由于在模型中将阻尼项表示为位移的函数, 因而减少了测量工作量, 方便了数值计算. 应用动力学模型重构了非线性迟滞隔振系统的恢复力- 位移回线, 结果表明理论回线与实验回线吻合得很好.

关键词: 动力学模型; 非线性迟滞隔振系统; 类椭圆函数; 阻尼

中图分类号: TH113; O322 文献标识码: A

(上接第5页)

[5] 冉启康, 周树清. 一类退缩椭圆型方程弱解的正则性 [J]. 高校应用数学学报, 2000, 15A(1): 41- 50.

[6] 郑神州. A- 调和方程组的部分正则性和拟正则映照 [J]. 数学年刊, 1998, 19A(1): 63- 72.

[7] CAFFARELLI L A, PERAL I. On $W^{1,p}$- Estimates for Elliptic Equations in Divergence Form [J]. Comm. in Pure and Appl. Math., 1998, 11(1): 1- 21.

Regularity of Weak Solutions to a Class of Non- Homogeneous A- Harmonic Systems

ZHOU Shu-qing[1,2], ZHAO Ting-lei[1]

(1. Dept. of Math., Hunan Normal Univ., Changsha 410081, Hunan China; 2. Phy. and Math. of Wuhan Inst., Chinese Acad. of Sci., Wuhan 430071, Hubei China)

Abstract: This paper studies non- homogeneous A- harmonic systems of divergence form- $D A_i(x, u, Du) + B_i(x, u, Du) = 0 (i = 1, \quad , N)$, satisfying $p(1< p \quad n)$, power controllable growth conditions. By constructing reverse H lder inequlity, local $W^{1,q}$- regularity and H lder continuity of the weak solutions to above systems are obtained.

Key words: non- homogeneous A- harmonic; local $W^{1,q}$- regularity; local H lder continuity; reverse H lder inequlity