文章编号: 1007- 2985(2003)02- 0073- 04

关于中心极限定理的注记

陈　冬[1], 来向荣[2]

(1. 北京联合大学基础部, 北京　100101; 2. 北京工业大学应用数理学院, 北京　100022)

摘　要: 讨论了服从中心极限定理的复值随机变量序列及 m 元实值随机变量序列的性质, 得到与中心极限定理有关的几个定理.

关键词: 中心极限定理; 依概率收敛; 以概率 1 收敛

中图分类号: O211.4　　文献标识码: A

设($_i$, i 　1) 是概率空间(, F, P) 上的实值随机变量序列, 对每个自然数 n, $D(\sum_{i=1}^{n} {}_i)$ 存在且不为 0, 令

$$B_n = \sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} {}_i)},\quad {}_n = B_n^{-1}[\sum_{i=1}^{n} {}_i - E(\sum_{i=1}^{n} {}_i)],$$

如果对每个实数 x, 有

$$\lim_{n} P({}_n < x) = \int^{x} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)\,\mathrm{d}u,$$

则称($_i$, i 　1) 服从中心极限定理.[1]

由文献[2] 第 384 页的定理 10.25 知, 上述收敛对 x 　(- 　, 　) 是一致成立的.

定理 1　设实值随机变量序列($_i$, i 　1) 服从中心极限定理, 则对 n 　1 存在与 $_n$ 同分布的实值随机变量 $_n$, 并存在服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的实值随机变量 , 使($_n$, n 　1) 依概率收敛到 .

证明　由文献[3] 中的定理即可得证.

定理 2　设实值独立随机变量序列($_i$, i 　1) 服从中心极限定理, 则存在服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的实值随机变量 , 使($_n$, n 　1) 以概率 1 收敛到 .

证明　由文献[4] 第 146 页的定理 2.5 知, ($_n$, n 　1) 以概率 1 收敛到某实值随机变量 , 由文献[2] 第 383 页的定理 10.24 知, ($_n$, n 　1) 依分布收敛到 , 由文献[2] 第 382 页知, 服从标准正态分布 $N(0, 1)$. 证毕.

设(Z_i, i 　1) 是概率空间(, F, P) 上的复值随机变量序列, X_i, Y_i 分别是 Z_i 的实部和虚部(i 　1), 对每个自然数 n, $D(\sum_{i=1}^{n} X_i)$ 与 $D(\sum_{i=1}^{n} Y_i)$ 皆存在, 且皆不为 0, 令

$$B_{n1} = \sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} X_i)},\ B_{n2} = \sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} Y_i)},\ \mathrm{j} = \sqrt{-1},$$

收稿日期: 2002- 09- 01

作者简介: 陈　冬(1957-), 女, 北京市人, 理学硕士, 北京联合大学基础部副教授, 主要从事概率统计研究.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$W_n = B_{n1}^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i - E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)\Big] + \mathrm{j}B_{n2}^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i - E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big)\Big],$$

以 $F_n(x, y)$ 表示 W_n 的分布函数,如果对 $x, y \in (-\infty, +\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi}\exp\Big[-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\Big]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称$(Z_i, i \geq 1)$ 服从中心极限定理.[5]

定理 3　设$(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列,X_i, Y_i 分别是Z_i 的实部和虚部$(i \geq 1)$,如果$(Z_i, i \geq 1)$ 服从中心极限定理, 则$(X_i, i \geq 1)$ 与$(Y_i, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理.

证明　对 $n \geq 1$, 以 $\varphi_n(t_1, t_2)$ 表示 W_n 的特征函数, 以 $\varphi_{n1}(t_1)$, $\varphi_{n2}(t_2)$ 分别表示 W_n 的实部和虚部的特征函数, 由文献[5] 中的引理, 有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n1}(t_1) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, 0) = \exp\Big(-\frac{1}{2}t_1^2\Big),$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n2}(t_2) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0, t_2) = \exp\Big(-\frac{1}{2}t_2^2\Big),$$

于是, 由文献[6] 第 34 页的定理 3.3 得证.

定理 4　设$(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列,X_i, Y_i 分别是Z_i 的实部与虚部$(i \geq 1)$,且存在充分大的自然数N,当 $i \geq N$ 时,$X_1, \cdots, X_i, Y_1, \cdots, Y_i$ 相互独立, 如果$(X_i, i \geq 1)$ 与$(Y_i, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理, 则$(Z_i, i \geq 1)$ 服从中心极限定理.

证明　$\varphi_n(t_1, t_2)$, $\varphi_{n1}(t_1)$, $\varphi_{n2}(t_2)$ 同定理 3, 注意到 W_n 的实部与虚部相互独立$(n \geq 1)$, 得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, t_2) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n1}(t_1)\varphi_{n2}(t_2) = \Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}t_1^2\Big)\Big]\Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}t_2^2\Big)\Big] = \exp\Big[-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\Big].$$

于是, 由文献[5] 中的引理得证.

定理 5　设$(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列,X_i, Y_i 分别是Z_i 的实部与虚部$(i \geq 1)$,如果$(X_i, i \geq 1)$ 与$(Y_i, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理, 则对 $n \geq 1$,存在与 W_n 的实部 ξ_{n1} 同分布的实值随机变量 ξ'_{n1},存在与 W_n 的虚部 ξ_{n2} 同分布的实值随机变量 ξ'_{n2}, 并存在服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的实值随机变量 ξ, η, 使$(W'_n, n \geq 1)$ 依概率收敛到 $\xi + \mathrm{j}\eta$,其中 $W'_n = \xi'_{n1} + \mathrm{j}\xi'_{n2}$, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$.

证明　由定理 1 及文献[7] 中的引理得证.

系　设$(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列,如果$(Z_i, i \geq 1)$ 服从中心极限定理,由定理 5 中的结论成立.

证明　由定理 3, 定理 5 得证.

为证下一个定理, 先证如下引理:

引理 1　如果复值随机变量序列$(Z_i, i \geq 1)$ 以概率 1 收敛到复值随机变量 Z,则$(Z_i, i \geq 1)$ 依分布收敛到 Z.

证明　X_i, Y_i 分别表示Z_i 的实部和虚部$(i \geq 1)$,以X, Y 分别表示Z 的实部和虚部, 以$g_i(t_1, t_2)$ 表示 Z_i 的特征函数, 以 $g(t_1, t_2)$ 表示 Z 的特征函数, 以 j 表示 $\sqrt{-1}$, 则

$$g_i(t_1, t_2) = E\exp[\mathrm{j}(t_1X_i + t_2Y_i)] = E\cos(t_1X_i + t_2Y_i) + \mathrm{j}E\sin(t_1X_i + t_2Y_i) =$$

$$\int_\Omega \cos(t_1X_i + t_2Y_i)P(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{j}\int_\Omega \sin(t_1X_i + t_2Y_i)P(\mathrm{d}\omega).$$

由控制收敛定理及文献[8] 中的引理 1, 得

$$\lim_{i\to\infty} g_i(t_1, t_2) = \int_\Omega \cos(t_1X + t_2Y)P(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{j}\int_\Omega \sin(t_1X + t_2Y)P(\mathrm{d}\omega) =$$

$$E\exp[\mathrm{j}(t_1X + t_2Y)] = g(t_1, t_2).$$

再由文献[6] 第 59 – 60 页的定理 7.5 及第 16 页的定理 3.6, 引理 1 得证.

定理 6　设$(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列,X_i, Y_i 分别是Z_i 的实部与虚部$(i \geq 1)$,且存在充分大的自然数N,当 $i \geq N$ 时,$X_1, \cdots, X_i, Y_1, \cdots, Y_i$ 相互独立, 如果$(X_i, i \geq 1)$ 与$(Y_i, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

理, 则存在复值随机变量 Z, Z 的分布函数是二维标准正态分布 $N(0,1;0,1;0)$ 的分布函数, 使 $(W_n, n \geq 1)$ 以概率 1 收敛到 Z.

证明　由假设知, $(X_i, i \geq 1)$ 与 $(Y_i, i \geq 1)$ 都是实值独立随机变量序列. 对 $n \geq 1$, 以 ξ_{n1}, ξ_{n2} 分别表示 W_n 的实部和虚部, 由定理 2 知, 存在服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的实值随机变量 ξ, η, 使

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{n1} = \xi \ (\text{a.s.}), \ \lim_{n\to\infty} \xi_{n2} = \eta \ (\text{a.s.}),$$

令 $Z = \xi + \mathrm{j}\eta$, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$, 由文献[8] 中的引理 1 得 $\lim_{n\to\infty} W_n = Z$ (a.s.). 以 $\varphi_n(t_1, t_2)$ 表示 W_n 的特征函数 $(n \geq 1)$, 以 $\varphi(t_1, t_2)$ 表示 Z 的特征函数, 由引理 1 及文献[6] 第 60 页的定理 7.6 得 $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2)$, 由定理 4 知, $(Z_i, i \geq 1)$ 服从中心极限定理, 由文献[5] 中的引理得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, t_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right],$$

于是

$$\varphi(t_1, t_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right],$$

从而 Z 服从二维标准正态分布 $N(0,1;0,1;0)$. 定理 6 证毕.

系　设 $(Z_i, i \geq 1)$ 是复值随机变量序列, X_i, Y_i 分别是 Z_i 的实部与虚部 $(i \geq 1)$, 且存在充分大的自然数 N, 当 $i \geq N$ 时, $X_1, \cdots, X_i$ 与 $Y_1, \cdots, Y_i$ 相互独立, 如果 $(Z_i, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理, 则定理 6 中的结论成立.

证明　由定理 3, 仿定理 6 可得证.

设 m 是自然数, 对 $l = 1, \cdots, m$ $(X_{li}, i \geq 1)$ 是实值随机变量序列, 对 $n \geq 1$, $l = 1, \cdots, m$, $D(\sum_{i=1}^{n} X_{li})$ 皆存在且皆不为 0, 令

$$B_{nl} = \sqrt{D(\sum_{i=1}^{n} X_{li})},\ Y_{nl} = B_{nl}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{li} - E(\sum_{i=1}^{n} X_{li})\right],$$

以 $F_n(x_1, \cdots, x_m)$ 表示 $(Y_{n1}, \cdots, Y_{nm})$ 的分布函数, 如果对 $(x_1, \cdots, x_m) \in (-\infty, \infty)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_1, \cdots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} (\sqrt{2\pi})^{-m} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} u_l^2\right) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m,$$

则称 m 个实值随机变量序列 $(X_{li}, i \geq 1, l = 1, \cdots, m)$ 服从 m 元中心极限定理[9]; 1 元中心极限定理即实值随机变量序列的中心极限定理.

定理 7　如果 m 个实值随机变量序列 $(X_{li}, i \geq 1, l = 1, \cdots, m)$ 服从 m 元中心极限定理, 则 $(X_{1i}, i \geq 1), \cdots, (X_{mi}, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理.

证明　以 $\varphi_n(t_1, \cdots, t_m)$ 表示 $F_n(x_1, \cdots, x_m)$ 的特征函数, 以 $\varphi_{n1}(t_1)$ 表示 Y_{n1} 的特征函数, 则

$$\varphi_{n1}(t_1) = \varphi_n(t_1, 0, \cdots, 0),$$

由文献[9] 中的引理得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, 0, \cdots, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2}t_1^2\right),$$

再由文献[6] 第 34 页的定理 3.3 知, $(X_{1i}, i \geq 1)$ 服从中心极限定理. 类似可证 $(X_{2i}, i \geq 1), \cdots, (X_{mi}, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理. 证毕.

定理 8　设 $(X_{li}, i \geq 1, l = 1, \cdots, m)$ 是 m 个实值随机变量序列, 且存在充分大的自然数 N, 当 $i \geq n$ 时, $X_{11}, \cdots, X_{1i}, \cdots, X_{m1}, \cdots, X_{mi}$ 相互独立, 如果 $(X_{1i}, i \geq 1), \cdots, (X_{mi}, i \geq 1)$ 皆服从中心极限定理, 则 $(X_{li}, i \geq 1, l = 1, \cdots, m)$ 服从 m 元中心极限定理.

证明　对 $l = 1, \cdots, m$, 以 $\varphi_{nl}(t_1)$ 表示 Y_{nl} 的特征函数, 由文献[6] 第 32- 33 页的定理 3.1, 有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{nl}(t_l) = \exp\left(-\frac{1}{2}t_l^2\right),$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由假设知, Y_{n1}, , Y_{nm} 相互独立, 从而

$$ {}_{n}(t_l, \quad , t_m) = \quad {}^{m}_{l=1} \quad {}_{nl}(t_l), $$

于是得

$$ \lim_{n} \quad {}_{n}(t_1, \quad , t_m) = \exp(- \frac{1}{2} \quad {}^{m}_{l=1} t_1^2), $$

当 $m = 1$ 时, 由文献[6] 第 34 页的定理 3. 3 得证, 当 m 2 时, 由文献[9] 中的引理得证. 证毕.

定理 9 设(X_{li}, i 1, $l = 1$, , m) 是 m 个实值随机变量序列, 如果(X_{1i}, i 1), , (X_{mi}, i 1) 皆服从中心极限定理, 则对 $l = 1$, , m, n 1, 存在与 Y_{nl} 同分布的实值随机变量 Y_{nl}, 并存在服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的实值随机变量 $_l$, 使(Y_{nl}, n 1) 依概率收敛于 $_l$.

证明 由定理 1 得证.

系 如果 m 个实值随机变量序列(X_{li}, i 1, $l = 1$, , m) 服从 m 元中心极限定理, 则定理 9 中的结论成立.

证明 由定理 7, 定理 9 得证.

定理 10 设(X_{li}, i 1, $l = 1$, , m) 是 m 个实值随机变量序列, 如果(X_{li}, i 1), , (X_{mi}, i 1) 皆服从中心极限定理, 且对 $l = 1$, , m 存在充分大自然数 $N(l)$, 当 i $N(l)$ 时, X_{l1}, , X_{li} 相互独立, 则存在服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的实值随机变量 $_1$, , $_m$, 使(X_{li}, i 1) 以概率 1 收敛到 $_l$($l = 1$, , m).

证明 由假设知, 对 $l = 1$, , m, (X_{li}, i 1) 都是实值独立随机变量序列. 于是, 由定理 2 得证.

系 如果 m 个实值随机变量序列(X_{li}, i 1, $l = 1$, , m) 服从 m 元中心极限定理, 且对 $l = 1$, , m, 存在充分大的自然数 $N(l)$, 当 i $N(l)$ 时, X_{l1}, , z_{li} 相互独立, 则定理 10 中的结论成立.

证明 由定理 7, 定理 10 得证.

注 2 个实值随机变量序列服从二元中心极限定理同复值随机变量序列服从中心极限定理是一致的.

参考文献:

[1] 来向荣, 程维虎. 简明概率论教程[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 2001.

[2] 中山大学. 测度与概率基础[M]. 广州: 广东科技出版社, 1984.

[3] 邹辉文, 耿武, 朱忠华. 依概率收敛与依分布收敛的关系[J]. 工科数学, 2001, 17(5): 41- 44.

[4] 陆传荣, 林正炎, 陆传赉. 概率论极限理论引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.

[5] 来向荣, 胡振淑. 复值独立随机变量序列的中心极限定理[J]. 高等数学通报, 1999, 35: 35- 38.

[6] 胡迪鹤. 分析概率论[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

[7] 来向荣, 胡振淑. 关于复值正态随机变量的注记[J]. 高等数学通报, 1998, 33: 25- 26.

[7] 来向荣, 胡振淑. 复值随机变量序列的强大数定律[J]. 高等数学通报, 1999, 35: 31- 35.

[7] 来向荣, 胡振淑. 多个实值独立随机变量序列的中心极限定理[J]. 高等数学通报, 1999, 35: 38- 41.

Notes on Central Limit Theorems

CHENG Dong[1], LAI Xiang-rong[2]

(1. Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing 100101, China; 2. College of Applied Sciences, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

Abstract: Several theorems associated with central limit theorems are derived, when we discussing the properties of complex random variable sequence and $m-$ dimension real random variable sequence that keeping the central limit theorems.

Key words: central limit theorem; convergence in accordance with probability; almost certain convergence

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net