

# 应用蠕变理论对冻土在增应力过程中 蠕变规律的几何分析

盛煜 吴紫汪 朱元林 马巍

(中国科学院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室, 730000)

**摘要** 应用老化理论、遗传蠕变理论、硬化理论和流动理论分别对冻土在衰减蠕变、非衰减蠕变和从衰减蠕变到非衰减蠕变过渡下增应力过程中的蠕变规律进行了几何分析, 结合冻土室内单轴压缩蠕变资料, 讨论了各蠕变理论对冻土在不同增应力条件下蠕变规律的适应性。

**关键词** 冻土 蠕变理论 增应力 几何分析

## 1 引言

冻土的流变性质迫使人们在冻土工程中必需以冻土的长期强度及长期变形为设计依据, 由此展开了冻土蠕变性质的研究。为了突出反映冻土变形的时间依赖性, 冻土蠕变的试验研究通常在恒温、恒应力条件下进行, 在此基础上, 提出了诸多冻土蠕变方程, 如 Vyalov *et al.*(1963)的衰减蠕变方程; Ladanyi(1972)的工程线性蠕变理论; Ting(1983)的全过程冻土蠕变方程等等。这些方程对描述冻土蠕变的不同阶段取得了良好的效果。然而, 在实际工程中, 冻土的受力状态通常处于变化之中, 如在人工冻结工程中, 冻土中应力随冻土的开挖而变化; 在冻土区仓库的运营过程中, 冻土地基中的应力随仓库储量而变化等等。因此有必要研究在变应力过程中冻土的变形规律, 更准确地预测冻土的真实变形过程。解决这一问题的最佳途径莫过于能将恒应力条件下的蠕变规律通过某种迭加原则应用于变应力过程中。从蠕变研究方法的角度看, 蠕变理论实际上起着决定材料蠕变迭加原则的作用, 即不同的蠕变理论确定了材料不同的蠕变迭加原则。一旦蠕变理论确定, 材料的蠕变方程只不过是寻找适宜的数学函数而已。显然, 在恒应力条件, 对不同蠕变理论总能找到与试验相吻合的经验性蠕变方程; 而在变应力条件下, 不同的蠕变理论得到的蠕变过程通常是不相同的。冻土作为由土颗粒、冰、未冻水及空气组成的多元复相体系, 其流变性质十分复杂, 冻土在蠕变过程中的压密、冰的压融及再冻结等伴生现象决定了冻土材料蠕变的多机理综合控制性, 因此, 各种蠕变理论都不可能完全准确地反映冻土在各蠕变阶段的特点。尽管如此, 仍有可能针对冻土在不同蠕变阶段的特点应用不同的相适宜的蠕变理论进行冻土在变应力条件下的变形迭加, 从而解决冻土在变应力过程中的蠕变预测问题。基于这种思想, 本文试图通过室内试验资料, 应用四种传统的蠕变理论对冻土在梯级增应力条件下的蠕变过程进行几

何分析, 以探求蠕变理论在冻土不同类型蠕变过程中的适宜性。为使问题简化, 本文只对冻土在二级增应力作用下典型的单轴压缩蠕变过程进行讨论。试验选用兰州砂土, 含水量为 22%~24%, 干容重为  $1.62 \text{ g/cm}^3$ , 温度为  $-5^\circ\text{C}$  和  $-7^\circ\text{C}$ 。

## 2 蠕变理论及其几何关系

在材料确定后, 蠕变过程中的每一点都可看成应力  $\sigma$ 、应变  $\varepsilon$ 、应变速率  $\dot{\varepsilon}$  及时间  $t$  四个变量的一个状态, 而应变速率是应变对时间的导数, 因此, 蠕变过程可描述为上述四个变量中任何三个构成的流变状态方程, 不同的蠕变理论实际上反映了流变状态变化路径的不同原则。这些原则在描述材料常应力条件下的蠕变过程中并没有本质的区别, 此时, 流变状态方程为一元方程, 所有理论可得到相同的蠕变曲线; 当反映变应力条件下的蠕变过程时, 不同的蠕变理论将决定材料不同的流变方向。常见的蠕变理论有老化理论、遗传蠕变理论、硬化理论和流动理论。假设材料在图 1 所示的梯级增应力过程中发生蠕变, 即先在应力  $\sigma_1$  作用下变形, 当  $t=t_1$  时, 应力增至  $\sigma_2$ ; 同时假设材料在恒应力  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  作用下的蠕变过程线分别为图 2 中的 OPC1 和 OBC2, 对于图 1 所示的梯级增应力过程, 通过不同的蠕变理论对 OPC1 和 OBC2 以不同的方式迭加便可得到  $t>t_1$  时的一簇蠕变过程线。

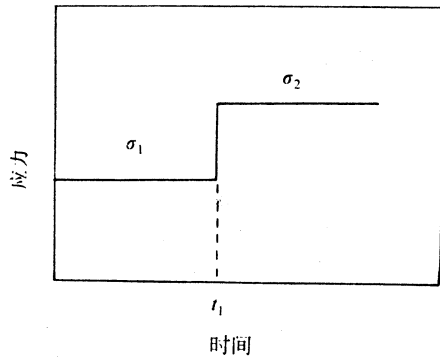


图 1 梯级增应力过程示意图  
Fig.1 Scheme of step increasing stress process

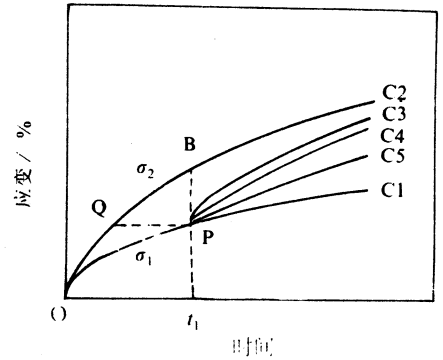


图 2 按老化理论(OPBC2)、遗传蠕变理论(OPC3)、硬化理论(OPC4)、流动理论(OPC5)绘制的梯级增应力下的蠕变过程几何关系图

Fig.2 Geometric scheme of creep process from creep theories

### 2.1 老化理论

老化理论的基本观点是任何时刻的蠕变应变只与此时的应力和材料所经历的整个蠕变时间有关, 其状态方程可描述为:

$$\varepsilon = f_1(\sigma, t) \quad (1)$$

根据方程(1), 从图 2 所示的几何图上看, 当  $t = t_1$  时, 由于应力从  $\sigma_1$  突变到  $\sigma_2$ , 应变也将随之从对应 P 点的  $f_1(\sigma_1, t_1)$  突变到对应 B 点的  $f_1(\sigma_2, t_1)$ ,  $t > t_1$  时, 蠕变沿对应  $\sigma_2$  的蠕变曲线 BC2 发展, 因此, 按老化理论的观点, 对应图 1 应力过程下的蠕变曲线为 OPBC2。

## 2.2 遗传蠕变理论

遗传蠕变理论以 Boltzman 变形迭加原理为基础, 考虑了应力历史对蠕变的影响, 以积分方程形式反映了材料的蠕变过程, 其流变方程为:

$$\varepsilon = \varepsilon_0[\sigma(t)] + \int_0^t f(\sigma(\tau))K(t-\tau)d\tau \quad (2)$$

式中:  $\varepsilon_0[\sigma(t)]$  为对应应力  $\sigma(t)$  的初始应变,  $K(t-\tau)$  为遗传蠕变方程的蠕变核函数,  $f(\sigma(\tau))$  为某应力函数。对应图 1 所示的增应力过程, 当  $t > t_1$  时, 方程(2)变为:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\sigma_2) + \int_0^{t_1} f(\sigma_1)K(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t f(\sigma_2)K(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

对式(3)进行变换可得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[ \varepsilon_0(\sigma_1) + \int_0^{t_1} f(\sigma_1)K(t-\tau)d\tau \right] + \left\{ \varepsilon_0(\sigma_2) + \int_0^{t-t_1} f(\sigma_2)K[(t-t_1)-\tau]d\tau \right\} \\ &\quad - \left\{ \varepsilon_0(\sigma_1) + \int_0^{t-t_1} f(\sigma_1)K[(t-t_1)-\tau]d\tau \right\} \\ &= \varepsilon(t)|_{\sigma_1} + [\varepsilon(t-t_1)|_{\sigma_2} - \varepsilon(t-t_1)|_{\sigma_1}] \\ &= \varepsilon(t)|_{\sigma_1} + \Delta\varepsilon(t-t_1)|_{\Delta\sigma} \end{aligned} \quad (4)$$

在几何图形上,  $\varepsilon(t)|_{\sigma_1}$  即为 OPC1, 而  $\Delta\varepsilon(t-t_1)|_{\Delta\sigma}$  为 OBC2 与 OPC1 从  $t=0$  开始的差值线。因此将 OBC2 与 OPC1 的差值线平移使 O 点与 P 点重合, 再加上 PC1 即为由遗传蠕变理论得到的蠕变曲线 OPC3。

## 2.3 硬化理论

硬化理论认为蠕变过程中应变速率只与应力水平及应变程度有关, 其流变状态方程可描述为:

$$\dot{\varepsilon} = f_2(\sigma, \varepsilon) \quad (5)$$

方程(5)中, 时间变量以隐含形式存在。在几何图形上, 当  $t = t_1$  时, 应变速率从对应 OPC1 线上 P 点的斜率  $f_2(\sigma_1, \varepsilon_P)$  变为 OBC2 线上应变与 P 点相同的 Q 点的斜率  $f_2(\sigma_2, \varepsilon_Q)$ , 当  $t > t_1$  时, 应变过程为等同于从 OBC2 线上 Q 点开始的速率过程, 即将 QBC2 平行向右移动, 使 Q 点与 P 点重合便是由硬化理论得到的蠕变曲线 OPC4。

## 2.4 流动理论

流动理论将材料在蠕变过程中的应变速率看成是应力和时间的函数，其流变状态方程为：

$$\dot{\varepsilon} = f_3(\sigma, t) \quad (6)$$

按照方程(6)，当  $t = t_1$  时，应变速率从  $f_3(\sigma_1, t_1)$  突变为  $f_3(\sigma_2, t_1)$ ，当  $t > t_1$  时，以应变速率  $f_3(\sigma_2, t)$  变形，对应图 2 中的几何图形，将 BC2 平行向下移动，使 B 点与 P 点重合，即为由流动理论确定的蠕变曲线 OPC5。

## 3 蠕变理论对冻土蠕变的几何分析

冻土因应力水平不同将呈现衰减蠕变和非衰减蠕变两种类型，衰减蠕变以应变速率趋于零，应变最终趋于稳定为特征，应力越大，最终稳定应变也越大；非衰减蠕变则包括非稳定、稳定和渐进流三个明显的蠕变阶段，并以冻土破坏而告终，随应力的增大，冻土进入各阶段越早(图 3)。两种蠕变类型差异的本质在于由冻土内部结构对应力水平的不同响应所决定的冻土流变机理的不同，而流变机理不同必然决定了蠕变理论对冻土蠕变过程适应性也不同。以下就不同类型的冻土蠕变在二级增应力下的蠕变过程应用前述四种蠕变理论结合试验资料给出相应几何分析曲线，通过与试验曲线比较确定各蠕变理论对冻土的适应性。

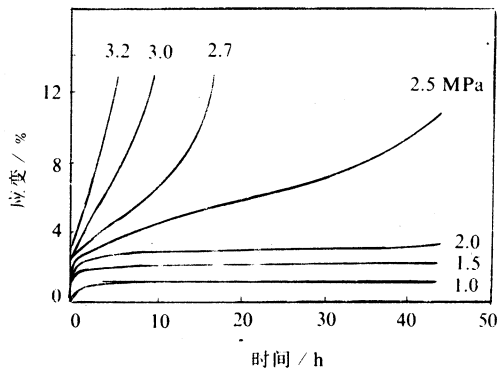


图 3  $-5^{\circ}\text{C}$  冻结砂土蠕变曲线

Fig.3 Fig.3 Creep curves of frozen sand at  $-5^{\circ}\text{C}$

### 3.1 衰减蠕变

图 4 中 OPC1 和 OBC2 分别为应力为 1.0 MPa 和 1.5 MPa 下  $-5^{\circ}\text{C}$  兰州砂土的蠕变试验曲线，OPC 为冻土在 1.0 MPa 应力作用下 48 h 后增加到 1.5 MPa 而得到的蠕变试验曲线。可以看出，变应力后冻土在经历一不稳定蠕变阶段后仍以衰减蠕变蠕变方式发展，且应变向 1.5 MPa 下的蠕变曲线 OPC2 逼近。通过几何分析可得到对应老化管理

论、遗传蠕变理论、硬化理论和流动理论的蠕变曲线分别为 OPBC2、OPC3、OPC4、和 OPC5。显然，流动理论得到的蠕变曲线 OPC5 明显与试验不符，这表明冻土在衰减蠕变过程中的流动机质起着很次要的作用。由遗传蠕变理论和硬化理论得到的蠕变曲线基本上反映了冻土变应力下蠕变的全过程。老化理论尽管在变应力初期不能反映冻土的蠕变特点，但在变形后期基本与试验过程接近，因此，在考虑长期变形时，可以认为老化理论适应于冻土，即可按高一级应力下的蠕变过程预测冻土在变应力下的衰减蠕变变形。

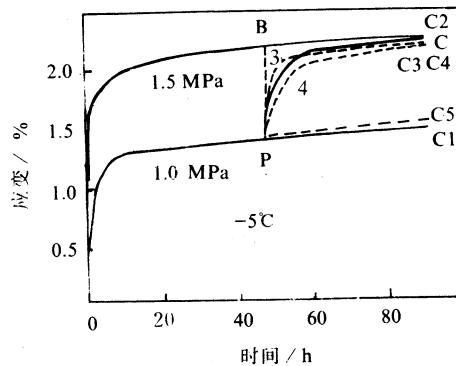


图 4 蠕变理论对冻土衰减蠕变过程的几何分析

Fig.4 Geometric analysis of creep theories on attenuation creep of frozen soil

### 3.2 非衰减蠕变

图 5 中，OPC1 和 OBC2 分别为应力为 3.5 MPa 和 4.0 MPa 时 -7°C 兰州砂土的蠕变试验曲线，在这种应力水平，冻土发生非衰减蠕变。OPC 为在 3.5 MPa 应力作用 15 h 后施加 4.0 MPa 的第二级应力所得到的蠕变试验曲线，在 3.5 MPa 应力作用 15 h 时，冻土已进入稳定流动蠕变阶段。从图中可看出，在施加第二级应力后冻土蠕变速率发生突变，且随即在新的蠕变速率下发展，几乎不再经历不稳定蠕变阶段，此时，从流动理论得到的蠕变过程线 OPC5 与试验结果非常接近，可见，在这种蠕变方式下流动机质对冻土的蠕变起着决定性作用。由老化理论得到的蠕变曲线 OPBC2 与试验值相差甚远，即此时冻土几乎已失去老化材的性质。由遗传蠕变理论得到的蠕变曲线 OPC3 明显小于试验值，这表明冻土在进入稳定流动阶段后，Boltsman 迭加原理并不成立。而由硬化理论得到的蠕变曲线 OPC4 也同样接近试验曲线，由此看来，硬化理论无论描述冻土的衰减蠕变还是非衰减蠕变均较为适应。

### 3.3 从衰减蠕变到非衰减蠕变

当冻土在衰减蠕变过程中施加下一级应力使冻土产生非衰减蠕变时，冻土的蠕变行为展示出与单纯衰减蠕变或非衰减蠕变不同的变化特点。图 6 中 OPC1 为 1.5 MPa 应力下 -5°C 兰州砂土的衰减蠕变曲线，OBC2 为 3.0 MPa 应力下 -5°C 兰州砂土的非衰减蠕变曲线，OPC 为 1.5 MPa 应力作用 6 h 后施加 3.0 MPa 应力得到的蠕变试验曲线。

在增应力后，冻土仍表现了非衰减蠕变的特点，即在增应力初期，冻土经历一段不稳定蠕变阶段，而后进入稳定流动蠕变阶段。应用老化理论、遗传蠕变理论、硬化理论和流动理论通过几何分析得到的蠕变曲线分别为 OPBC2、OPC3、OPC4 和 OPC5。很明显，老化理论不适于此增应力过程中的冻土蠕变迭加；流动理论得到的曲线掩盖了增应力后的不稳定蠕变阶段；而遗传蠕变理论和硬化理论得到的蠕变过程尽管在形态上反映了冻土蠕变的特点，但在蠕变进入稳定流动阶段后，理论曲线明显大于试验值。这种现象是由于冻土在衰减蠕变过程中被强化所致(盛煜等, 1994)，从增应力后的蠕变过程看，衰减蠕变对冻土的强化作用主要表现在强化了冻土的抗流动阻力。有幸的是理论预测值高于试验值，因此，以遗传蠕变理论或硬化理论预测这种条件下冻土的蠕变过程至少是安全的。

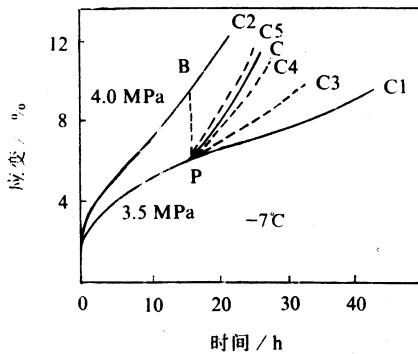


图5 蠕变理论对冻土非衰减蠕变过程的几何分析  
Fig.5 Geometric analysis of creep theories on non-attenuation creep of frozen soil

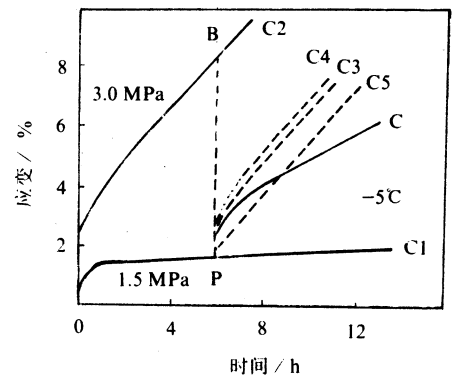


图6 蠕变理论对冻土从衰减蠕变到非衰减蠕变过程的几何分析  
Fig.6 Geometric analysis of creep theories on the creep of frozen soil from attenuation to non-attenuation process

### 4 结论

通过以上对冻土在不同增应力条件下的蠕变过程的几何分析，可得到如下结论：

- (1) 在衰减蠕变类型的增应力过程中，冻土表现出老化材料的性质，其流动性对蠕变不起作用，老化理论、遗传蠕变理论和硬化理论均可用来描述冻土的蠕变规律。
- (2) 在非衰减类型的增应力过程中，流动机质决定着冻土的蠕变性质，老化理论不再适于冻土的蠕变迭加，Boltsmann 迭加原理也不再成立；硬化理论和流动理论较好地反映了冻土的蠕变规律。
- (3) 在冻土从衰减蠕变向非衰减蠕变过渡的增应力过程中，冻土被衰减蠕变强化，且强化主要表现于使冻土进入稳定蠕变阶段后蠕变速率降低。因此，四种蠕变理论都不能准确地描述冻土的蠕变规律，从蠕变形态上看，遗传蠕变理论和硬化理论可近似偏差

全地预测冻土的各个蠕变过程。

### 参 考 文 献

- 盛煜, 吴紫汪, 苗丽娜, 马巍. 1994. 前期荷载对冻土蠕变强度的影响. 见: 第一届全国寒区环境与工程青年学术会议论文集. 兰州大学出版社, 49~52.
- Ladanyi B. 1972. An engineering theory of creep of frozen soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 9(1): 63~88.
- Ting J M. 1983. Tertiary creep model for frozen sands. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 109(7): 932~945.
- Vyalov S S, Gmshinskii V G *et al.* 1963. The strength and creep of frozen soils and calculation for ice-soil retaining structure. US CRREL Translation, 76.

## Geometric Analysis on the Creep of Frozen Soil under Increasing Stress Using Creep Theories

Sheng Yu, Wu Ziwang, Zhu Yuanlin and Ma Wei  
(State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, LIGG, CAS, 730000)

### Abstract

Using ageing theory, hereditary creep theory, hardening theory and flowing theory, the creep of frozen soil under increasing stress was analyzed in processes of attenuation creep, non-attenuation creep and from attenuation to non-attenuation creep. Combining with uniaxial compressive creep tests, the suitabilities of creep theories to the creep of frozen soil for different increasing stress processes were discussed.

**Key words:** frozen soil, creep theory, increasing stress, geometric analysis