

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2012.01.013

有限差分格式的群分类

潘书勤, 冉政

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 使用现代李群的分析方法, 讨论传统计算流体力学中的有限差分格式高阶项效应所对应的群结构、群分类, 以及对应的群不变解问题. 有助于从对称性角度理解传统计算流体力学中有限差分格式的离散差分效应.

关键词: 李群; 有限差分格式; 色散性; 耗散性

中图分类号: O 35

文献标志码: A

文章编号: 1007-2861(2012)01-0064-04

Group Classification of Finite Difference Scheme

PAN Shu-qin, RAN Zheng

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: This paper presents an analysis on the group structure of finite difference scheme in computational fluid dynamics using the Lie group analysis method, together with the invariant solutions of the traditional schemes. The study will help understand the differential effects of discreteness on numerical dissipation and dispersion.

Key words: Lie group; finite difference scheme; dissipation; dispersion

传统计算差分格式的稳定性分析的本质困难在于方程的非线性, 并且解具有间断特征. 传统分析方法一般采用局部冻结系数的线性化方法, 该方法得到的稳定性和耗散性条件是必要的, 但不充分. 大量数值试验和理论分析结果表明, 采用该方法得到的格式在用于守恒型问题计算时, 仍可能会发生如下异常现象: 激波振荡、非线性不稳定、非物理解. 这些异常现象是目前激波捕捉法计算中存在的 3 个主要问题. 因此, 有必要从理论上找出这些异常现象产生的原因和条件, 找到更为精确的分析方法, 才可能构造出更具有普遍意义的格式.

在非线性分析方法中, 李群的研究方法具有独特意义. 受群论在代数和几何学中所取得的巨大突

破的启发, 挪威数学家 Lie 首先把群论的方法引入到微分方程的研究中, 从此人们开始把群论的观点和方法广泛地应用到自然科学的各个领域. 在群论的发展过程中, Yanenko 等^[1]首先提出了差分算子的群分类问题. 按照差分算子是否满足微分算子的对称条件, 可以将差分算子分为 2 类: 一种是满足对称性的格式; 另一种是不满足对称性的格式. 群分类的主要思想是要求差分格式更多地反映原微分方程的内性质^[2-9]. 在计算空气动力学研究领域, 冉政^[10]首先利用 Lie 变换群理论, 对有关的 Lax-Wendroff 格式进行了非线性行为分析, 发现了 Lax-Wendroff 格式所得到的波后振荡与对称性的联系. 这种分析方法的最主要优点在于能直接对完全的非

线性、非定常问题进行分析. 文献[11]进一步利用该方法对有关差分解的激波波动问题进行了讨论,并对已有的线性化分析结果进行评估和拓展,初步显示了该方法的合理性;另外,首次用该方法对 TVD (total variation diminishing) 格式的有关熵条件进行阐述,得到了新的理论. 目前,该方法已经推广到更一般的守恒型差分格式的对称性问题^[12]、孤立波计算^[13]等领域. 已有研究表明^[10-16],现有的计算空气动力学研究领域中,计算激波的有关方法在一定程度上都与一定的对称性问题有比较微妙的关联. 特别地是,有证据表明,差分计算的非物理波动机制与对称性的保持与否有关,这些新的研究进展使得从对称性角度实现有关算法的非线性性质刻画成为可能. 而进一步设计出能保持对称性质的新算法将是计算空气动力学中的一个重要的新的研究课题.

微分方程的对称性质是一个非常重要的问题,因为物理问题的守恒性质必与一定的对称性质相关联. 很自然地,差分格式也需要满足这种对称性质. 然而,并非所有的差分格式都具有这种特性. 对于传统的差分方法,一般以修正方程加以讨论,在线性范围内,可以得到差分格式的耗散性、色散性等. 但是,这些性质仅适用于线性问题. 而一个需要研究的问题是差分方程的群性质. 本工作的研究成果将对于从物理角度理解离散效应的群结构变化有所贡献.

1 模型方程

本工作讨论的模型方程为如下线性波动方程:

$$u_t + au_x = 0, \tag{1}$$

式中, $a > 0$, 且 a 为常数,其中一阶精度的差分方程修正方程为

$$u_\tau + au_x = v_2 u_{xx}, \tag{2}$$

二阶精度的差分方程修正方程为

$$u_\tau + au_x + vu_{xxx} = 0. \tag{3}$$

2 一阶精度的差分方程的群分类

对于方程(1),已知的无穷小生成元分别为

$$\begin{aligned} U_1 &= \partial_t, U_2 = \partial_x, U_3 = x\partial_x + t\partial_t, \\ U_4 &= t\partial_x + x\partial_t. \end{aligned} \tag{4}$$

对于一阶差分格式(2),按照标准的计算方法可以得到 6 个无穷小生成元,分别为

$$V_1 = \partial_t, \tag{5}$$

$$V_2 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{1}{4k}(x-t)u\partial_u, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2}t^2\partial_t + \frac{1}{2}xt\partial_x + \\ &\left(-\frac{1}{8k}x^2 + \frac{1}{4k}xt - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8k}t^2\right)u\partial_u, \end{aligned} \tag{7}$$

$$V_4 = \sqrt{k}\partial_x + \frac{1}{2\sqrt{k}}u\partial_u, \tag{8}$$

$$V_5 = \sqrt{kt}\partial_x + \frac{1}{2\sqrt{k}}(t-x)u\partial_u, \tag{9}$$

$$V_6 = u\partial_u, \tag{10}$$

式中, $k = \frac{v_2}{a}$. 李代数结构如表 1 所示.

表 1 一阶差分格式的李代数结构表

Table 1 Lie algebra of the first order scheme

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	$V_1 - \frac{1}{4k}V_6$	$V_2 - \frac{1}{4}V_6$	0	V_4	0
V_2	$V_1 - \frac{1}{4k}V_6$	0	V_3	$-\frac{1}{2}V_4$	$\frac{1}{2}V_5$	0
V_3	$V_2 - \frac{1}{4}V_6$	V_3	0	$-\frac{1}{2}V_5$	0	0
V_4	0	$-\frac{1}{2}V_4$	$-\frac{1}{2}V_5$	0	$-\frac{1}{2}V_6$	0
V_5	V_4	$\frac{1}{2}V_5$	0	$-\frac{1}{2}V_6$	0	0
V_6	0	0	0	0	0	0

对于对称算子 V_2 ,相似变量 $\zeta = \frac{x^2}{t}$,相似解的形式为

$$u_1 = f(\zeta) \exp\left\{\frac{1}{2k}\left(x - \frac{t}{2}\right)\right\}, \tag{11}$$

式中, $f(\zeta) = c_2 + 2\sqrt{k}\sqrt{\pi}c_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\zeta}}{2\sqrt{k}}\right)$, c_1, c_2 为积分常数.

行波解及相似变量分别为

$$y = x - ct, u_2 = c_3 + \frac{c_4 k}{1-c} \exp\left\{\frac{1-c}{k}y\right\}, \tag{12}$$

式中, c_3, c_4 为积分常数, $c > 0$. 图 1 是 2 种不同解在 $t=1$ 时刻数值计算结果的比较.

3 二阶精度的差分方程的群分类

对于二阶精度差分格式,其修正方程为式(3). 为了研究方便,引入如下变换方程:

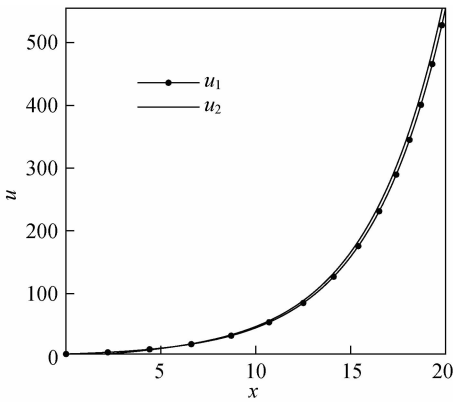


图1 2种不同解在 $t=1$ 时刻的比较, $c=0.5$

Fig.1 Comparison of two different solutions at $t=1, c=0.5$

$$\begin{aligned} u_\tau + au_x + vu_{xxx} &= 0, \\ \frac{1}{a}u_\tau + u_x + \frac{v}{a}u_{xxx} &= 0, \\ u_t + u_x + \mu u_{xxx} &= 0, \\ \mu &= v/a, t = a\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

对方程(13)作无穷小变换,即

$$\begin{cases} x^* = x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ t^* = x + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* = x + \varepsilon\eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (14)$$

若成立强对称条件 $\tau_x = 0$,则可以简化如下具有二阶格式的对称算子:

$$\begin{cases} V_1 = U_1, \\ V_2 = U_2, \\ V_3 = U_3 + 2t(U_1 - U_2), \end{cases} \quad (15)$$

其中 U_4 没有对应结果. Dilatation 对称得到部分满足.

对应的 Lie 代数计算如下:

$$[V_1, V_2] = \partial_t \partial_x - \partial_x \partial_t = 0, \quad (16)$$

$$[V_1, V_3] = 3V_1 + 2V_2, \quad (17)$$

$$[V_2, V_3] = V_2, \quad (18)$$

最终可以得到如表2所示的乘法表.

表2 二阶差分格式的群分类(强对称)

Table 2 Group classification of the second order scheme (strong symmetries)

	V_1	V_2	V_3
V_1	0	0	$3V_1 + 2V_2$
V_2	0	0	V_2
V_3	$3V_1 + 2V_2$	V_2	0

对于对称算子 V_3 , 相似变量 $\zeta = t^{-1/3}(x - t)$, 相似解的形式为

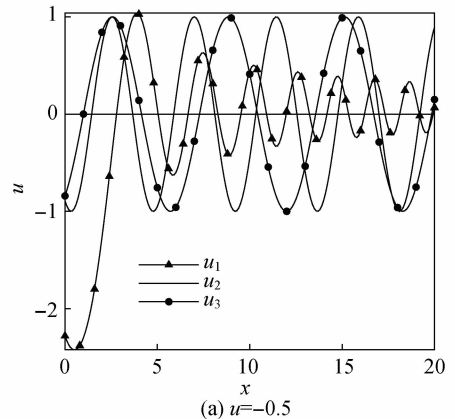
$$\begin{aligned} u_1 &= c_3 + \left[\zeta(4\pi(c_1 + \sqrt{3}c_2)) {}_1F_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{\zeta^3}{27\mu}\right) + \right. \\ &\quad \left. \mu^{-\frac{1}{3}}\zeta(-\sqrt{3}c_1 + 3c_2) \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) {}_1F_2\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{\zeta^3}{27\mu}\right) \right] / 6\sqrt[3]{9\pi}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

行波解为 $y = x - ct$, 相似解为

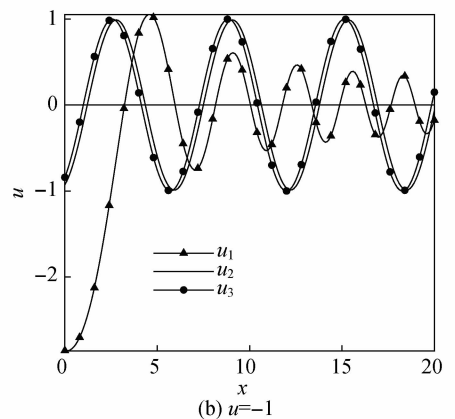
$$\begin{aligned} u_2 &= c_4 + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{1-c}} \left(c_5 \sin\left(\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{\mu}}y\right) - \right. \\ &\quad \left. c_6 \cos\left(\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{\mu}}y\right) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$u_3 = \sin(x - t), \quad (21)$$

式中, $c_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为积分常数, $c > 0$. 图2是3种不同解在 $c=2$ 时的周期和振幅.



(a) $u=-0.5$



(b) $u=-1$

图2 3种不同解在 $c=2$ 时的周期和振幅

Fig.2 Periods and amplitudes for three different solutions at $c=2$

为研究 μ 因子的作用, 放宽对称性条件, 对 u_{xxxx} 项作近似处理, 令其满足 $\tau_x \neq 0$, 但 $\tau_{xx} = 0$. 下面讨论

这一条件引入的变化.

在此对称条件下,二阶格式的对称算子为

$$\begin{cases} V_1 = U_1, \\ V_2 = U_2, \\ V_3 = U_3 + 2t(U_1 - U_2), \\ V_4 = U_4 - 4t(U_1 + U_2). \end{cases} \quad (22)$$

其对应的 Lie 代数计算如下:

$$[V_1, V_2] = \partial_t \partial_x - \partial_x \partial_t = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [V_1, V_3] &= \partial_t [3t\partial_t + (x + 2t)\partial_x] - \\ & [3t\partial_t + (x + 2t)\partial_x] \partial_t = 3\partial_t + 3t\partial_{tt} + \\ & 2\partial_x + (x + 2t)\partial_{xt} - 3t\partial_{tt} + (x + 2t)\partial_{xt} = \\ & 3\partial_t + 2\partial_x = 3V_1 + 2V_2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} [V_1, V_4] &= \partial_t [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] - \\ & [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] \partial_t = -4\partial_t + (-4t + x)\partial_{tt} - \\ & 3\partial_x - 3t\partial_{xt} - (-4t + x)\partial_{tt} + 3t\partial_{xt} = \\ & -4\partial_t - 3\partial_x = -4V_1 - 3V_2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} [V_2, V_3] &= \partial_x [3t\partial_t + (x + 2t)\partial_x] - \\ & [3t\partial_t + (x + 2t)\partial_x] \partial_x = 3t\partial_{xt} + \partial_x + (x + 2t)\partial_{xx} - \\ & 3t\partial_{tx} + (x + 2t)\partial_{xx} = \partial_x = V_2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [V_2, V_4] &= \partial_x [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] - \\ & [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] \partial_x = (-4t + x)\partial_{xt} + \partial_t - \\ & 3t\partial_{xx} - (-4t + x)\partial_{tx} + 3t\partial_{xx} = \partial_t = V_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [V_3, V_4] &= [3t\partial_t + (2t + x)\partial_x] [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] - \\ & [(-4t + x)\partial_t - 3t\partial_x] [3t\partial_t + (2t + x)\partial_x] = \\ & 3t [(-4t + x)\partial_{tt} - 4\partial_t - 3t\partial_{xt} - 3\partial_x] + \\ & (2t + x) [(-4t + x)\partial_{tx} + \partial_t - 3t\partial_{xx}] - \\ & (-4t + x) [3\partial_t + 3t\partial_{tt} + (2t + x)\partial_{xt} + 2\partial_x] + \\ & 3t [3t\partial_{tx} + (2t + x)\partial_{xx} + \partial_x] = \\ & 2(t - x)\partial_t + 2(t - x)\partial_x = -2(V_3 + V_4). \end{aligned} \quad (28)$$

得到的乘法表如表 3 所示.

表 3 二阶差分格式的群分类(弱对称)

Table 3 Group classification of the second order scheme (weak symmetries)

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	$3V_1 + 2V_2$	$-4V_1 - 3V_2$
V_2	0	0	V_2	V_1
V_3	$3V_1 + 2V_2$	V_2	0	$-2(V_3 + V_4)$
V_4	$-4V_1 - 3V_2$	V_1	$-2(V_3 + V_4)$	0

4 结束语

传统的计算流体力学理论即使在求解的方程是线性方程的情况下,大多关注的只是差分格式的耗散性以及色散性问题,而目前有关差分格式的非线性稳定性理论仍然有待发展. 本工作以通常情况下计算流体力学理论所研究的方程为背景,详细地给出了有关的群分类计算,对比模型方程不难看出离散条件下的群的演变. 另外,群分析的优势在于非线性问题的处理,有关这方面的工作还在进行当中.

参考文献:

- [1] YANENKO N N, SHOKIN Y I. On the group classification of difference schemes for systems of equations in gas dynamics [C] // Proceedings of the 2nd International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. New York: Springer, 1971:2-17.
- [2] OLVER P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. New York: Springer, 2000.
- [3] DORODNITSYN V A. The group properties of difference equations [M]. Moscow: Fizmatlit, 2001.
- [4] LEVI D, WINTEMITZ P. Continuous symmetries of difference equations [J]. J Phys A: Math Gen, 2006, 39:R1-R63.
- [5] RODRIGUEZ M A, WINTEMITZ P. Lie symmetries and exact solutions of first order difference schemes [J]. J Phys A: Math Gen, 2004, 37:6129-6142.
- [6] DORODNITSYN V A, KOZLOV R, WINTEMITZ P. Lie group classification of second-order ordinary difference schemes [J]. J Math Phys, 2000, 41:480-504.
- [7] DORODNITSYN V A, KOZLOV R, WINTEMITZ P. Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations [J]. J Math Phys, 2004, 45:336-359.
- [8] BOURLIOUX A, CYR-GAGNON C, WINTEMITZ P. Difference schemes with point symmetries and their numerical tests [J]. J Phys A: Math Gen, 2006, 39: 6877-6896.
- [9] BOURLIOUX A, REBELO R, WINTEMITZ P. Symmetry preserving discretization of $SL(2, R)$ invariant equations [J]. J of Nonlin Math Phys, 2008, 15:362-372.