doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2012.01.012

基于一种新的 γ-扩张凹极小化问题的割平面算法

刘林娜， 杨永建， 余 峰

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 首先,介绍凹极小化问题的有关内容及割平面算法的思想. 然后,给出一种变上限函数积分法,并利用该积分法来求解凹极小化过程中 γ-扩张的 γ 数. 新算法在有限步内得到原问题的一个近似最优解,且算法的近似最优解为全局最优解. 最后,通过数值试验证明了新算法是可行有效的.

关键词: 凹极小化;变上限积分函数法;γ-扩张;割平面算法

中图分类号: O 221.2　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2012)01-0059-05

Cutting Plane Method for Solving Concave Minimization Programming Based on a New γ-Extension

LIU Lin-na, YANG Yong-jian, YU Feng

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: We first briefly give the concept of concave minimization programming and the cutting plane method, and then propose the uncertain upper limited integral function method which will be used to solve γ constant in the γ-extension. We show that the proposed method only requires a finite number of iterations to reach a near-optimal solution that is just the global optimization. Implementation of the method is reported with satisfactory numerical results.

Key words: concave minimization; uncertain upper limited integral function method; γ-extension; cutting plane method

近年来,人们已经较为深入地研究了凸规划问题,并且给出的方法大多非常有效[1]. 但是,对于在生活中有着很强实际应用背景的一些问题,如金融经济[2-3]、工程设计和非线性系统的鲁棒稳定性分析[4]等却只能表示为非凸规划问题. 虽然非凸二次规划问题是困难的多极值全局优化问题,但仍有不少学者在这方面取得了一定的进展[5-8]. 本工作主要研究一类特殊的非凸二次规划问题——凹极小化问题. 凹极小化问题是一种比较常见的多极值优化问题,在全局优化领域有着重要的应用. 许多类型的优化问题,如 0-1 整数规划问题、双线性规划问题、互补问题和某些乘积问题等都可以转化为等价的凹极小化问题. 如

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}) \quad \min \quad f(x), \\ &\qquad \mathrm{s.t.} \quad x \in D \subseteq \mathbf{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

式中,$f(x)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 在非空集合 D 上是凹的,D 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空凸集(假设 D 为多面体). 事实上,如果问题(P)的最优值不是 $\propto$,则一定可以在 D 的顶点处找

收稿日期:2010-09-10

通信作者:杨永建(1966 ~),男,副教授,研究方向为运筹学和控制论. E-mail:yjyang@mail.shu.edu.cn

到一点,使$f(x)$在该点取到最优值,即凹函数在多胞形上的全局极小值一定是在多胞形的某个顶点取到,并称该性质为极点最优性.进一步来说,当可行域为紧凸集时,凹函数的极点最优性仍然成立.本工作先作以下2个假设.

假设1 凹函数$f(x):D\to\mathbf{R}$可延拓到$F(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,且$F(x)$为可微函数.

假设2 凸集D为多胞形,且有非退化的顶点,即$\operatorname{int} D\neq\varnothing$.

下面对以上假设作进一步说明.

命题1 令$D\subseteq\mathbf{R}^n$是凸的,$\operatorname{int} D\neq\varnothing$,$f:D\to\mathbf{R}$在$D$上是凹函数,并且是连续的.假设$\|\nabla f(x)\|$在集合$D_\nabla=\{x\in D:f(x)$在$x$点是可微的$\}$上是有界的,其中$\nabla f$表示$f$的梯度,$\|\cdot\|$为欧几里得范数,则

$$F(x)=\inf\{f(y)+(\nabla f(y))^t(x-y):y\in D_\nabla\}\quad(2)$$

在$\mathbf{R}^n$上是凹的,且在D上,有$F(x)=f(x)$.

证明 对任意的$y\in D_\nabla$,令

$$h_y(x)=f(y)+(\nabla f(y))^t(x-y).\quad(3)$$

对于每个y,h_y是仿射的,$F(x)$是仿射函数的下确界,所以$F(x)$在$\mathbf{R}^n$上是凹的.对于所有的$x,y\in D_\nabla$,$h_y(x)\geqslant f(x)$.在D_∇上,有$h_x(x)=f(x)$,因此,$F(x)=f(x)$.由于D_∇在$\operatorname{int} D$内是稠密的,根据f在D上的连续性可知,在D上有$F(x)=f(x)$.

假设D是多胞形,且$\operatorname{int} D\neq\varnothing$,显然等价于$\dim D=n$.若$\dim D=d<n$,则可以在一个包含$D$的$d$维空间内进行讨论.

割平面的概念是由Gomory在1958年首先提出用来构造整数规划的算法.Gomory割平面是通过不断求解其线性规划松弛形式,构造合适的割平面,从而去掉松弛形式的非整数解,最终找到一个整数向量的最优解.该算法能够保证整数规划在有限步内求得最优解.后来,Tuy[8]又提出了一种求解凹极小化问题的割平面,其中心思想是:基于以上2条假设,易求得可行域D的一些可行点,通过传统的线性规划算法(如单纯形方法)可以找到D的一个顶点v_1.由$f(x)$的可微性可知,D的发自v_1的边方向d,由此可找到满足$d^t\nabla f(v_1)<0$的方向d.对于v_1的邻点$v_2=v_1+\lambda d$,可根据$f(x)$的凹性,即$f(v_2)\leqslant f(v_1)+(v_2-v_1)^t\cdot\nabla f(v_1)$(由于$(v_2-v_1)^t\nabla f(v_1)<0$,且$f(v_2)<f(v_1)$),通过转轴方法或者标准的非线性规划的局部算法,总可以找到$f(x)$在D上的一个局部极小点x_0.令$\gamma=f(x_0)\geqslant\min\{f(x):x\in D\}$,由此构造超平面$H$,一般称之为割或者割平面,使得对于所有的$x\in D\cap H^-$,有$f(x)\geqslant\gamma$,即试图通过割掉一部分可行域,来保证该部分上的目标函数值不小于$f(x_0)$.若可行域剩下的部分不为空集,则可用同样的方法应用到剩余部分.

1 变上限积分函数方法

考虑变上限积分函数[9]

$$F(x^*,t)=\int_0^t(f(x^*+sd)-r)\,\mathrm{d}s,\quad(4)$$

式中,x^*为$f(x)$在可行域D上的局部极小点,d是一个已知方向,$r=f(x^*)$是局部极小值.若$f(x)$为强制函数,则$F(x^*,t)$也为强制函数.下面给出$F(x^*,t)$的一些性质.

定理1 设x^*是$f(x)$的一个局部极小点,若$f(x)$在以x^*为起点,以d为方向的射线上恒有$f(x)\geqslant r$,即对于任意的$s\geqslant0$,有$f(x^*+sd)\geqslant r$,那么函数$F(x^*,t)$是一个关于t的增函数.

证明 对函数$F(x^*,t)$求导,可得

$$F'(x^*,t)=f(x^*+td)-r.\quad(5)$$

由条件$f(x)\geqslant r$可知,$F'(x^*,t)\geqslant0$,故$F(x^*,t)$是关于t的增函数.

定理2 设x^*是$f(x)$的一个局部极小点,若$f(x)$在以x^*为起点,以d为方向的射线上存在函数值小于r的点x,那么在该射线上一定存在一点x^0,使得$f(x^0)=r$,并使得对应的t_0是函数$F(x^*,t)$的局部极大点,其中$x^0=x^*+t_0d$.

证明 假设在射线上存在一点x',使得$f(x')<r$.因为$f(x)$连续,由介值性定理可知,在该射线上一定存在一点x^0,使得

$$f(x^0)=r,\ x^0=x^*+t_0d,\quad(6)$$

并且存在t_0的一个邻域$(t_0-\delta,t_0+\delta)$ $(\delta>0)$,使得当$t\in(t_0-\delta,t_0]$时,$f(x^*+td)\geqslant r$;当$t\in(t_0,t_0+\delta)$时,$f(x^*+td)\leqslant r$.

任取$t\in(t_0-\delta,t_0]$,有

$$F(x^*,t_0)-F(x^*,t)=\int_t^{t_0}(f(x^*+sd)-r)\,\mathrm{d}s\geqslant0;\quad(7)$$

任取$t\in(t_0,t_0+\delta)$,有

$$F(x^*,t_0)-F(x^*,t)=\int_{t_0}^{t}(f(x^*+sd)-r)\,\mathrm{d}s\geqslant0.\quad(8)$$

故 t_0 为函数 $F(x^*,t)$ 的局部极大点.

定理 3　设 x^* 是 $f(x)$ 的一个局部极小点,对于某个方向 d,若 t^* 是函数 $F(x^*,t)$ 的一个平稳点,则有 $f(x^*+t^*d)=r$.

证明　对函数 $F(x^*,t)$ 求导,得到

$$F'(x^*,t) = f(x^*+td) - r. \tag{9}$$

由于 t^* 是 $F(x^*,t)$ 的稳定点,则有

$$F'(x^*,t^*) = f(x^*+t^*d) - r = 0, \tag{10}$$

即有 $f(x^*+t^*d)=r$.

下面,考虑问题

$$(\mathrm{P}_1)\quad \max\quad F(x^*,t) = \int_0^t (f(x^*+sd)-r)\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{s.t.}\quad t\in\mathbf{R}^n. \tag{11}$$

可以利用局部算法来求解问题(P_1),这里采用 Newton 算法,算法步骤如下.

步骤 1　初始化. 给定初始点 t_k,误差控制 $\epsilon>0$,记 $k=0$.

步骤 2　收敛性验证. 计算梯度 $\nabla F(x_k^*,t_k)$,若 $\|\nabla F(x_k^*,t_k)\|\leqslant\epsilon$,则停止,输出 t_k.

步骤 3　计算 Newton 方向. 计算 Hessen 矩阵 $\boldsymbol{B}_k=F''(x_k^*,t_k)$,牛顿方向 $e_k=\dfrac{F'(x_k^*,t_k)}{\boldsymbol{B}_k}=\dfrac{f(x_k^*+t_kd_k)-r}{(\nabla f(x_k^*+t_kd_k))^{\mathrm{t}}d_k}$.

步骤 4　迭代改进. 通过线搜索确定步长参数 α_k,令 $t_{k+1}=t_k+\alpha_ke_k$,置 $k+1\to k$,转步骤 2. 算法终止.

Newton 算法比最速下降法的收敛速度要快,固定步长 $\alpha_k=1$,则迭代产生的序列 $\{t_k\}$ 是收敛于点 t^* 的,且为二阶收敛. 通过 Newton 算法可以找到问题(P_1)的极大点 t^*.

2　割平面算法

首先,假设凹极小化问题(P)的可行域

$$D = \{x\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{A}x\leqslant\boldsymbol{b}\} \tag{12}$$

是非空闭凸集,式中,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{b}$ 为欧式空间的 n 维向量. 通过传统的线性规划(如单纯形法)可求出 f 在 D 上的一个局部极小点 x^0. 显然有 $f(x^0)\geqslant\min\{f(x):x\in D\}$,令 $\gamma=f(x^0)$,我们感兴趣的区域为 $D(\gamma)=D\cap\{x\in\mathbf{R}^n \mid f(x)<\gamma\}$. 在求解凹极小化问题的算法中,首要任务是在以 x 为起点,d 为方向的射线 $\rho(x,d)=\{y:y=x+td,t\geqslant0\}$ 上找到最长的线段 $[x,x+t^*d]$,使得对所有的 $y\in[x,x+t^*d]$,有 $f(x)\geqslant\gamma$. 特别地,γ 是在极小化过程中的某一阶段得到的最佳目标函数值. 在区间 $[x,x+t^*d]$ 中,不会有比当前局部最优值更佳的最优值. 若 $f(x)$ 为严格凹的,且上水平集 $L(f(x);\gamma)=\{x:f(x)\geqslant\gamma\}$ 有界,则 $y=x+t^*d$ 是射线 $\rho(x,d)$ 与 $L(f(x);\gamma)$ 的边界的交. 若 $L(f(x);\gamma)$ 沿 d 无界,则 $t^*=+\infty$,即在整个射线 $\rho(x,d)$ 上有 $f(y)\geqslant\gamma$,这时一般取 $t^*=t_1$,其中 t_1 为充分大的正数.

下面给出 γ-扩张的定义.

定义 1　令 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是凹函数,$x\in\mathbf{R}^n$,γ 是满足 $\gamma\leqslant f(x)$ 的实数,并且 $t_1>0$ 充分大. 称点 $y\in\mathbf{R}^n$ 为 x 沿方向 $d\in\mathbf{R}^n\backslash 0$(相对于 f)的 γ-扩张,即 $y=x+t^*d$,其中 $t^*=\min\{t_1;\sup\{t:f(x+td)\geqslant\gamma\}\}$.

由于 f 的凹性,其上方水平集 $L(f(x);\gamma)$ 为凸集,所以可采用线搜索、托架-二分技术等来确定 x 沿方向 d 的 γ-扩张. 但是,在求解过程中,线搜索的收敛速度比较慢,且收敛效果不好;托架-二分技术实质上也是线搜索中对分法的扩展,具有线搜索的缺点. 关于 γ-扩张可以通过求解变上限积分函数的极大值来确定.

2.1　有效割

定义 2　若 $D(\gamma)\subseteq\{x\in D \mid p(x)\geqslant0\}$ 成立,则称 $p(x)$ 为 (f,D) 的一个 γ-有效割.

可以看出,γ-有效割没有割去任何一个满足 $f(x)<\gamma$ 的可行点. 若对于 $f(z)>\gamma$ 的可行点 $z\in D$,希望找到一个有效割,使得它能将点 z 与 $D(\gamma)$ 分离,即 $p(z)<0$,对任意的 $x\in D(\gamma)$,$p(x)\geqslant0$. 显然,D 的有效割并不是唯一的,甚至有无穷多个.

定义 3　若 (f,D) 的一个 γ-有效割 $p_1(x)\geqslant0$ 去掉的 $D\cap L(f(x);\gamma)$ 的部分比另一个 γ-有效割 $p_2(x)\geqslant0$ 多,则称 $p_1(x)\geqslant0$ 强于 $p_2(x)\geqslant0$.

显然,我们希望得到一个最强的有效割,即为凹性割. 由问题(P)的可行域 D 出发,可以找到 D 的一个顶点 v. 以 v 为顶点,以线性无关的向量组 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_n$ 为边方向,可得到一个凸的多面锥 $K=K(v;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_n)$,此时,令 $\gamma=f(v)$.

令 $\rho(v,\boldsymbol{d}_i)=\{v+t\boldsymbol{d}_i \mid t\geqslant0\}$ 与 $L(f(x);\gamma)$ 边界的交点为

$$y_i = v + t_i^*\boldsymbol{d}_i, \tag{13}$$

式中,t_i^* 是利用第 1 节求得的 γ 数. 若 $L(f(x);\gamma)$ 有

界,则区间$[v,y_i]$是射线$\rho(v,\boldsymbol{d}_i)$在$L(f(x);\gamma)$中最长的线段. 由于$y_1-v,y_2-v,\cdots,y_n-v$是线性无关的,所以存在包含$y_1,y_2,\cdots,y_n$的唯一的超平面$H=H(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,即

$$H=\{x\mid x=\boldsymbol{Y\lambda}+v,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=1\},\tag{14}$$

等价表示为

$$H=\{x\mid \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}x=1+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}v\},\tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Y}=(y_1-v,y_2-v,\cdots,y_n-v)$是$n$阶矩阵,顶点$v\in H^-$,$H^-=\{x\mid \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}x\leqslant 1+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}v\}$.

定义4 称线性割$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}(x-v)\geqslant 1$为$(f,D)$的一个凹性-有效割,简称凹性割.

定理4 对于所有的$x\in D\cap H^-$,有$f(x)\geqslant\gamma$.

证明 由于$D\subseteq K$,故$D\cap H^-$包含在单纯形$S=[v,y_1,y_2,\cdots,y_n]$中. 凹函数f在S上的最小值可在S的一个顶点上取得,因此,有

$$\begin{aligned}&\min\{f(x):x\in D\cap H^-\}\geqslant\min\{f(x):x\in S\}=\\&\quad\min\{f(v);f(y_1),f(y_2),\cdots,f(y_n)\}\geqslant\gamma.\end{aligned}\tag{16}$$

上面的定理说明,通过割平面式(16),从D中割去$D\cap H^-$,并不会损失任何目标函数值比γ更佳的可行点,当$D\subseteq H^-$时,则有$\gamma=\min\{f(x):x\in D\}$.

2.2 凹极小化问题的割平面算法

求解凹极小化问题的割平面算法步骤如下.

步骤1 置$S\leftarrow D$.

步骤2 求解问题(P)的可行域的一个非退化顶点v,即$v\in V(S)$,$V(S)$是多胞形S的顶点集. 找到n个线性无关的方向$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_n$,以$v$为顶点沿方向$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_n$,构造凸多面锥$K=K(v;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_n)$,令上界$\gamma=f(v)$.

步骤3 构造点v,相对于f沿方向d的γ-扩张,通过前述Newton算法求解变上限积分函数

$$\begin{aligned}\max\quad &F(x^*,t)=\int_0^t(f(x^*+sd)-r)\mathrm{d}s,\\ \text{s.t.}\quad &t\in\mathbf{R}^n,\end{aligned}\tag{17}$$

得到最大解t_i^*,$i=1,2,\cdots,n$. 若对于所有的$t_i^*=+\infty$,算法终止,v就是所求的全局极小点.

步骤4 若存在$i=1,2,\cdots,n$,有$t_i^*=+\infty$. 令$t_i^*=M$,其中M是充分大的正数. 求$y_i=v+t_i^*\boldsymbol{d}_i$,得到超平面$H=\{x\mid \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}x=1+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}v\}$即为所求的凹性割$H$.

步骤5 若$S\subset H^-$,算法终止,v就是所求的全局极小点. 否则,转步骤6.

步骤6 置$S\leftarrow S\cap H^+$,转步骤2.

下面对以上算法作几点说明:步骤2可以用线性规划的单纯形方法来求解,当v是非退化顶点时,可以找到相邻的n个邻点v_i,$i=1,2,\cdots,n$,故可取$\boldsymbol{d}_i=v_i-v$,$i=1,2,\cdots,n$,从而构造一个凸多面锥;步骤3可以用变上限积分函数法来求解;步骤4中的正数M在不同问题中的取值有差别,主要取决于所求问题的数据.

2.3 割平面算法的收敛性

凹性割算法的基本原理是先选择D的一个子集作为目标集合S,比如$S=D(\gamma)$. 然后,确定一个凹性有效割$H_1^+\supseteq S$. 若对于$k=1,2,\cdots$,可找到点$x^k\in D\cap H_k^+$,且$x^k\in S$,则搜索终止;否则,对于D的某个覆盖$\{D_{k,j}:j=1,2,\cdots,N_k\}$,构造$N_k$个凹性割,使得对应的集合$H_{k,j}^+(j=1,2,\cdots,N_k)$满足

$$H_k^+=\bigcap_{j=1}^{N_k}H_{k,j}^+\supseteq S,\tag{18}$$

$$D\bigcap H_k^+\subseteq D\bigcap H_{k-1}^+,x^k\in(D\bigcap H_{k-1}^+)\backslash H_k^+.\tag{19}$$

最后,确定新的点$x^{k+1}\in D\cap H_k^+$,继续搜索.

凹性割算法的搜索过程有2种结果:一是存在某个k,有$x^k\in S$;二是得到一个无穷序列$\{x^k\}$. 称前者为凹性割算法的有限收敛,后者为凹性割算法的无限收敛.

定理5 任意给定一个集合序列$H_k^+\subseteq\mathbf{R}^n$,$k=1,2,\cdots$,若有界点列$\{x^k\}$满足

$$x^k\in\bigcap_{h<k}H_h^+,\tag{20}$$

则点x^k与集合H_k^+的距离

$$d(x^k,H_k^+)\rightarrow 0(k\rightarrow\infty).\tag{21}$$

证明 反证法.

假设结论不成立,则存在$\epsilon>0$和点列$\{k_q\}$,对于任意的$q=1,2,\cdots$,使得$d(x^{k_q},H_{k_q}^+)\geqslant\epsilon$. 由于$\{x^k\}$是有界的,不妨设$\{x^{k_q}\}$是收敛的,对于充分大的$u,v$,$\|x^{k_u}-x^{k_v}\|\leqslant\epsilon$成立. 由式(21)可知,对于所有的$u>v$,有$x^{k_u}\in H_{k_v}^+$. 故有

$$\epsilon>\|x^{k_u}-x^{k_v}\|\geqslant d(x^{k_v},H_{k_v}^+)\geqslant\epsilon.\tag{22}$$

显然这是矛盾的,所以假设不成立.

定理6 在凹性割算法中,假设集合

$$H_k^+=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \exists j\in\{1,2,\cdots,N_k\},p_{k,j}\geqslant 0\},\tag{23}$$

并且有界点列$\{x^k\}$满足

$$x^k \notin H_k^+,\ x^k \in H_h^+,\ h = 1,2,\cdots,k-1. \quad (24)$$

若存在 $\epsilon>0$,使得 $d(x^k,\partial H_k^+)\geqslant\epsilon$,其中 ∂H_k^+ 是 H_k^+ 的边界,则凹性割算法是有限收敛的.

证明　根据式(24)可知,式(21)成立. 由于 $d(x^k,H_k^+)=d(x^k,\partial H_k^+)$,所以对于任意的 k,$d(x^k,H_k^+)\geqslant\epsilon$. 由定理 5 可知,凹性割算法生成的序列 $\{x^k\}$ 是有限的,即凹性割算法是有限收敛的.

3　数值试验

下面利用凹规划问题来证明本工作提出的新算法是有效可行的.

例　$\min\{f(x)=x^t\boldsymbol{Q}x+2\boldsymbol{p}^t x:\boldsymbol{A}x\leqslant\boldsymbol{b},x\geqslant 0\}$,其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -4 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}. \quad (25)$$

迭代 1　容易找到初始多胞形的一个顶点 $v_1=(0,0)$,其邻接的 2 个顶点分别为 $u_{1,1}=(1.0,0)$,$u_{1,2}=(0,0.5)$;得到当前最佳可行点 $x_1=(0,0)$,以及当前最佳目标函数值 $\gamma_1=f(x_1)=0$,则 x_1 沿方向 $u_{1,1}-x_1,u_{1,2}-x_1$ 的 γ-扩张分别为 $y_{1,1}=(2.0,0)$,$y_{1,2}=(0,1.0)$,可得到凹性割 $0.5x_1+x_2\geqslant 1$.

迭代 2　通过迭代 1 割去 $0.5x_1+x_2\geqslant 1$ 这一部分后的新多胞形的一个顶点 $v_2=(0.2,0.9)$,其邻接的 2 个顶点分别为 $u_{2,1}=(1.67,0.17)$,$u_{2,2}=(0.75,2.0)$;当前的最佳可行点是 $x_2=(0.75,2.0)$,当前最佳目标函数值 $\gamma_2=f(x_2)=-1.06$,则 x_2 沿方向 $v_2-x_2,u_{2,1}-x_2$ 的 γ-扩张分别为 $y_{2,1}=(2.13,-0.06)$,$y_{2,2}=(0.75,2.0)$,可得到凹性割 $0.78x_1+0.52x_2\geqslant 1.62$.

经过 4 次迭代,算法终止,并且产生 $x^*=(0.75,2.0)$ 对应的最优解 $f(x^*)=-1.06$. 在求解 γ-扩张时,采用本工作介绍的 Newton 算法很容易实现. 数值试验结果表明,本工作所提出的算法可以加速收敛,是可行有效的,计算的结果与实际情况相符.

参考文献:

[1] 高岳林,叶留青,张连生. 带有二次约束二次规划问题的分枝定界方法[J]. 工程数学学报,2003,14(2):82-86.

[2] KONNO H, WIJAYANAYAKE A. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints [J]. Math Prog Ser B, 2001, 89(2):233-250.

[3] BAJIROV A M, RUBUNOV A M. Global optimization of marginal functions with applications to economic equilibrium [J]. Journal of Global Optimization, 2001, 20(3/4):215-317.

[4] 吴慧卓,段东东,张可村. 一种新的求解带有非凸二次约束的非凸二次规划问题的加速全局优化方法[J]. 工程数学学报,2009,26(1):75-84.

[5] FALK J E, CARDONA E L. The surgical separation of sets [J]. Journal of Global Optimization, 1997, 11(4):433-462.

[6] HORST R, THOAI N V. Utility function programs and optimization over the efficient set in mulitiple-objective decision making [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 117(2):605-631.

[7] MOHD I B, YOSZA D. Constraint exploration method for quadratic programming problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2000, 112(2/3):161-170.

[8] TUY H. Concave programming under linear constraints [J]. Journal Doklady Akademii Nauk SSSR, 1964, 159(1):32-35.

[9] YANG Y J, BAI F S. An integral function and vector sequence method for unconstrained global optimization [J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50(2):293-311.