

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2012.01.014

# 超临界平面耦合轴向运动梁的静平衡分岔

黄慧春<sup>1</sup>, 丁虎<sup>2</sup>, 陈立群<sup>2,3</sup>

(1. 上海第二工业大学 机电工程学院, 上海 201209; 2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
3. 上海大学 理学院, 上海 200444)

**摘要:** 运用数值方法研究固定边界条件下, 超临界速度范围内的轴向运动梁横向与径向耦合平面的静态平衡位形分岔行为, 其中轴向运动梁的静态平衡位形包括直线形状的0解, 以及随传输速度分岔得到的曲线形状的非平凡分岔解. 在梁的两端固定的边界条件下, 运用有限差分法对轴向运动梁平面耦合非线性方程以及对应于非线性平面耦合方程的静态平衡方程作数值解. 以铜材料的梁为例, 数值求解轴向运动梁耦合平面的静平衡非平凡解, 并仿真分析了系统参数对非平凡分岔解的影响.

**关键词:** 轴向运动梁; 非线性; 超临界; 分岔; 有限差分法

中图分类号: O 32

文献标志码: A

文章编号: 1007-2861(2012)01-0068-04

## Equilibria Bifurcation in Coupled Planar of High-Speed Axially Moving Beams

HUANG Hui-chun<sup>1</sup>, DING Hu<sup>2</sup>, CHEN Li-qun<sup>2,3</sup>

(1. Mechanical and Electrical Engineering Faculty, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China;  
2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China;  
3. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** Equilibria of axially moving beams transversely and longitudinally coupled with the fixed boundary conditions are numerically studied in the supercritical transport speed ranges. In the supercritical regime, the pattern of equilibria consists of the straight configuration and of non-trivial solutions that bifurcate with transport speed. The numerical schemes are presented for the governing equation of coupled planar and the corresponding static equilibrium equation for non-trivial equilibrium solutions via the finite difference method under the fixed boundary conditions. A copper beam is treated as example to demonstrate the non-trivial equilibrium solutions. Numerical results indicate that the equilibrium of the coupled planar with the changing parameters.

**Key words:** axially moving beam; nonlinearity; supercritical; bifurcation; finite difference method

动力传送带、空中缆车索道、高楼升降机缆绳等工程元件, 均可模型化为轴向运动梁, 其物理模型如

图1所示. 作为典型的陀螺连续系统, 由于陀螺项的存在, 使得针对轴向运动梁振动的分析广受关

收稿日期: 2010-07-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10902064); 国家杰出青年科学基金资助项目(10725209); 上海市重点学科建设资助项目(S30106); 长江学者和创新团队发展计划基金资助项目(IRT0844); 上海市青年科技启明星计划资助项目(11QA1402300); 上海市教委科研创新资助项目(12YZ028)

通信作者: 丁虎(1978~), 男, 讲师, 博士, 研究方向为复杂动力系统的振动与控制. E-mail: dinghu3@shu.edu.cn

注<sup>[1-5]</sup>. 考虑几何非线性, 轴向运动梁的振动通常遵循横向与径向(轴向)相耦合的平面运动规律. Thurman 等<sup>[6]</sup>首先提出了轴向运动梁平面耦合运动的控制方程. Tabarrok 等<sup>[7]</sup>推导出了另外一种耦合平面的控制方程, 而且基于静态梁的特征函数对控制方程进行了离散. Riedel 等<sup>[8]</sup>在 Galerkin 截断的基础上, 运用多尺度方法研究了轴向运动梁横向与径向耦合的非线性受迫振动. 沈建和等<sup>[4]</sup>通过增量谐波平衡法研究了横向与径向耦合的平面受迫振动响应. 这些针对平面耦合控制方程的研究工作都具有一个共同特点, 即通过某种途径将耦合方程简化, 仅保留少量低阶非线性项. 而文献[2, 9]则直接利用数值方法研究了未加简化的亚临界轴向运动梁的平面耦合运动.

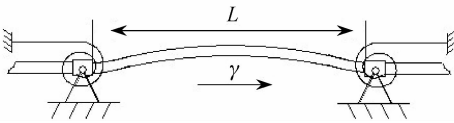


图1 轴向运动梁模型

Fig. 1 Model of axially moving beam

Wickert<sup>[10]</sup>基于“准静态假设”的弹性梁的自由振动模型, 建立了超临界轴向运动的静平衡位形, 以及对应于每个分岔解的连续陀螺系统的标准控制方程. Wickert 的研究证明, 对于超临界轴向运动梁, 因非线性引起的非平凡静平衡位形是一切研究工作的前提. 但是, 对于轴向运动梁两端固定边界条件下, 有关超临界轴向运动梁的静平衡分岔研究, 以及对应于分岔解的连续陀螺系统的标准控制方程的建模工作还未见有报道.

针对以上问题, 本研究通过发展有限差分方法, 直接数值研究两端固定边界条件下, 超临界轴向运动弹性梁的平面耦合运动的静平衡分岔问题.

## 1 平面耦合模型

假设截面积为  $A$ 、密度为  $\rho$ 、初始张力为  $P$  的梁以一致的速度  $\gamma$  (常数) 沿轴向运动, 梁弹性模量为  $E$ , 这里只考虑梁横向和径向变形. 在径向空间坐标  $x$  处,  $t$  时刻横向位移为  $v(x, t)$ , 轴向位移为  $u(x, t)$ . 对于细长的梁(例如, 满足  $I/(A^2) < 0.001$ ), 耦合动力学方程的无量纲形式为<sup>[1-2]</sup>

$$\begin{aligned} u_{,tt} + 2\gamma u_{,xt} + \gamma^2 u_{,xx} - k_1^2 u_{,xx} &= (k_1^2 - 1)v_{,x} \cdot \\ [(1 + u_{,x})v_{,xx} - u_{,xx}v_{,x}] [(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2]^{-\frac{3}{2}}, \\ v_{,tt} + 2\gamma v_{,xt} + \gamma^2 v_{,xx} - k_1^2 v_{,xx} + k_t^2 v_{,xxxx} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - k_t^2)(1 + u_{,x}) [(1 + u_{,x})v_{,xx} - u_{,xx}v_{,x}] \cdot \\ [(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2]^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, “ $_{,x}$ ”和“ $_{,t}$ ”分别表示对  $x$  和  $t$  的偏微分. 相应的无量纲化变量和参数分别为

$$\begin{aligned} v \leftrightarrow \frac{v}{l}, u \leftrightarrow \frac{u}{l}, x \leftrightarrow \frac{x}{l}, t \leftrightarrow t \sqrt{\frac{P}{\rho A l^2}}, \\ \gamma \leftrightarrow \gamma \sqrt{\frac{\rho A}{P}}, k_1 = \sqrt{\frac{EA}{P}}, k_t = \sqrt{\frac{EI}{Pl^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

方程(1)的静平衡解  $\hat{v}(x)$  和  $\hat{u}(x)$  满足

$$\begin{aligned} \gamma^2 \hat{u}'' - k_1^2 \hat{u}'' &= (k_1^2 - 1) \hat{v}' [(1 + \hat{u}') \hat{v}'' - \hat{u}'' \hat{v}'] \cdot \\ [(1 + u_{,x})^2 + \hat{v}'^2]^{-\frac{3}{2}}, \\ \gamma^2 \hat{v}'' - k_1^2 \hat{v}'' + k_t^2 \hat{v}'''' &= -(k_1^2 - 1)(1 + \hat{u}') \cdot \\ [(1 + \hat{u}') \hat{v}'' - \hat{u}'' \hat{v}'] [(1 + u_{,x})^2 + \hat{v}'^2]^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, “ $'$ ”表示对  $x$  取导数, “ $\hat{\phantom{x}}$ ”表示静平衡位移.

## 2 计算方法

这里仅考虑梁的两端由带有扭转弹簧的光滑套筒固定的边界条件<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) = 0, v(0, t) = v(1, t) = 0, \\ v_{,x}(0, t) = v_{,x}(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

静平衡位形可以通过下述两种方法计算得到.

### 2.1 静态方程迭代

0 解  $\hat{v}_0 = 0, \hat{u}_0 = 0$  总为系统的平衡位形. 下面计算系统的非平凡分岔解, 引入均匀空间步长  $h$ ,

$$x_j = jh \quad (j = 0, 1, \dots, L, h = \frac{l}{L}). \quad (5)$$

以  $u_j$  和  $v_j$  表示函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在网格  $x_j$  处的值. 应用中心差分法离散空间导数<sup>[4]</sup>, 得

$$\begin{aligned} \hat{u}' &= (\hat{u}'_{j+1} - \hat{u}'_{j-1})(2h)^{-1}, \\ \hat{u}'' &= (\hat{u}''_{j+1} - 2\hat{u}''_j + \hat{u}''_{j-1})h^{-2}, \\ \hat{v}' &= (\hat{v}'_{j+1} - \hat{v}'_{j-1})(2h)^{-1}, \hat{v}'' = (\hat{v}''_{j+1} - 2\hat{v}''_j + \hat{v}''_{j-1})h^{-2}, \\ \hat{v}'''' &= (\hat{v}''''_{j+2} - 4\hat{v}''''_{j+1} + 6\hat{v}''''_j - 4\hat{v}''''_{j-1} + \hat{v}''''_{j-2})h^{-4}. \end{aligned} \quad (6)$$

此时, 相应的两端固定的边界转变为

$$\begin{aligned} \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0, \hat{v}(0) = \hat{v}(1) = 0, \\ \hat{v}'(0) = \hat{v}'(1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

将方程(6)和(7)代入方程(3), 可以得到关于  $u_j$  和  $v_j$  的一系列代数方程. 通过迭代方法求解, 可得

$$\begin{aligned} \hat{v}_j = [ (k_1^2 - \gamma^2)(\hat{v}_{j+1} + \hat{v}_{j-1})h^2 - k_t^2(\hat{v}_{j-2} - 4\hat{v}_{j-1} - \\ 4\hat{v}_{j+1} + \hat{v}_{j+2}) ] [ -2(\gamma^2 - k_1^2)h^2 + 6k_t^2 ]^{-1} - (k_1^2 - 1) \cdot \end{aligned}$$

$$(2h + \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1})h^3 G_f [-4(\gamma^2 - k_1^2)h^2 + 12k_1^2]^{-1},$$

$$\hat{u}_j = [- (\gamma^2 - k_1^2)(\hat{u}_{j+1} + \hat{u}_{j-1})] [-2(\gamma^2 - k_1^2)]^{-1} +$$

$$(k_1^2 - 1)(\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_{j-1})h G_f [-4(\gamma^2 - k_1^2)]^{-1}, \quad (9)$$

$$G_f = [4(\hat{v}_{j+1} - 2\hat{v}_j + \hat{v}_{j-1})(2h + \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1}) -$$

$$4(\hat{u}_{j+1} - 2\hat{u}_j + \hat{u}_{j-1})(\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_{j-1})] \cdot$$

$$[(2h + \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1})^2 + (\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_{j-1})^2]^{-\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

给定初始条件及参数的数值,可解得离散点  $u_j$  和  $v_j$  的值作为方程(3)中连续解  $u(x)$  和  $v(x)$  的近似解.

## 2.2 黏弹性模型的非平凡分岔解

考虑 Kelvin 模型的黏弹性材料梁,则耦合黏弹性轴向运动梁的动力学方程的无量纲形式为<sup>[1-2]</sup>

$$u_{,tt} + 2\gamma u_{,xt} + \gamma^2 u_{,xx} - k_1^2 u_{,xx} = (k_1^2 - 1)v_{,x},$$

$$[(1 + u_{,x})v_{,xx} - u_{,xx}v_{,x}][(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2]^{-\frac{3}{2}},$$

$$v_{,tt} + 2\gamma v_{,xt} + \gamma^2 v_{,xx} - k_1^2 v_{,xx} + k_1^2 v_{,xxxx} +$$

$$\alpha v_{,xxxxt} = (1 - k_1^2)(1 + u_{,x})[(1 + u_{,x})v_{,xx} -$$

$$u_{,xx}v_{,x}][(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (11)$$

式中,无量纲参数

$$\alpha = I\eta(l^3\sqrt{\rho AP_0})^{-1}, \quad (12)$$

其中  $\eta$  为黏性系数.引入步长为  $\tau$  的均匀节点,

$$t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, T. \quad (13)$$

以  $u_j^n$  和  $v_j^n$  表示在点  $(x_j, t_n)$  的函数值  $u(x, t)$  和  $v(x, t)$ .应用中心差分法<sup>[2]</sup>,得

$$u_{,tt} = (u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1})\tau^{-2},$$

$$u_{,xt} = (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^{n-1})(4h\tau)^{-1}, \quad (14)$$

$$v_{,tt} = (v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1})\tau^{-2},$$

$$v_{,xt} = (v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^{n-1} - v_{j-1}^{n+1} + v_{j-1}^{n-1})(4h\tau)^{-1}. \quad (15)$$

应用有限差分法数值求解方程(11)需要式(4)和(5)以及相应的初始条件,因此,引入如下初始条件:

$$u(x, 0) = 0, u_{,t}(x, 0) = 0,$$

$$v(x, 0) = Dx^3(1-x)^3, v_{,t}(x, 0) = 0. \quad (16)$$

## 3 数值计算结果

在数值仿真中,取  $\tau = 10^{-5}$ ,  $h = 10^{-2}$  (即  $L = 100$ ),  $D = 0.01$ .以铜材料为例<sup>[2]</sup>,其弹性模量  $E = 1.08 \times 10^{11}$  Pa,密度  $\rho = 8450$  kg/m<sup>3</sup>.取初始张力  $P = 4225$  N,轴向速度  $\gamma = 150$  m/s,宽度  $W = 0.04$  m,高度  $H = 0.02$  m的矩形横截面积梁,无量纲黏性系数  $\alpha = 0.0001$ .

在空间离散式(5)和时间离散式(13)的基础上,结合初始条件以及梁两端固定的边界条件,通过差分法计算方程(11)的横向和径向的时间响应历

程,结果如图2所示,图中横纵坐标均为无量纲量.图2表明非平凡分岔解能够通过黏性方程计算得到,而且梁横向运动的幅度要远大于径向运动幅度.数值计算结果显示,梁的振动幅度随时间衰减,而且在经历足够长的时间之后,梁的形状趋向于静态非平凡平衡位形.因此,超临界轴向运动梁的非平凡静态平衡位形可以通过这种途径得到.

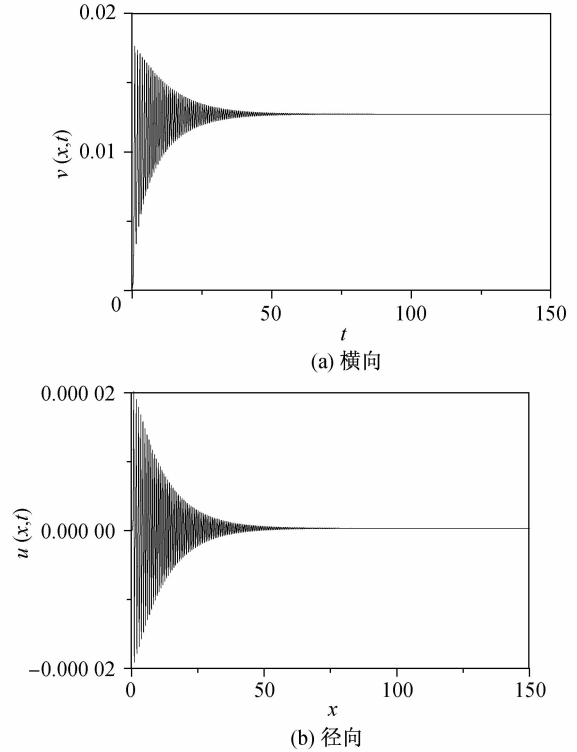


图2 耦合运动的时间响应历程

Fig. 2 Time history for coupled motion

通过式(9)和方程(11)计算得到的超临界轴向运动梁横向与径向耦合的平面非平凡分岔解的定性比较如图3所示,其中的点表示通过迭代格式(9)计算得到的结果,实线表示通过黏弹性自由振动方程(11)衰减得到的结果.各参数取值分别为初始张力  $P = 4225$  N,轴向速度  $\gamma = 150$  m/s,宽度  $W = 0.04$  m,高度  $H = 0.02$  m,无量纲黏性系数  $\alpha = 0.0001$ .观察发现,通过2种途径得到的计算结果完全吻合.

图4比较了初始张力和横截面积对超临界轴向运动梁中点静平衡位移的影响.由图可以发现,当轴向运动梁的轴向速度达到一定值时,轴向运动梁会发生静平衡分岔.图4(a)表明了初始张力的影响,其中梁的宽度  $W = 0.04$  m,高度  $H = 0.02$  m,点、实线和虚线分别表示初始张力  $P = 2112.5, 4225.0$  和  $8450.0$  N时的情形.由图可以发现,随着初始张力的增大,临界分岔速度逐渐减小.图4(b)表明了梁

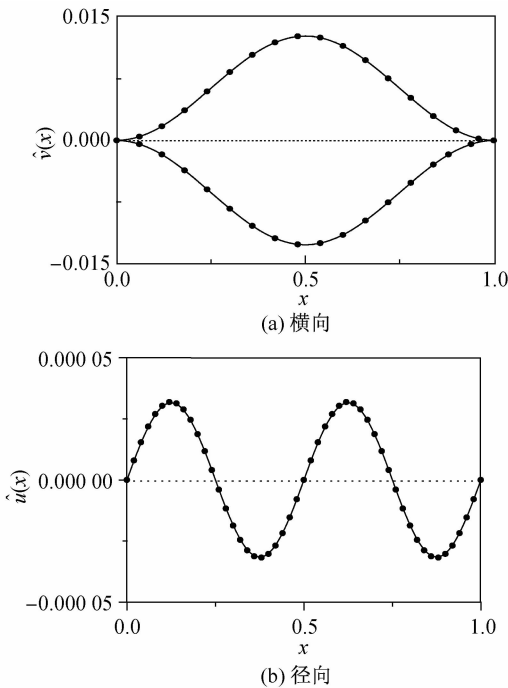


图3 2种方法计算非平凡非静平衡解的比较  
 Fig. 3 Comparison of the non-trivial equilibrium solutions between two methods

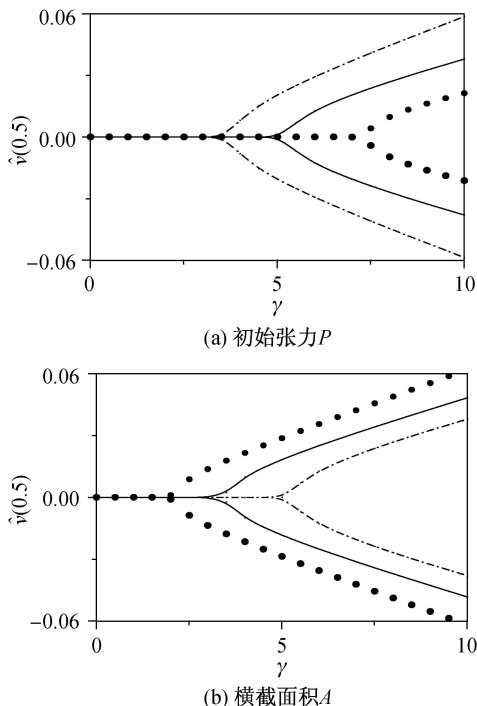


图4 系统参数对随速度变化的横向静平衡分岔的影响  
 Fig. 4 Effects of parameters on the bifurcation diagram with the axial speed

0.010, 0.015 和 0.020 m 时的情形. 由图可以发现, 梁的横截面积变大将导致临界分岔速度变大.

### 4 结束语

本研究讨论了超临界轴向运动梁横向与径向耦合平面非平凡静平衡位形分岔问题. 在梁两端固定边界条件下, 以铜材料梁为例, 结合有限差分法, 分别通过 2 种方法(迭代格式(9)和黏弹性自由振动方程(11))研究耦合平面的非平凡分岔解. 数值计算结果表明, 在超临界范围内, 横向与径向相耦合的平面内出现了非平凡的平衡解, 而且 2 种方法得到的超临界速度下非平凡分岔解是完全吻合的. 进一步对梁中点位置的静平衡分岔进行比较发现, 非平凡平衡位形的最大位移随轴向速度的增大而增大, 随初始张力及梁的横截面积的增大而减小; 另一方面, 随着初始张力的增大, 临界分岔速度随之减小, 而梁的横截面积的变大将导致临界分岔速度变大.

### 参考文献:

[ 1 ] CHEN L Q, DING H. Steady-state responses of axially accelerating viscoelastic beams; approximate analysis and numerical confirmation [J]. Sci in China G, 2008, 51 (11):1707-1721.

[ 2 ] DING H, CHEN L Q. On two transverse nonlinear models of axially moving beams [J]. Sci in China E, 2009, 52 (3):743-751.

[ 3 ] 冯志华, 胡海岩. 内共振条件下直线运动梁的动力稳定性[J]. 力学学报, 2002, 34:389-400.

[ 4 ] 沈建和, 陈树辉. 非线性振动系统极限环振幅与频率的控制[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6):90-92.

[ 5 ] 高美娟, 张伟, 姚明辉, 等. 压电复合材料层合板的混沌动力学研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6):82-85.

[ 6 ] THURMAN A L, MOTE C D, Jr. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip [J]. J Appl Mech, 1969, 36:83-91.

[ 7 ] TABARROK B, LEECH C M, KIM Y I. On the dynamics of an axially moving beam [J]. J Franklin Ins, 1974, 297:201-220.

[ 8 ] RIEDEL C H, TAN C A. Coupled, forced response of an axially moving strip with internal resonance [J]. Int J Non-Linear Mech, 2002, 37:101-116.

[ 9 ] 丁虎, 陈立群. 轴向运动黏弹性梁平面耦合非线性受迫振动[J]. 上海大学学报:自然科学版, 2009, 15(6):649-652.

[ 10 ] WICKERT J A. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam [J]. Int J Non-Linear Mech, 1992, 27:503-517.

的横截面积的影响, 其中初始张力  $P = 4\ 225\ \text{N}$ , 梁宽度  $W = 0.04\ \text{m}$ , 点、实线和虚线分别表示高度  $H =$