

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2012.02.007

# 粘贴形状记忆合金丝的复合树脂板振动分析

王正良, 陈晓阳, 姜恩宇, 刘思胜, 朱晓锦

(上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072)

**摘要:** 在复合结构中粘贴形状记忆合金(shape memory alloy, SMA)丝, 利用其受限回复时产生较大回复应力和其弹性模量随温度变化的特性, 实现对结构变形和振动响应的主动控制. 基于 Liang 模型并取其相变系数  $\Omega = -700$  MPa, 求出受限约束下的回复应力与弹性模量. 根据应力应变关系, 把回复应力转化为回复应变. 用 ANSYS 模拟复合薄板在两端固定条件下, 加热 SMA 丝对其固有频率以及振动响应的影响. 同时试验研究同样约束条件下, 粘贴 SMA 丝复合薄板的固有频率随温度的变化特性, 发现二者的结果很吻合, 证明相关思想和技术方法是正确的.

**关键词:** 形状记忆合金; 机敏复合薄板; 回复应力; ANSYS 分析

中图分类号: TB 381

文献标志码: A

文章编号: 1007-2861(2012)02-0145-06

## Vibration Analysis of Composite Resin Plate Embedded with Shape Memory Alloy

WANG Zheng-liang, CHEN Xiao-yang, JIANG En-yu, LIU Si-sheng, ZHU Xiao-jin

(School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** Shape memory alloy (SMA) has advantages of great recovery stress and elastic modulus varied with the temperature, and therefore can be embedded in composite structure to actively control structure deformation and vibration. We derive recovery stress and elastic modulus at different temperatures by modifying the phase-change coefficient  $\Omega$  of Liang's constitutive model. Based on the stress-strain relation, the recovery stress is translated into recovery strain. Using ANSYS, we simulate the influence of recovery stress on the natural frequency and vibration response of composite plate under both ends of fixed conditions. In the experiments on composite plate with both ends under the same condition, we find characteristics of the natural frequency varying with temperature. The analysis results obtained with ANSYS are closed to experimental results, verifying correctness of the related method.

**Key words:** SMA; smart composite plate; recovery stress; ANSYS analysis

形状记忆合金(SMA)作为一种新型功能材料,近10年来已引起人们的广泛关注. SMA最显著的特性是具有形状记忆效应(SME),在外界激励下,受限回复时会产生较大的回复力,同时其弹性模量也随着温度的变化而发生变化. 因此,可将SMA丝嵌入

复合材料结构中,利用SMA丝在变温条件下产生的回复力和弹性模量的变化,自动地修改结构的刚度特性,从而实现对结构的变形、噪声和振动响应等的控制<sup>[1]</sup>.

在工程应用中,需要准确了解其回复力与温度

收稿日期:2010-10-11

基金项目:国家自然科学基金重大研究计划资助项目(90716027)

通信作者:陈晓阳(1961~),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为摩擦学、振动等. E-mail:xychen@shu.edu.cn

的关系.目前,对回复力的计算主要采用 Tanaka<sup>[2]</sup>, Liang 等<sup>[3]</sup>和 Brinson<sup>[4]</sup>提出的 SMA 本构关系.但文献[5]的研究表明,在大预应变条件下, Tanaka 模型的计算结果与试验数据之间存在较大误差. Liang 模型中形状记忆合金在受限时的回复力公式和 Tanaka 本构模型形式相同,二者的区别在于所对应的相变方程不同,因此,求出的回复力基本相同. Brinson 模型在求回复应力值时,理论值与试验值相差更大.文献[6]指出用 Brinson 模型求得的完全约束情况下的最大回复应力为 4 481.4 MPa,而由试验测得的 SMA 的极限抗拉强度为 1 080 MPa,由于最大回复应力不可能大于极限抗拉强度,这说明 Brinson 模型也不能较好地预测预应变大于 2% 时的回复应力值.

通过上述 3 种模型求解回复力,相变系数  $\Omega(\xi) = -E(\xi)\varepsilon_L$ ,而该公式是在  $T < A_s$  的情况下得到的<sup>[3]</sup>,即无相变过程,因此,在求回复应力时,该公式需做相应调整.文献[5]通过试验求得在受限回复过程中, $\Omega$  值为  $-600 \sim -800$  MPa,而采用上述公式时,求得的大约为  $-1\ 368 \sim -3\ 675$  MPa,也与试验值不符.

在控制结构振动方面, Baz 等<sup>[7]</sup>通过理论和试验论证了使用 SMA 控制柔性悬臂梁弯曲振动的可行性. Ro 等<sup>[8]</sup>采用有限元法模拟了 SMA 对固有频率与振动的响应情况,但未给出回复力与其相互关系. Ostachowicz 等<sup>[9]</sup>采用板的有限元理论给出了预应变分别为 1%, 2%, 3% 和 4% 时对前三阶固有频率的影响,但是该方法在模拟 SMA 回复力时采用的是预应变与弹性模量的乘积,而这时的回复应力将比真实应力要大很多. Zheng 等<sup>[10]</sup>用理论分析和试验研究了两种含 SMA 丝层合板的 SMA 不定向和 SMA 网状型的振动特性. Lau 等<sup>[11]</sup>给出了粘贴 SMA 丝两端固定复合梁的固有频率变化情况.

由于形状记忆合金丝的本构关系较为复杂,现有的通用有限元软件中没有模拟 SMA 形状记忆效应的单元和材料模型.以往使用 ANSYS 分析 SMA 的回复力对基体(如复合板)的作用时,大多是采用力的方式加载<sup>[12]</sup>,但这导致 SMA 端面会出现应力的集中现象,并且也会使得两种材料各点的变形量不等,彼此间会产生相对滑动位移,固有频率也向小的方向变化,和试验结果不符合.文献[13]提出了“负热应变”的方法,但其回复应力和应变都是通过试验得出的,并没有给出 SMA 应力、应变、弹性模量

是否为线性关系.

由于在粘贴 SMA 丝的稳态振动方面研究成果较少,本工作通过以下方面研究 SMA 复合结构的振动特性:① 修改相变系数  $\Omega$ ,采用迭代求解的方法求出受限约束下的回复应力和弹性模量;② 根据应力应变关系  $\varepsilon = \sigma/E$ ,把回复应力转化为各个温度下的应变;③ 运用 ANSYS 来模拟粘贴 SMA 丝树脂板的振动情况;④ 试验研究两端固定条件下,粘贴 SMA 丝树脂板的固有频率随温度变化的特性.

## 1 Ni-Ti 形状记忆合金本构关系

Liang 等<sup>[3]</sup>由基本热力学原理推导了 SMA 的一维本构模型:

$$\dot{\sigma} = E(\xi)\dot{\varepsilon} + \Omega(\xi)\dot{\xi} + \Theta\dot{T}. \quad (1)$$

对式(1)积分,可得

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0) + \Theta(T - T_0), \quad (2)$$

式中, $\sigma$  为应力, $E$  为弹性模量, $T$  为温度, $\xi$  为马氏体含量( $0 \leq \xi \leq 1$ ), $\Theta$  为热弹性系数, $\Omega$  为相变系数,下标“0”表示初始状态.

在奥氏体到马氏体的相变过程中, $\xi$  与  $\sigma$  的关系为

$$\xi = \frac{1 - \xi_A}{2} \cos[\alpha_M(T - M_f) + b_M\sigma] + \frac{1 + \xi_A}{2}, \quad (3)$$

式中, $C_M(T - M_f) - \frac{\pi}{|b_M|} \leq \sigma \leq C_M(T - M_f)$ ;而由马氏体到奥氏体的逆相变阶段, $\xi$  与  $\sigma$  的关系为

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_M \{ \cos[\alpha_A(T - A_s) + b_A\sigma] + 1 \}, \quad (4)$$

式中, $C_A(T - A_s) - \frac{\pi}{|b_A|} \leq \sigma \leq C_A(T - A_s)$ .在式(3)和(4)中, $\xi_A$  和  $\xi_M$  表示相变过程开始时的马氏体含量,其中材料常数

$$\alpha_A = \frac{\pi}{A_f - A_s}, \quad b_A = -\frac{\alpha_A}{C_A},$$

$$\alpha_M = \frac{\pi}{M_s - M_f}, \quad b_M = \frac{\alpha_M}{C_M}.$$

同时,式(1)中的  $\Omega(\xi) = -E(\xi)\varepsilon_L$ ,  $E(\xi) = E_A + \xi(E_M - E_A)$ <sup>[3]</sup>.由于 SMA 丝受限回复,回复力  $\sigma$  为

$$\sigma = \sigma_0 + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0) + \Theta(T - T_0). \quad (5)$$

设初始状态马氏体体积分  $\xi_0 = \varepsilon_0/\varepsilon_L$ , 温度  $T_0 < A_s$ .用  $A_s^\sigma$  表示存在应力情况下奥氏体转变开始温度,用  $A_f^\sigma$  表示存在应力情况下奥氏体相变结束临界温度.在各个典型温度范围内,当  $T < A_s^\sigma$  时,形状记

忆合金不发生相变,没有新的奥氏体产生,回复力与温度之间呈线性关系,即

$$\sigma = \Theta(T - T_0) + \sigma_0. \quad (6)$$

当  $A_s^\sigma < T < A_f^\sigma$  时,温度将诱发马氏体向奥氏体转变,回复力公式为

$$\sigma = \sigma_s + \Omega(\xi)(\xi - \xi_0) + \Theta(T - A_s^\sigma); \quad (7)$$

当  $T > A_f^\sigma$  时,马氏体向奥氏体转变结束,回复力公式为

$$\sigma = \sigma_f + \Theta(T - A_f^\sigma). \quad (8)$$

在式(7)和(8)中,

$$A_s^\sigma = \frac{\alpha_A A_s - b_A \sigma_0 + b_A \Theta T_0}{\alpha_A + b_A \Theta}, \quad (9)$$

$$A_f^\sigma = \frac{\alpha_A A_s - b_A \sigma_s + b_A \Omega(\xi_0)\xi_0 + b_A \Theta A_s^\sigma + \pi}{\alpha_A + b_A \Theta}, \quad (10)$$

$\sigma_s$  与  $\sigma_f$  分别为  $A_s^\sigma$  与  $A_f^\sigma$  下的回复应力.

## 2 受限回复应力的求解

对于非线性方程(7),由于变量  $\sigma, \xi$  之间相互耦合,直接求解回复应力比较困难,故通过 Matlab 编程来求解回复应力与温度的关系,程序流程如图1所示.

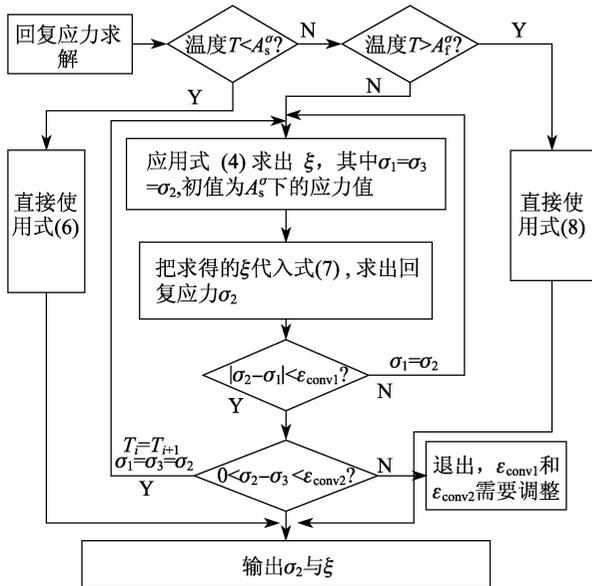


图1 程序流程图

Fig.1 Programming flow chart

根据上述程序流程,采用表1给出的形状记忆合金材料参数,取 SMA 丝预应变为 5%,根据文献[5]所得到的  $\Omega$  值,取其中值为  $\Omega = -700$  MPa.求得  $A_s^\sigma$  为 35.1 °C,  $A_f^\sigma$  为 89.6 °C,得到的回复应力、弹性模量与温度的关系如表2所示,结果显示与文

献[14-15]给出的数据相符合.根据  $\varepsilon = \sigma/E$ ,可求出应变和温度的关系(见表2).

表1 Ti-55%Ni 形状记忆合金的材料常数

Table 1 Ti-55%Ni SMA material constant

$E_A$ /GPa	67.00	$M_f$ /°C	9.0	$\varepsilon_L$	0.067
$E_M$ /GPa	26.30	$M_s$ /°C	18.4	$\Theta$ /(MPa · °C <sup>-1</sup> )	0.55
$\sigma_s^\sigma$ /GPa	0.10	$A_s^\sigma$ /°C	34.5	$C_M$ /(MPa · °C <sup>-1</sup> )	8.00
$\sigma_f^\sigma$ /GPa	0.17	$A_f^\sigma$ /°C	49.0	$C_A$ /(MPa · °C <sup>-1</sup> )	13.80

表2 SMA 回复应力、弹性模量、负热应变与温度关系

Table 2 Relation between recovery stress, elastic modulus and negative thermal strain with temperature

温度 T/°C	回复应力 $\sigma$ /MPa	弹性模量 E/GPa	回复应变 $\varepsilon$ /%
35	8.25	36.6	-0.022 5
40	17.63	37.0	-0.047 7
50	54.09	38.8	-0.139 4
60	143.76	43.7	-0.329 2
70	212.39	47.3	-0.448 6
80	396.71	55.9	-0.686 7
90	559.73	67.0	-0.835 4
100	560.80	67.0	-0.837 0

## 3 对 SMA 复合结构的振动特性分析

### 3.1 模型的建立与求解

建立的实体模型如图2所示,树脂板的尺寸为 985 mm × 110 mm × 1.5 mm, SMA 丝的直径为 0.5 mm,长度为 985 mm.对于粘贴 SMA 丝的复合树脂板,可认为基体(树脂板)沿 SMA 丝轴线方向的应变和 SMA 丝的轴向应变相等,因此,在建模时,应选择粘结(Glue)命令,确保在联结处的应变相同.

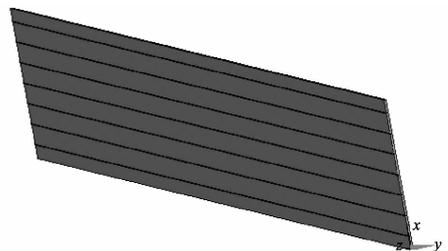


图2 单面粘贴 SMA 丝树脂板的实体模型

Fig.2 Solid model of composite plates embedded with SMA fibers

有限元模型的建立包括单元类型的选择、材料特性的输入以及网格的划分.采用 SOLID 186 单元,建立2种材料属性,环氧树脂板的密度为 1 950 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 24.5 GPa,泊松比为 0.3, SMA 丝的密度

为  $6\,448.1\text{ kg/m}^3$ , 各个温度下的弹性模量和回复应变如表 2 所示. 得到的有限元模型如图 3 所示.

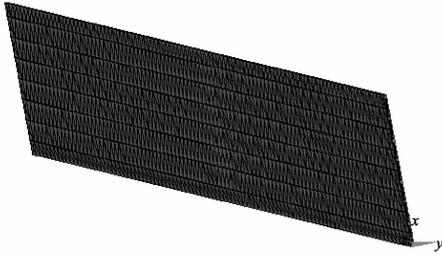


图 3 单面粘贴 SMA 丝树脂板的有限元模型

Fig. 3 Finite element model of composite plates embedded with SMA fibers

ANSYS 求解 SMA 复合结构振动特性主要分为以下步骤.

(1) 静力学分析. 模拟 SMA 丝的回复应力对复合结构的应力-应变的影响, 通过 Matlab 求得各个温度下的回复应力和弹性模量, 根据  $\sigma = E\varepsilon$ , 即可把 SMA 丝的回复应力转化为各个温度下的回复应变. 这样通过输入各个温度下的回复应变和弹性模量, 即可模拟整个 SMA 丝的回复力作用.

(2) 动力学分析. 要考虑上述静力学研究结果对动力学的影响, 选择 calculate elem results 来确保 SMA 丝的回复应力对树脂板振动特性的影响.

(3) 谐响应分析. 确定 SMA 复合结构在已知频率的正弦载荷作用下结构的响应.

### 3.2 结果分析

将树脂板两端固定(SMA 丝两端不需要固定), 考虑温度对树脂板的影响(树脂板的热膨胀系数垂直层向为  $1 \times 10^{-4}$ , 平行层向为  $1.4 \times 10^{-6}$ ), 参考温度为  $26\text{ }^\circ\text{C}$ . 在 SMA 丝为  $35\text{ }^\circ\text{C}$  时, 树脂板的温度为  $28\text{ }^\circ\text{C}$ , 之后随着 SMA 丝每增加  $5\text{ }^\circ\text{C}$ , 树脂板的温度增加  $1\text{ }^\circ\text{C}$ . 热环境下粘贴 SMA 丝的树脂板在 SMA 丝为  $35 \sim 100\text{ }^\circ\text{C}$  时的固有频率如图 4 所示, 同时也给出了树脂板没有受热情况下的固有频率随 SMA 丝温度的变化规律.

结果表明, 在树脂板受热的情况下, 随着 SMA 温度的增加, 固有频率出现先微降、后增加、然后微降的现象. 这是因为当温度低于  $35\text{ }^\circ\text{C}$  时, SMA 丝没有发生马氏体向奥氏体的转变, 产生的回复力较小, 而此时由于树脂板受热膨胀, 固有频率出现微降现象. 当温度超过  $35\text{ }^\circ\text{C}$  时, SMA 丝的组织结构发生了逆转变, 内部产生很大的相变回复力. 在该力的作

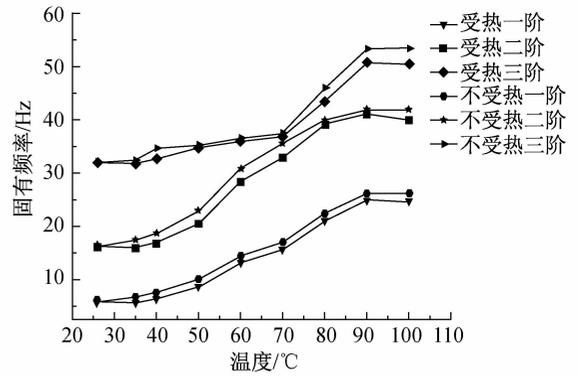


图 4 粘贴 SMA 丝树脂板固有频率随温度变化情况

Fig. 4 Natural frequency of composite plates embedded with SMA fibers varies with Temperature

用下, 结构的刚度更大, 因此, 使得树脂板的固有频率出现变大的趋势. 相变结束后, 此时的回复力增加较小, 树脂板的受热膨胀使得固有频率再次微降. 若树脂板不受热, 由于 SMA 丝的回复力, 固有频率一直变大.

### 3.3 谐响应分析

激励点的坐标为  $A(55, 0, 100)$ , 测量点  $B, C$  的坐标分别为  $(55, 0, 492)$ ,  $(55, 0, 736)$ , 激励力为  $5\text{ N}$ . 图 5 为不激励 SMA 时的  $B, C$  两点的振动响应, 图 6 为加热到  $80\text{ }^\circ\text{C}$  时的振动响应.

## 4 试验方案

### 4.1 SMA 复合板的制作

选用环氧树脂板, 尺寸以及材料性质和上述 ANSYS 分析一致, 如图 2 所示. 用拉刀在树脂板表面拉出 7 个半径为  $0.25\text{ mm}$ , 长度为  $985\text{ mm}$  的半圆槽; 然后, 截取直径为  $0.5\text{ mm}$ , 长度为  $960\text{ mm}$  的 SMA 丝, 进行 5% 预应变; 最后, 通过胶粘剂把 SMA 丝牢牢地固定在环氧树脂板上.

### 4.2 试验方案

本试验采用两端固定的方法, 使用脉冲锤对树脂板进行激振, 恒流源 ( $2.1\text{ A}$ ,  $30\text{ V}$ ) 对预应变为 5% 的 SMA 丝 ( $R = 4.2\ \Omega$ ) 进行加热, 其中 SMA 丝采用串联方式粘贴在树脂板的表面. 由于每根 SMA 丝的电阻很大, 这里采用  $1.7\text{ A}$  的电流进行加热, 热电偶测温仪记录 SMA 丝温度信号. 加速度传感器采集树脂板的振动信号, 通过 BK 分析仪得到板的固有频率. 在两端固定的条件下, 树脂板材料的受热膨胀也会影响结构的固有频率, 因此, 需首先研究热环

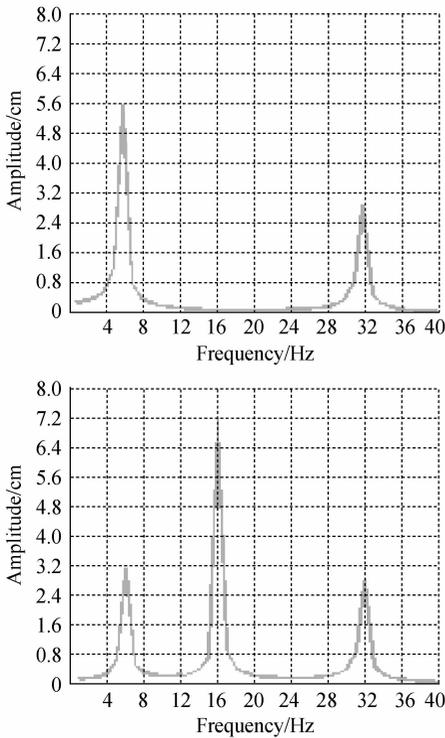


图5 20 °C未激励 SMA 时,B,C 两点的振动响应  
Fig. 5 Vibration response of B, C points at 20 °C

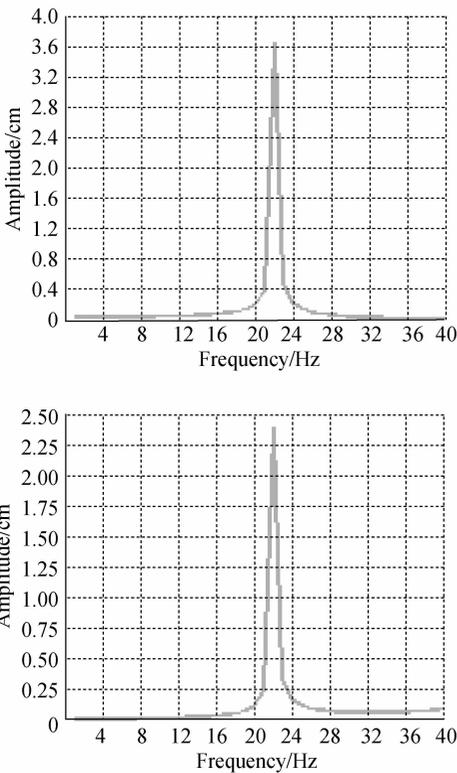


图6 80 °C激励 SMA 时,B,C 两点的振动响应  
Fig. 6 Vibration response of B, C points at 80 °C

境下树脂板的振动特性. 图 8 为两端固定、未粘贴 SMA 丝的树脂板和单面粘贴 SMA 丝的树脂板,在室内温度变化范围为 23 ~ 27 °C 的情况下测得的固有频率. 图 9 为加热 SMA 丝后,树脂板的固有频率变化情况,同时与 ANSYS 仿真结果进行对比.

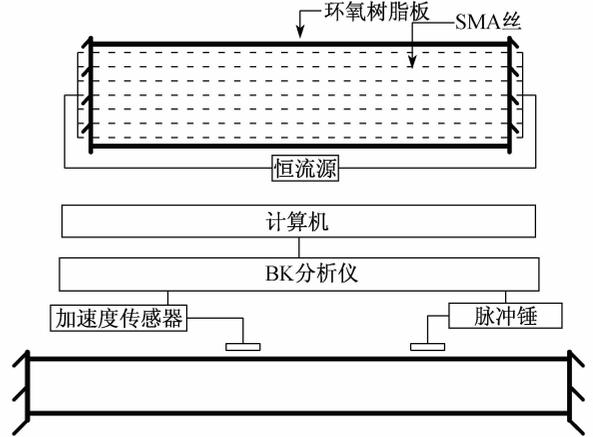


图7 试验系统  
Fig. 7 Experimental system

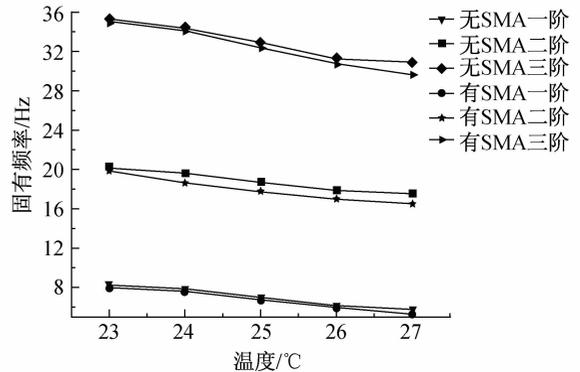


图8 SMA 丝不加热树脂板固有频率随温度变化规律  
Fig. 8 Natural frequency of composite plates varies with temperature at room temperature condition

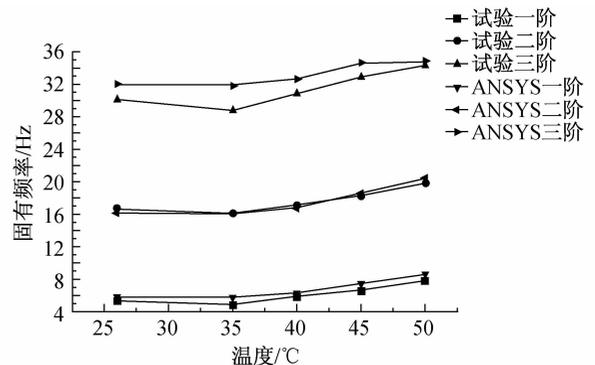


图9 加热 SMA 丝,树脂板固有频率随温度的变化曲线  
Fig. 9 Natural frequency of composite plates varies with temperature at SMA fibers heating condition

### 4.3 结果分析

由图8可知,在室温变化范围内,SMA丝对树脂板的固有频率几乎没有影响.由图8给出的固有频率,结合ANSYS分析,可以间接证明所给的树脂板热膨胀系数的正确性.

在加热SMA丝的情况下,比较单面粘贴SMA丝固有频率的试验结果和ANSYS分析结果(见图9).可以看出,二者比较接近,但ANSYS分析的数值要大点,这是因为试验误差由安装误差、SMA丝的相变误差和BK分析仪所测的误差等组成.

## 5 结论

(1) 在两端约束条件下,热环境对结构的固有频率有较大影响,尤其是在结构跨度较大的情况下.

(2) 当温度低于SMA丝相变温度时,SMA丝对结构的固有频率影响较小.当温度超过马氏体逆变温度时,受限回复的SMA会产生较大的回复力,从而对结构的固有频率有较大的影响.热环境下粘贴SMA丝的树脂板固有频率总体上呈现先微降、后变大、然后微降的趋势.为了更好地利用SMA丝对结构的抑振,应尽量减少对基体的热传递,同时希望基体的热膨胀系数越小越好.

(3) 由谐响应分析可以看出,SMA能够很好地抑制结构的振动.

(4) 与前人的试验结果对比可知,通过修改相变系数 $\Omega$ 进行回复应力的求解是合理可行的.

(5) 由于SMA丝和复合板的应变相等,因此,把回复应力转化为该温度下的回复应变具有可行性.

### 参考文献:

[1] 滕兆春,李世荣,付小华.热载荷下嵌入SMA丝复合材料的固有频率[J].兰州铁道学院学报,2003,22(6):122-126.

[2] TANAKA K A. Thermomechanical sketch of shape memory effect; one-dimensional tensile behaviour [J]. Res Mech, 1986, 18:251-263.

[3] LIANG C, ROGERS C A. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials [J]. Journal of Intelligent Material System and Structures, 1990, 1(2):207-234.

[4] BRINSON L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable [J]. Intelligent Material Systems and Structures, 1993, 4:229-242.

[5] TANG W, SANDSTROM R. Limitations of constitutive relations for TiNi shape memory alloys [J]. Journal De Physique IV, 1995, 5(3):185-190.

[6] 邓宗才,霍达,杜修力.形状记忆合金本构模型的研究进展[J].北京工业大学学报,2002,28(4):452-458.

[7] BAZ A, IMAM K, MCCOY J. Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 40(3):437-456.

[8] RO J, BAZ A. Nitinol-reinforced plates (III): dynamic characteristics [J]. Composites Engineering, 1995, 5(1):91-106.

[9] OSTACHOWICZ W, KRAWCZUK M, ZAK A. Natural frequencies of a multilayer composite plate with shape memory alloy wires [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1997, 32:71-83.

[10] ZHANG R X, NI Q Q, MASUDA A, et al. Vibration characteristics of laminated composite plates with embedded shape memory alloys [J]. Composite Structures, 2006, 74(4):389-398.

[11] LAU K T, ZHOU L M, TAO X M. Control of natural frequencies of a clamped-clamped composite beam with embedded shape memory alloy wires [J]. Composite Structures, 2002, 58:39-47.

[12] 李琴,朱敏波.SMA在星载天线上的热变形控制研究[J].计算机工程与设计,2009,30(15):3698-3701.

[13] 王晓宏,张博明,杜善义,等.形状记忆合金驱动主动变形波纹板结构的有限元分析[J].机械工程学报,2009,45(8):287-291.

[14] 邓宗才,李庆斌.形状记忆合金对混凝土梁驱动效应分析[J].土木工程学报,2002,35(2):41-47.

[15] 杜彦良,聂景旭.主动探测裂纹和控制裂纹扩展的智能材料结构[J].力学进展,1994,24(4):499-510.