云南大学学报（自然科学版），2009，31（4）：334～340 CN 53－1045/N ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

非局部二维 Swift－Hohenberg 方程的惯性流形[*1]

林国广
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘要：在非线性正核 $G(r)$ 的有界性及光滑性条件下，给出非局部二维 Swift－Hohenberg 方程的惯性流形存在性的证明.

关键词：局部 Swift－Hohenberg 方程；非局部二维 Swift－Hohenberg 方程；整体解；整体吸引子；惯性流形
中图分类号：O 175.29 **文献标识码**：A **文章编号**：0258－7971(2009)04－0334－07

在大气层、海洋及地球内的流体由于密度差而引起流体的对流作用. Rayleigh－Benard 流是典型的对流作用，决定于时空作用的模型. Rayleigh－Benard 流的数学模型包含非线性 Navier－Stokes 偏微分方程与温度方程的耦合. Swift 和 Hohenberg[1] 推导出：当 Rayleigh 数接近对流作用时，Rayleigh－Benard 流的数学模型可以近似地简化为关于幅度方程

$$u_t = \mu u - (1 - \partial_{xx})^2 u - u^3 \tag{1}$$

中将立方项 u^3 用非局部积分项来近似，得到了大量研究成果[2～7]. 在文献[8,9]中给出非局部二维 Swift－Hohenberg 方程

$$u_t = \mu u - (1 + \Delta)^2 u - uG * u^2, \tag{2}$$

其中 $G * u^2 = \int_D G(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,u^2(\xi,\eta,t)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，$u(x,y,t)$ 是未知幅度函数，μ 是 Rayleigh 数与对流临界值之差，$G(r)$ 是已知的径向对称函数，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$*$ 表示卷积，$D = (0,L)^2$ 是有界平面区域. 并在对 $t \geqslant 0$，$(x,y) \in D$，存在 2 个正常数 C，B，使得

$$0 < C \leqslant G(\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant B \text{ 且 } G, \nabla G, \Delta G \in L^\infty(D) \tag{3}$$

的条件下研究了非局部二维 Swift－Hohenberg 方程(2)的整体吸引子及其维度估计.

本文讨论方程(2)在初值条件

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \tag{4}$$

和周期边界条件

$$u(x,y,t) = u(x+L,y,t) = u(x,y+L,t), L > 0, t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\iint_D u(x,y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, t \geqslant 0 \tag{6}$$

下的惯性流形.

本文采用记号：$H = \{u \in L^2(D)\}$ 且 u 满足(5)和(6). 用(. ,.)和 ‖. ‖ 分别表示 H 的内积与模. $V_1 = \{u \in H^1(D)\}$ 且 u 满足(5)和(6). $V_2 = \{u \in H^2(D)\}$ 且 u 满足(5)，(6)式. 由 Sobolev 嵌入定理知 V_1 的模等价于 $\|\nabla u\|$，V_2 的模等价于 $\|\Delta u\|$.

定义 1 M 是问题(2)～(6)的一个惯性流形，是指 $\forall T > 0$，在 $D \times [0,T]$ 上解算子 $S(t)$ 满足：①M 是有限维的 Lipschitz 流形；②M 是正不变的，即 $\forall t \geqslant 0$，$S(t)M \subset M$；③M 指数吸引所有解轨道，即 $\forall u_0 \in$

* **收稿日期**：2008－08－18
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10861014).
作者简介：林国广(1964－)，男，云南人，副教授，博士，主要从事偏微分方程方面的研究.

V_1,有 $\mathrm{dist}(S(t)u_0,M)\to 0(t\to+\infty)$.

1　初始方程与预备方程

非局部二维 Swift – Hohenberg 问题(2) ~ (6) 写成抽象形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f(u),u(0)=u_0\in H, \tag{7}$$

其中 $f(u)=-2\Delta u-\alpha u-uG*u^2,\alpha=1-\mu,(Au,v)=(\Delta u,\Delta v),u,v\in V_2$. 由文献[10] 知,$A$ 是 H 上一个线性无界正自伴算子,A^{-1} 在 H 中紧. 设 $A^s(s\in R)$ 表示 A 定义在 $D(A^s)$ 上的分数幂,A 的特征向量 w_j 构成 H 的一组标准正交基,其相应的特征值是 λ_j,

$$Aw_j=\lambda_j w_j,j=1,2,\cdots \tag{8}$$

$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to+\infty(j\to+\infty)$. 由文献[12] 知特征值 $\lambda_j=\lambda_1 j^2$.

引理 1　由方程(7) 定义的 $f(u)$ 在 $V_1=D(A^{\frac{1}{4}})$ 的有界集上是一个 Lipschitz 函数,即存在 $M_0>0$,$\forall u,v\in D(A^{\frac{1}{4}})$,$\|u\|_{V_1}\leqslant M_0$,$\|v\|_{V_1}\leqslant M_0$,存在常数 $C_M>0$,使得 $\|A^{\frac{-1}{4}}f(u)-A^{\frac{-1}{4}}f(v)\|\leqslant C_M\|A^{\frac{1}{4}}(u-v)\|$,其中 $C_M=2+BC_0^4M_0^2+|\alpha|C_0^2+2C_0^4M_0^2\|G\|_\infty$,$C_0$ 是嵌入常数.

证明　设 $u,v\in D(A^{\frac{1}{4}})$,令 $u=u-v$,则有 $|(f(u)-f(v),w)|=|(-2\Delta w-\alpha w-wG*u^2-vG*[(u+v)w],w)|\leqslant 2\|A^{\frac{1}{4}}w\|^2-\alpha\|w\|^2+|(wG*u^2,w)|+|vG*[(u+v)w],w)|$,

由嵌入关系 $V_1\subset H$,有 $\|w\|\leqslant C_0\|A^{\frac{1}{4}}w\|$,从而

$$|(wG*u^2,w)|=|(w^2,G*u^2)|\leqslant B\iint_D w^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_D u^2(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=B\|u\|^2\|w\|^2,$$

$$|(vG*[(u+v)w],w)|\leqslant\|G\|_\infty\iint_D|v\|w|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_D(|u|+|v|)|w|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$\|G\|_\infty\|v\|(\|u\|+\|v\|)\|w\|^2,$$

故 $|(f(u)-f(v),w)\leqslant C_M\|A^{\frac{1}{4}}(u-v)\|^2$. 证毕.

设有界吸收集 $B_\rho\subseteq V_1$,光滑截断函数 $\theta:R^+\to[0,1]$ 定义为

$$\begin{cases}\theta(\xi)=1,0\leqslant\xi\leqslant1,\\ \theta(\xi)=0,\xi\geqslant2,\\ |\theta'(\xi)|\leqslant2,\xi\geqslant0,\\ \theta_\rho(r)=\theta(\dfrac{r}{\rho}).\end{cases}$$

令 $F(u)=\theta_\rho(|A^{\frac{1}{4}}u|)f(u)$,得方程(7) 的预备方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=F(u),t>0,u(0)=u_0. \tag{9}$$

设 $P_N:H\to\mathrm{Span}\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$ 是投影算子,$Q_N=I-P_N$,将 P_N 与 Q_N 分别作用于方程(9),记 $p=P_Nu$,$q=Q_Nu$,可得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap=P_NF(p+q)$,$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq=Q_NF(p+q)$.

引理 2　设给定 $\gamma>0,u,v\in V_1$,$\|u(t)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$\|v(t)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$t\in[0,T]$,$T>0$,$M_0>0$($M_0$ 为引理 1 定义). 则存在只与 γ,M_0,T 有关的常数 $C_i>0,i=1,2$,$\forall N$ 及 $\forall t\in[0,T]$,有

$$\|Q_NA^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|\leqslant\gamma\|P_NA^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|, \tag{10}$$

或

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|\leqslant C_1\exp(-C_2\lambda_{N+1}t)\|A^{\frac{-1}{4}}(u(0)-v(0))\|. \tag{11}$$

此外还有

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\| \leqslant \exp(C_M t)\|A^{\frac{-1}{4}}(u(0)-v(0))\|. \tag{12}$$

证明 设 u 和 v 是方程(7)分别对应初值 $u_0, v_0 \in V_1$ 的2个不同解, $\forall t \in [0,T]$, $\|A^{\frac{1}{4}}u(t)\| \leqslant M_0$, $\|A^{\frac{1}{4}}v(t)\| \leqslant M_0$, 令 $w(t)=u(t)-v(t)$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+Aw=f(u)-f(v). \tag{13}$$

令

$$q(t)=\frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}=\frac{(A^{\frac{1}{4}}w,A^{\frac{1}{4}}w)}{(A^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{-1}{4}}w)},$$

$\forall t \in [0,T]$, $q(t)$ 关于 t 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^4}[\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2(A^{\frac{1}{4}}w',A^{\frac{1}{4}}w)-(A^{\frac{-1}{4}}w',A^{\frac{-1}{4}}w)\|A^{\frac{1}{4}}w\|^2]=$$

$$\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}[(w',A^{\frac{1}{2}}w)-q(t)(w',A^{\frac{-1}{2}}w)]=$$

$$\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}(Aw-(f(u)-f(v)),A^{\frac{1}{2}}w-q(t)A^{\frac{-1}{2}}w)=$$

$$\frac{-2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}(A^{\frac{3}{4}}w-A^{\frac{-1}{4}}(f(u)-f(v)),A^{\frac{3}{4}}w-q(t)A^{\frac{-1}{4}}w),$$

$$(qA^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w)=q(A^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{3}{4}}w)-q^2(A^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{-1}{4}}w)=$$

$$q(A^{\frac{1}{4}}w,A^{\frac{1}{4}}w)-q^2(A^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{-1}{4}}w)=0,$$

$$(A^{\frac{3}{4}}w,A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w)=(A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w,A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w)=\|A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w\|^2.$$

利用 Cauchy 不等式得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}\|A^{\frac{3}{4}}w-qA^{\frac{-1}{4}}w\|^2=$$

$$\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}(A^{\frac{-1}{4}}(f(u)-f(v)),A^{\frac{3}{4}}w-q(t)A^{\frac{-1}{4}}w)\leqslant$$

$$\frac{2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}\|A^{\frac{3}{4}}w-q(t)A^{\frac{-1}{4}}w\|^2+\frac{\|A^{\frac{-1}{4}}(f(u)-f(v))\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2}.$$

由引理1又得 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \leqslant C_M^2 q$, 对 $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, 从 τ 到 t 积分上式得

$$\frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2} \leqslant \frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(\tau)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(\tau)\|^2}\exp[C_M^2(t-\tau)]. \tag{14}$$

用 $A^{\frac{-1}{2}}w$ 与方程(13)作内积, 利用 Cauchy 不等式及引理1得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}w\|^2=(A^{\frac{-1}{4}}(f(u)-f(v)),A^{\frac{-1}{4}}w)\leqslant$$

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(f(u)-f(v))\|\cdot\|A^{\frac{-1}{4}}w\| \leqslant C_M\|A^{\frac{1}{4}}w\|\cdot\|A^{\frac{-1}{4}}w\| \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{4}}w\|^2+\frac{C_M^2}{2}\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2+\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2\left(\frac{\|A^{\frac{1}{4}}w\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w\|^2}-C_M^2\right)\leqslant 0. \tag{15}$$

在(14)式中取 τ 为 t, t 为 t_0, 得

$$\frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2} \geq \frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2}\exp[-C_M^2(t_0-t)] \geq \eta\exp(-C_M^2 t_0),$$

其中

$$\eta = \frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2}. \tag{16}$$

综合式(15)与(16),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2 + \|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2(\eta\exp(-C_M^2 t_0) - C_M^2) \leq 0.$$

$$\|A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2 \leq \|A^{\frac{-1}{4}}w(0)\|^2\exp[-\eta t_0\exp(-C_M^2 t_0) + C_M^2 t_0]. \tag{17}$$

为完成引理 2 的证明,考虑下面 2 种情形:

$$\|Q_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\| > \gamma\|P_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\| \tag{18}$$

和

$$\|Q_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\| \leq \gamma\|P_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|. \tag{19}$$

只需考虑式(18)的情形. 在此情形下有

$$\eta = \frac{\|A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2}{\|A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2} = \frac{\|P_N A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2 + \|Q_N A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2}{\|P_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2 + \|Q_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2} \geq$$

$$\frac{\|Q_N A^{\frac{1}{4}}w(t_0)\|^2}{(1+\frac{1}{\gamma})\|Q_N A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2} \geq \frac{\gamma}{1+\gamma}\lambda_{N+1}. \tag{20}$$

由式(17)和(20)式推出

$$\|A^{\frac{-1}{4}}w(t_0)\|^2 \leq \|A^{\frac{-1}{4}}w(0)\|^2\exp[-\frac{\gamma}{1+\gamma}\lambda_{N+1}t_0\exp[-C_M^2 t_0\exp(-C_M^2 t_0) + C_M^2 t_0]. \tag{21}$$

在(21)式中用 t 去替换 t_0,则(11)式得证. 利用(15)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2 \leq C_M^2\|A^{\frac{-1}{4}}w(t)\|^2, \tag{22}$$

对(22)式从 0 到 t 积分,(12)式得证. 证毕.

2　惯性流形

设 $b,l>0$ 是常数,定义从 $P_N D(A^{\frac{1}{4}}) \to Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 的 Lipschitz 函数集 $F = F_{b,l}^{1/4}$ 满足:

$$\begin{cases} \mathrm{supp}(\Phi) \subset \{p \in P_N D(A^{\frac{1}{4}}), \|A^{\frac{1}{4}}p\| \leq 2\rho\}, \\ \|A^{\frac{1}{4}}\Phi(p)\| \leq b, \forall p \in P_N D(A^{\frac{1}{4}}), \\ \|A^{\frac{1}{4}}(\Phi(p_1) - \Phi(p_2))\| \leq l\|A^{\frac{1}{4}}(p_1 - p_2)\|, \forall p_1,p_2 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}}). \end{cases}$$

令 $\mathrm{d}(\Phi_1,\Phi_2) = \sup\limits_{p\in P_N D(A^{\frac{1}{4}})}\|A^{\frac{1}{4}}(\Phi_1(p) - \Phi_2(p))\|$ 为 $F = F_{b,l}^{1/4}$ 的距离,对此距离 $F = F_{b,l}^{1/4}$ 是完备空间. 设 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$ 和 $p_0 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Ap = P_N F(p + \Phi(p)), p(0) = p_0 \tag{23}$$

的解 $p(t) = p(t;\Phi,p_0)$,据文献[12],方程

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Aq = Q_N F(p + \Phi(p)), \tag{24}$$

当 $Q_N F(p+\Phi(p)) \in L^\infty(R;H)$ 时,存在唯一解 $q = q(t;\Phi,p_0)$,且 $q = q(t;\Phi,p_0)$ 是从 R 到 $Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 的

连续有界映射. 特别地,$p_0 \in P_N(A^{\frac{1}{4}}) \to q(0;\Phi,p_0) \in Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 的函数与 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$ 有关,记 $T\Phi: p_0 \to q(0;\Phi,p_0)$,则有

$$T\Phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{At} Q_N F(p(t) + \Phi(p(t)))\mathrm{d}t = q(0;\Phi,p_0).$$

以下为本文主要结论:

定理1 设 $F_{b,l}^{1/4}(b > 0, l > 0)$ 是 Lipschitz 映射空间,$\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$,$\Phi: P_N D(A^{\frac{1}{4}}) \to Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 且 $0 < l < 1$,

$$\lambda_{N+1}^{1/2} - \lambda_N^{1/2} \geqslant K_1, \lambda_N^{1/2} \geqslant K_2, \tag{25}$$

$$K_1 = 2M_2(1 + l)l^{-1}, K_2 = 2M_2(6e^{\frac{-1}{2}} + l).$$

其中 $p_0 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,$q(0;\Phi,p_0) \in Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$ 分别是方程(23)和(24)存在的唯一连续解在 $t = 0$ 处的值. 则映射 $T: F_{b,l}^{1/4} \to F_{b,l}^{1/4}$ 在空间 $F_{b,l}^{1/4}$ 上是严格压缩的,并且 T 有唯一的不动点 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$,它的图 $M = \mathrm{graph}(\Phi)$ 将是非局部 Swift - Hohenborg 问题(7)的惯性流形.

定理2 设 $M = \mathrm{graph}(\Phi)$ 是 T 的不动点 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$ 的图,则存在 $t_0 > 0$,$\forall u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$,当 $t \geqslant t_0$ 时有

$$\mathrm{dist}(S(t)u_0, M) \leqslant \mathrm{dist}(u_0, M)\exp\left(-\frac{\ln 2}{2t_0}t\right),$$

其中 $t_0 = \min(\frac{\ln 2}{C_M^2}, \frac{T}{2})$,$C_M$ 由引理2给出.

首先给出引理3 ~ 引理7[11].

引理3 设 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$,则 $\mathrm{supp}(\Phi) \subset \{p \in P_N D(A^{\frac{1}{4}}), \| A^{\frac{1}{4}} p \| \leqslant 2\rho\}$.

引理4 设 $\Phi \in F_{b,l}^{1/4}$,$p_1, p_2 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,$u_i = p_i + \Phi(p_i)$,$i = 1,2$. 则存在常数 $M_1, M_2 > 0$,使得 $\| A^{\frac{-1}{4}} F(u_1) \| \leqslant M_1$,$\| A^{\frac{-1}{4}}(F(u_1) - F(u_2)) \| \leqslant M_2(1 + l) \| A^{\frac{1}{4}}(p_1 - p_2) \|$.

引理5 设 $p_0 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,则 $T\Phi(p_0) \in Q_N D(A^{\frac{1}{4}})$,$\| A^{\frac{1}{4}}(T\Phi(p_0)) \| \leqslant b_1$,其中 $b_1 = 6e^{\frac{-1}{2}} M_1 \lambda_{N+1}^{-1/2}$,当 λ_{N+1} 充分大时 $b_1 < b$.

引理6 设 $\sigma_N = (\lambda_{N+1} - \lambda_N) - M_2(1 + l)\lambda_N^{1/2} > 0$,$\forall \Phi \in F_{b,l}^{1/4}$,$p_{01}, p_{02} \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,则有

$$\| A^{\frac{1}{4}}(T\Phi(p_{01}) - T\Phi(p_{02})) \| \leqslant l_1 \| A^{\frac{1}{4}}(p_{01} - p_{02}) \|,$$

其中 $l_1 = M_2(1 + l)\lambda_{N+1}^{-1/2}[\frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \gamma_N \xi_N)^{-1}]e^{\frac{-1}{2}}\exp(\frac{\gamma_N \xi_N}{2})$,$\gamma_N = \frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}$,$\xi_N = 1 + M_2(1 + l)\lambda_N^{-1/2}$.

引理7 设 $\sigma_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N \xi_N = \lambda_{N+1}(1 - \gamma_N \xi_N) > 0$,$\forall \Phi_1, \Phi_2 \in F_{b,l}^{1/4}$ 和 $p_0 \in P_N D(A^{\frac{1}{4}})$,则 $\| A^{\frac{1}{4}}(T\Phi_1(p_0) - T\Phi_2(p_0)) \| \leqslant k_0 \mathrm{d}(\Phi_1, \Phi_2)$,$k_0 = M_2(6e^{\frac{-1}{2}}\lambda_{N+1}^{1/2} + \lambda_N^{-1/2} l_1)$.

引理8 设 $0 < l < 1$,且定理1中条件(25)成立,则有 $\sigma_N > 0$,$l_1 < l$,$k_0 < \frac{1}{2}$.

证明 由于 $\sigma_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N \xi_N = \lambda_{N+1}(1 - \gamma_N \xi_N) > 0$ 等价于

$$1 - \gamma_N \xi_N > 0. \tag{26}$$

找式(25)成立的一个充分条件,为此设(25)成立,则

$$l_1 = M_2(1 + l)\lambda_{N+1}^{-1/2}[\frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \gamma_N \xi N)^{-1}]e^{\frac{-1}{2}}\exp(\frac{\gamma_N \xi_N}{2}) \leqslant$$

$$M_2(1 + l)\lambda_{N+1}^{-1/2}[\frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \gamma_N \xi_N)^{-1}]. \tag{27}$$

要使 $l_1 < l$,只要

$$M_2(1+l)\lambda_{N+1}^{-1/2}\leqslant\frac{l}{2},\tag{28}$$

和

$$M_2(1+l)\lambda_{N+1}^{-1/2}\leqslant\frac{1}{2}(1-\gamma_N\xi_N),\tag{29}$$

而(28)又等价于

$$K_1\leqslant\lambda_{N+1}^{1/2},K_1=2M_2(1+l)l^{-1}.\tag{30}$$

如果(30)式成立,则(29)式等价于 $K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}\leqslant 1-\gamma_N\xi_N$ 或等价于

$$K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}-1+\gamma_N+M_2(1+l)\lambda_{N+1}^{-1/2}\lambda_N^{1/2}\leqslant 0.\tag{31}$$

$$\gamma_N^{1/2}+K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}\leqslant 1,\gamma_N+K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}\gamma_N^{1/2}\leqslant\gamma_N^{1/2},$$

$$K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}-1+\gamma_N+M_2(1+l)\lambda_{N+1}^{-1/2}\lambda_N^{1/2}\leqslant\gamma_N^{1/2}+K_1\lambda_{N+1}^{-1/2}-1\leqslant 0,$$

此表明式(31)成立. 因此由(25)推出 $\sigma_N>0$,(25)推出(30)成立,(30)推出(28),(31)推出(29),从(28)和(29)推出 $l_1<l$. 还需要证明 $k_0<\frac{1}{2}$,事实上,引理 7 知 $k_0=M_2(6e^{\frac{-1}{2}}\lambda_{N+1}^{-1/2}+\lambda_N^{-1/2}l_1)<\frac{1}{2}$,$l_1<l$,$\lambda_{N+1}^{1/2}\geqslant\lambda_N^{1/2}$,只要 $k_0<M_2(6e^{\frac{-1}{2}}+l)\lambda_N^{-1/2}<\frac{1}{2}$,利用(25)式上述不等式成立. 证毕.

定理 1 的证明　据引理 3 到引理 8,定理 1 成立,并且流形 $M=\text{graph}(\Phi)$ 满足:①M 是有限维的 Lipschitz 流形;②M 是正不变的,即 $t\geqslant 0$,$S(t)M\subset M$. 证毕.

定理 2 的证明　设 u 和 v 是方程(9)分别对应初值 $u_0,v_0\in V_1$ 的 2 个不同解,对方程(7)和(9)的解满足:对某常数 $M_0>0$,$\|u(t)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$\|v(t)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$t\in[0,T]$,$T>0$,$\gamma>0$,则 $\forall N$,式(10)或(11)成立. 由式(12)得

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|\leqslant 2\|A^{\frac{-1}{4}}(u(0)-v(0))\|,t<2t_0.$$

令 $\gamma=\frac{1}{8}$,$N>N_0$,$\lambda_{N_0+1}>\frac{\ln(2C_1)}{C_2t_0}$.

式(10),(11)式可写成

$$\|Q_NA^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|\leqslant\frac{1}{8}\|P_NA^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|,\tag{32}$$

或

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(u(t)-v(t))\|\leqslant\frac{1}{2}\|A^{\frac{-1}{4}}(u(0)-v(0))\|.\tag{33}$$

设 $\|u(0)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$\|v(0)\|_{V_1}\leqslant M_0$,$t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$,$B_p\subset D(A^{\frac{1}{4}})$ 是吸收集,解轨道是 $u(t)$,$\|A^{\frac{1}{4}}u(t)\|\leqslant\rho$,$t\in[0,+\infty]$. 令 $v(0)=v_0\in M$,$v_0=P_Nv_0+\Phi(P_Nv_0)$,使得 $\text{dist}(u_0,M)=\|A^{\frac{1}{4}}(u_0-v_0)\|$.

将 $S(t_1)u_0$,$S(t_1)v_0$,$t_0\leqslant t_1\leqslant 2t_0$,代入(32),(33)式得

$$\text{dist}(S(t_1)u_0,M)=\inf_{v\in M}\|A^{\frac{-1}{4}}(S(t_1)u_0-v)\|\leqslant$$

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(S(t_1)u_0-S(t_1)v_0)\|\leqslant\frac{1}{2}\|A^{\frac{-1}{4}}(u_0-v_0)\|=\frac{1}{2}\text{dist}(u_0,M).$$

若(33)式成立,令 $l=\frac{1}{8}$,$t_0\leqslant t_1\leqslant 2t_0$,锥性质有

$$\text{dist}(S(t_1)u_0,M)\leqslant\|A^{\frac{-1}{4}}(S(t_1)u_0)-(P_NS(t_1)v_0+\Phi(P_NS(t_1)v_0)))\|\leqslant$$

$$\|A^{\frac{-1}{4}}(Q_NS(t_1)u_0-\Phi(P_NS(t_1)v_0))\|\leqslant\frac{1}{8}\|P_NA^{\frac{-1}{4}}(S(t_1)u_0-S(t_1)v_0)\|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|A^{\frac{-1}{4}}(u_0-v_0)\|=\frac{1}{2}\text{dist}(u_0,M).$$

总之,$t_0 \leqslant t_1 \leqslant 2t_0$ 时恒有 $\mathrm{dist}(S(t_1)u_0,M) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{dist}(u_0,M)$.

由半群性质按 $t_0 \leqslant t_1 \leqslant 2t_0$ 的做法,可得

$$\mathrm{dist}(S(nt_1)u_0,M) \leqslant (\frac{1}{2})^n \mathrm{dist}(u_0,M) \leqslant \exp(-\frac{t}{t_1}\ln 2)\mathrm{dist}(u_0,M) \leqslant$$

$$\exp(-\frac{t}{2t_0}\ln 2)\mathrm{dist}(u_,M) \to 0(n \to \infty, t \geqslant t_0).$$

证毕.

3 结束语

本文中获得了在非线性正核 $G(r)$ 的有界性及光滑性条件下,非局部二维 Swift – Hohenberg 方程的惯性流形存在性的结果. 在有限维(即 N 维)惯性流形 M 上,可将无穷维动力系统化为有限维动力系统,有助于对无穷维动力系统所反应的物理机理的认识.

参考文献:

[1] SWIFT J,HOHENBERG P C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability[J]. Phys Rev,1977,A15:319-328.

[2] PECKMANN J,WAYNE C E. Propagating fronts and the center manifold theorem,commun[J]. Math Phys,1991,136:285-307.

[3] HILALI M F,METENS S,BORCKMANS P,et al. Pattern selection in the generalized Swift – Hohenberg equation[J]. Phys Rev,1995,E51:2046-2052.

[4] GLEBSKY L YU,LERMAN L M. On small stationary localized solutions for the generalized 1D Swift – Hohenberg equation [J]. Chaos,1995,5:424-431.

[5] MIELKE A,SCHNEIDER G. Attractors for modulation equations on unbounded domains:existence and comparison[J]. Nonlinearity,1995,8:734-768.

[6] HSIEH D Y. Elemental mechanisms of hydrodynamic instabilities[J]. Acta Mech Sin,1994,10:193-202.

[7] HSIEH D Y,TANG S Q,WANG X P. On hydrodynamic instabilities, chaos and phase transition[J]. Acta Mech Sin,1996,12:1-14.

[8] ROBERTS A J. Planform evolution in convection:An embedded center manifold[J]. J Aust Math Soc B Appl Math,1992,34:174-198.

[9] LIN Guo-guang,GAO Hong-jun,DUAN Jin-qiao,et al. Asymptotic dynamical difference between the nonlocal and local Swift – Hohenberg models[J]. J Math Phys,2000,41(4):2 077-2 089.

[10] TEMAM R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. New York:Springer Verlag,1988.

[11] LIN Guo-guang,JIANG Mu-rong. An inertial manifold of the generalized Ginzburg – Landau equations[C]//Proceedings of the conference on nonlinear partial differential equations and applications. World Scientific,1998.

[12] 戴正德,林国广. 关于耗散 Zakharov 系统吸引子一文的注记[J]. 云南大学学报:自然科学版,1993,15(3):214-221.

An inertial manifold of the 2D Swift – Hohenberg equation

LIN Guo-guang

(School of Mathematics and Statistics,Yunnan University,Kunming 650091,China)

Abstract: It is established for that an inertial manifold of the nonlocal 2D Swift – Hohenberg equation,under the boundaries and smoothness of nonlinear positive kernel.

Key words: local Swift – Hohenberg equation; nonlocal 2D Swift – Hohenberg equation; global solution; global attractor; inertial manifold