云南大学学报(自然科学版), 2008, 30(6): 553~558　　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

求解非线性等式和不等式问题的一种光滑化算法*

杨　柳, 陈艳萍, 童小娇
(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭　411105)

摘要: 给出了求解非线性等式和不等式问题的一种新算法. 用 Max 函数将不等式约束转变为等式约束, 建立了一个半光滑的无约束方程组系统, 并设计了一种光滑化 Gauss-Newton 算法求解该系统. 在适当条件下, 证明了此算法的全局和局部收敛性. 数值实验表明此方法的有效性.

关键词: 等式与不等式系统; 半光滑函数; 光滑化算法; 全局收敛性
中图分类号: O 221　　文献标识码: A　　文章编号: 0258-7971(2008)06-0553-06

考虑如下非线性等式与不等式问题的求解

$$\begin{cases} c_i(x) = 0, & i \in E = \{1, 2, \cdots, m_e\}, \\ c_i(x) \leqslant 0, & i \in I = \{m_e + 1, \cdots, m\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $c_i(x): R^n \to R$ 是连续可微的, $i = 1, \cdots, m$, 并且 $m \geqslant n$. 在全文中假定问题(1) 的解集非空.

非线性等式和不等式问题广泛出现于非线性最优化问题、互补问题、变分不等式问题以及工程计算等领域中. 许多研究工作者考虑了该问题的求解, 如: Pachenichnyi[1], Dianiel[2], Polyak[3] 等人讨论了该问题的牛顿算法、梯度算法; Dennis 在文献[4] 中首次给出了信赖域算法, 在一定条件下证明了算法的全局收敛性; Tong 在文献[5] 中考虑了该问题的信赖域算法, 引入松弛变量, 变不等式为等式和非负变量问题, 然后采用内点技术求解, 并证明了算法在较一般条件下的全局收敛性和二次收敛性.

本文将考虑一种光滑化算法来求解问题(1), 此算法的特点在于对(1) 中不等式的一种处理: 记 Max 函数为 $\max\{0, c_i(x)\}$, 则问题(1) 中的不等式可转化为一个半光滑的等式方程, 即: $\max\{0, c_i(x)\} = 0$, $i \in I$. 从而问题(1) 等价于以下半光滑方程组

$$F(x) = \begin{cases} c_i(x) = 0, & i \in E, \\ \max\{0, c_i(x)\} = 0, & i \in I. \end{cases} \tag{2}$$

在问题(2) 中, 由于 Max 函数是非光滑的, 所以不能用一般的求解光滑函数的算法来求解. 但是在非光滑函数中也有一些具有很好的性质, 如文献[6] 就给出了 Hilbert 空间中非光滑函数和次微分的一些性质, 并得到了一个复合最优化问题的最优性条件. 本文将针对与原问题等价的问题(2) 提出一种光滑化算法来求解问题(1).

本文中的记号如下: $\|\cdot\|$ 代表 2-范数, R_{++} 和 R_+ 分别表示集合

$$\{x > 0,\ x \in R\} \text{ 和 } \{x \geqslant 0,\ x \in R\}.$$

1　光滑逼近函数及其性质

本文采用文献[7] 中 Chen-Mangasarian 光滑化方法来构造函数 $\max\{0, c_i(x)\}$ 的光滑逼近函数

* 收稿日期: 2007-12-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671163, 60474070); 湖南省教育厅基金资助项目(06A069, 07A001, 06C824); 国家和湖南省重点学科建设项目资助.
作者简介: 杨　柳(1975-　), 女, 湖南人, 博士, 讲师, 主要从事最优化方法理论及其应用方面的研究.
通讯作者: 童小娇(1962-　), 女, 湖北人, 博士, 教授, 主要从事最优化方法理论及其应用方面的研究.

$p_i(x, u)$, 其中

$$p_i(x, u) = q(c_i(x), u), \qquad i \in I,$$

$$q(\omega, \mu) = \begin{cases} \varphi(\omega, |\mu|), & \mu \neq 0, \\ \max\{0, \omega\}, & \mu = 0. \end{cases}$$

取密度函数 $\rho(s) = \dfrac{e^{-s}}{(1+e^{-s})^2}$, 则

$$\varphi(\omega, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, \omega - \mu s\}\rho(s)\,ds = \mu\ln(1+e^{\frac{\omega}{\mu}}), (\omega, \mu) \in R \times R_{++},$$

从而

$$p_i(x, u) = \begin{cases} u\ln(1+e^{\frac{c_i(x)}{u}}), & u > 0, \\ \max\{0, c_i(x)\}, & u = 0. \end{cases} \tag{3}$$

因此构造问题(2) 的光滑化方程组如下: 记 $z = (x, u) \in R^n \times R_+$, 定义映射 $H: R^n \times R_+ \to R^m$ 为

$$H(z) := H(x, u) := \begin{pmatrix} c_E(x) \\ p(x, u) \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

其中 $c_E(x)$ 表示所有 $c_i(x), i \in E, p(x, u) = (p_{m_e+1}(x, u), \cdots, p_m(x, u))^{\mathrm{T}}$, $p_i(x, u)$ 为 $\max\{0, c_i(x)\}, i \in I$ 的光滑逼近函数.

显然 $H(x, u)$ 在任意 $z = (x, u) \in R^n \times R_{++}$ 处连续可微, 且在 $(x, 0)$ 处是连续的, 因此有 $H(x, 0) = F(x)$. 当 $u > 0$ 时, $H(x, u)$ 关于变量 x 的 Jacobian 矩阵为

$$\nabla_x H(x, u) = \begin{pmatrix} \nabla_x c_E(x) \\ \nabla_x p(x, u) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 $\nabla_x c_E(x)$ 是 $c_i(x) = 0, i \in E$ 的 Jacobian 矩阵,

$$\nabla_x p(x, u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_{m_e+1}(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial p_{m_e+1}(x, u)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial p_m(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial p_m(x, u)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

且

$$\frac{\partial p_i(x, u)}{\partial x_j} = \frac{e^{\frac{c_i(x)}{u}}}{1+e^{\frac{c_i(x)}{u}}} \cdot \frac{\partial c_i(x)}{\partial x_j}, \ i \in I, j = 1, \cdots, n.$$

考虑与问题(4) 相应的最小二乘问题

$$\min_x r(x, u) = \frac{1}{2} H(x, u)^T H(x, u). \tag{7}$$

当 $u > 0$ 时, 梯度为 $g(x, u) := \nabla_x r(x, u) = \nabla_x H(x, u)^{\mathrm{T}} H_x(x, u)$; Hessian 矩阵为 $\nabla_x^2 r(x, u) = G(x, u) + H(x, u)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 H(x, u)$, 其中 $G(x, u) := \nabla_x H(x, u)^{\mathrm{T}} \nabla_x H(x, u)$.

2 光滑化算法

下面给出求解问题(1) 的光滑化算法, 其主要思想来源于文献[8].

算法 **1**(光滑化 Gauss-Newton 算法)

初始步: 选取常数 $\delta \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$, $\gamma > 0$, 记 $z^0 = (x^0, u^0) \in R^n \times R_{++}$ 为初始点, 令 $\sigma_0 = 1$, $k := 0$;

第 1 步: 如果 $u^k = 0$, 则停止计算. 如果 $g(x^k, u^k) = 0$, 则令 $x^{k+1} = x^k$, 转第 4 步中(2).

第 2 步: 通过以下方程计算 $\Delta x^k \in R^n$:

$$(\nabla_x H(x^k, u^k))^{\mathrm{T}} (\nabla_x H(x^k, u^k)) \Delta x^k = -g(x^k, u^k). \tag{8}$$

第 3 步: 记 $u^{k+1}=\min\{\sigma_{k+1},\eta\}u^k$, 其中 $\sigma_{k+1}=\min\{\sigma_k,\|F(x^k+\Delta x^k)\|^2\}$. 如果

$$\|H(x^k+\Delta x^k,u^{k+1})\|\leqslant\eta\|H(x^k,u^k)\|,$$

则令 $x^{k+1}=x^k+\Delta x^k$, 转第 5 步. 否则转第 4 步.

第 4 步: (1) 记 $\lambda_k=\delta^k$ 是集合 $\{\delta^i \mid i=0,1,\cdots\}$ 中满足下述线搜索的最大值:

$$r(x^k+\delta^i\Delta x^k,u^k)\leqslant r(x^k,u^k)+\sigma\delta^i(g(x^k,u^k))^{\mathrm{T}}\Delta x^k. \tag{9}$$

令 $x^{k+1}:=x^k+\lambda_k\Delta x^k$.

(2) 如果 $\|g(x^{k+1},u^k)\|\leqslant\gamma u^k$, 则取 $u^{k+1}=\min\{\sigma_{k+1},\eta u^k\}$, 其中 $\sigma_{k+1}=\min\{\sigma_k,\|F(x^{k+1})\|^2\}$; 否则 $u^{k+1}=u^k$, $\sigma_{k+1}=\sigma_k$.

第 5 步: 令 $k=k+1$, 转第 1 步.

3　收敛性分析

下面考虑算法 1 的全局收敛性和局部收敛性. 首先给出一些常用的假设条件:

假定 1　水平集 $L(z^0)=\{z=(x,u)\in R^n\times R_+ \mid \|H(z)\|^2\leqslant\|H(z^0)\|^2\}$ 是有界的, 并且对任意 $(x,u)\in L(z^0)$, $\nabla_x c_E(x)$, $\nabla_x c_I(x)$ 一阶 Lipschitz 连续, 且 $c_E(x)$, $c_I(x)$, $\nabla_x c_E(x)$, $\nabla_x c_I(x)$ 是有界的.

由假定 1 可知对任意 x, $y\in L(z^0)$, 存在 $b_1, b_2, b_3, b_4, r_E, r_I>0$, 使得

$$\|c_E(x)\|\leqslant b_1,\quad \|c_I(x)\|\leqslant b_2,\quad \|\nabla_x c_E(x)\|\leqslant b_3,\quad \|\nabla_x c_I(x)\|\leqslant b_4,$$

$$\|\nabla_x c_E(x)-\nabla_x c_E(y)\|\leqslant r_E\|x-y\|,\quad \|\nabla_x c_I(x)-\nabla_x c_I(y)\|\leqslant r_I\|x-y\|.$$

为了得到算法的收敛性, 必须对光滑函数(3) 的性质做进一步的分析, 有如下结论:

引理 1　设假定 1 成立, 则光滑函数 $p_i(x,u)$ 在 $R^n\times R_{++}$ 上是二次连续可微的, 且

(1) $p_i(x,u)$ 在 $R^n\times R_+$ 上是强半光滑的;

(2) $p_i(x,u)$ 在 $R^n\times R$ 上是 Lipschitz 连续的;

(3) $$\lim_{x'\to x,\,u\to 0}p'_{x_j}(x',u)p_i(x',u)=\partial_{x_j}p_i(x,0)p_i(x,0),\ j=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

其中 $p'_{x_j}(x',u)$ 是函数 $p_i(x',u)$ 关于 x_j 的偏导数, $\partial_{x_j}p_i(x,0)$ 表示 $p_i(x,0)$ 关于 x_j 的 Clarke[9] 意义下的广义导数.

证明　由(3) 式可知当 $u>0$ 时, $p_i(x,u)$ 是二次连续可微的. 由密度函数 $\rho(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{(1+\mathrm{e}^{-s})^2}$, 所以 $\mathrm{supp}\,p(\rho)=R$, $\limsup\limits_{s\to\infty}\rho(s)\cdot\|s\|^3=0<\infty$. 因此由文献[10] 中命题 3.1(vii) 可知 $q(\omega,\mu)$ 在 R^2 上是强半光滑的. 又由假定 1 可知在点 $z=(u,x)\in R^n\times R_+$ 附近, $\dfrac{\partial c_i(z)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial c_i(x)}{\partial x_j}$, $i\in E$, $j=1,2,\cdots,n$ 关于 x 是 Lipschitz 连续的, 则表明 $c_i(x)$ 是强半光滑的[11], 从而可知复合函数 $p_i(x,u)=q(c_i(x),u)$ 在 $R^n\times R_+$ 上是强半光滑的.

为了证明结论(2), 假设 (x^1,u_1) and (x^2,u_2) 是 $R^n\times R$ 中任意 2 点. 则由光滑函数的构造过程可知

$$\begin{aligned}
&|p_i(x^1,u_1)-p_i(x^2,u_2)|=|q(c_i(x^1),u_1)-q(c_i(x^2),u_2)|=\\
&\quad\left|\int_{-\infty}^{\infty}\max\{0,c_i(x^1)-|u_1|s\}\rho(s)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{\infty}\max\{0,c_i(x^2)-|u_2|s\}\rho(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\
&\quad\int_{-\infty}^{\infty}|\max\{0,c_i(x^1)-|u_1|s\}-\max\{0,c_i(x^2)-|u_2|s\}|\rho(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\quad\int_{-\infty}^{\infty}|(c_i(x^1)-|u_1|s)-(c_i(x^2)-|u_2|s)|\rho(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\quad\int_{-\infty}^{\infty}|c_i(x^1)-c_i(x^2)|\rho(s)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{\infty}|u_1-u_2||s|\rho(s)\mathrm{d}s=\\
&\quad|c_i(x^1)-c_i(x^2)|+k|u_1-u_2|\leqslant b_2\|x^1-x^2\|+k|u_1-u_2|\leqslant
\end{aligned}$$

$$2\max\{b_2, k\}\ \|(x^1, u_1) - (x^2, u_2)\| = L\ \|(x^1, u_1) - (x^2, u_2)\|.$$

从而可知结论(2)成立.

为了证明结论(3), 若 $p_i(x, 0) = \max\{0, c_i(x)\} = 0$, 则有

$$|p'_{x_j}(x', u)p_i(x', u) - \partial_{x_j}p_i(x, 0)p_i(x, 0)| = |p'_{x_j}(x', u)p_i(x', u) - 0| =$$

$$|p_{x'_j}(x', u)| \cdot |p_i(x', u) - p_i(x, 0)| \leqslant \left|\frac{\partial c_i(x)}{\partial x_j}\right| \cdot |p_i(x', u) - p_i(x, 0)| < \varepsilon.$$

如果 $p_i(x, 0) = \max\{0, c_i(x)\} \neq 0$, 则有 $\max\{0, c_i(x)\} = c_i(x)$, 因此此时 $p_i(x, u)$ 在 $(x, 0)$ 是连续可微的. 从而可知结论(3)成立. 证毕.

引理 2 对任意 $z \in R^n \times R_{++}$, 如果 $\nabla_x c(x) = \begin{pmatrix} \nabla_x c_E(x) \\ \nabla_x c_I(x) \end{pmatrix}$ 的秩为 n, 则 $\nabla_x H(z)^T \nabla_x H(z)$ 是非奇异的.

证明 因为当 $u > 0$ 时,

$$\nabla_x H(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial c_{m_e}(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial c_{m_e}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial c_{m_e}(x)}{\partial x_n} \\ l_{m_e+1} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+1}(x)}{\partial x_1} & l_{m_e+1} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+1}(x)}{\partial x_2} & \cdots & l_{m_e+1} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+1}(x)}{\partial x_n} \\ l_{m_e+2} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+2}(x)}{\partial x_1} & l_{m_e+2} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+2}(x)}{\partial x_2} & \cdots & l_{m_e+2} \cdot \dfrac{\partial c_{m_e+2}(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_m \cdot \dfrac{\partial c_m(x)}{\partial x_1} & l_m \cdot \dfrac{\partial c_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & l_m \cdot \dfrac{\partial c_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

其中 $l_i = \dfrac{e^{\frac{c_i(x)}{u}}}{1 + e^{\frac{c_i(x)}{u}}} \in (0, 1), i \in I$, 从而可知 $\mathrm{rank}(\nabla_x H(z)) = \mathrm{rank}(\nabla_x c(x)) = n$, 所以 $\nabla_x H(z)^{\mathrm{T}} \nabla_x H(z)$ 是非奇异的. 证毕.

引理 3 设假定1成立且光滑函数为(3), 则 $H(z)$ 在任意 $z = (x, u) \in R^n \times R_+$ 处是强半光滑的.

证明 由引理1(1)可知对任意 $z \in R^n \times R_+$, $p_i(x, u), i \in I$ 是强半光滑的; 而由假定1可知 $\nabla_x c_E(x)$ 关于 x 是Lipschitz连续的, 从而可知 $c_i(z) = c_i(x), i \in E$ 在 z 处是强半光滑的[11]; 从而 $H(z)$ 的所有分量都是强半光滑的, 所以 $H(z)$ 在任意 $z = (x, u) \in R^n \times R_+$ 处是强半光滑的. 证毕.

考虑问题(7)中 $u = 0$ 的情形

$$\min_x r(x, 0) = \frac{1}{2}H(x, 0)^{\mathrm{T}} H(x, 0) = \frac{1}{2}F(x)^{\mathrm{T}} F(x), \tag{11}$$

易知 $r(x, 0)$ 关于 x 是连续可微的且梯度为 $\partial_x H(x, 0)^{\mathrm{T}} H(x, 0) := g(x, 0)$, 其中 $\partial_x H(x, 0)$ 是 $H(x, 0)$ 关于变量 x 的广义Jacobian矩阵.

引理 4 问题(7)中的目标函数 $r(x, u)$ 在 $(x, u) \in R^n \times R_+$ 上是连续可微的.

证明 只需证明 $\lim_{x' \to x, u \to 0} g(x', u) = g(x, 0)$. 事实上, 因为

$$\begin{aligned} \|g(x', u) - g(x, 0)\| = \ & \|\nabla_x H(x', u)^T H(x', u) - \partial_x H(x, 0)^{\mathrm{T}} H(x, 0)\| \leqslant \\ & \|\nabla c_E(x')\| \cdot \|c_E(x') - c_E(x)\| + \|\nabla c_E(x') - \nabla c_E(x)\| \cdot \|c_E(x)\| + \\ & \|\nabla_x p(x', u)p(x', u) - \partial_x p(x, 0)p(x, 0)\|, \end{aligned}$$

从而由假定1和引理1(3)可知结论成立. 证毕.

当 x^* 满足 $g(x^*, 0) = 0$ 时, 称它为问题(11) 的一个稳定点. 显然使(11) 获得全局最小值的点一定是一个稳定点. 类似于文献[8] 中定理 10 和定理 12 的证明过程, 可以得到以下全局收敛的结论.

定理 1　设假定 1 成立且光滑函数为(3), 记 $z^k := (x^k, u^k)$ 是由算法 1 产生的一个无穷迭代序列, 并假设 $\nabla c(x^k)$ 的秩为 n, 则(1) $u^k \downarrow 0$; (2) $\{x^k\}$ 是有界的; (3) $\lim_{k\to\infty} \|g(x^k, u^k)\| = 0$ 或者$\{r^k\} \downarrow 0$.

定理 2　设假定 1 成立且光滑函数为(3). 记 $\{(x^k, u^k)\}$ 是算法 1 产生的一个无穷迭代序列, 并假设 $\nabla c(x^k)$ 的秩为 n, 则

(1) $\{x^k\}$ 存在一个聚点 x^* 为(11) 的一个稳定点;

(2) $\{\|H(x^k, u^k)\|\}$ 收敛于 0 且$\{x^k\}$ 任意一个极限点都是(1) 的一个解.

接下来考虑算法 1 的局部收敛性.

定理 3　设假定 1 成立且光滑函数为(3). 记$\{(x^k, u^k)\}$ 是算法 1 产生的一个无穷迭代序列, x^* 是$\{x^k\}$ 的一个极限点, 并假设 $\nabla c(x^k)$ 的秩为 n. 若 $\partial_x H(x^*, 0)^{\mathrm{T}} \partial_x H(x^*, 0)$ 是非奇异的, 则$\{x^k\}$ 二阶收敛于 x^*.

证明　由定理 2 可知$\{x^k\}$ 的任意一个极限点 x^* 都是(1) 的一个解, 而且当 $k \to +\infty$ 时, $u^k \downarrow 0$, 并由算法 1 中 u^k 的迭代方法可知

$$u^k \leqslant \max\{1, u^0\} \|H(x^k, 0)\|^2 = O(\|H(x^k, 0) - H(x^*, 0)\|^2) = O(\|x^k - x^*\|^2),$$

其中利用了 $H(x, 0)$ 在 x^* 局部 Lipshcitz 连续性. 这表明当 k 充分大非常靠近 x^* 时, 若 $\partial_x H(x^*, 0)^{\mathrm{T}} \partial_x H(x^*, 0)$ 是非奇异的, 则

$$\begin{aligned}
&\|x^k + \Delta x^k - x^*\| = \|x^k - x^* - (G(x^k, u^k))^{-1} g(x^k, u^k)\| \leqslant \\
&\quad \|(G(x^k, u^k))^{-1}\| \cdot \|(\nabla_x H(x^k, u^k))^{\mathrm{T}}\| \cdot \|H(x^k, u^k) - \nabla_x H(x^k, u^k)(x^k - x^*)\| = \\
&\quad O(\|H(x^k, u^k) - H(x^*, 0) - \nabla_x H(x^k, u^k)(x^k - x^*)\|) = \\
&\quad O(\|x^k - x^*\|^2) + O(u^k) = O(\|x^k - x^*\|^2).
\end{aligned} \tag{12}$$

其中最后一个式子利用了 $H(z)$ 的强半光滑性质. 因此下面只须证明当 $k \to +\infty$ 时, 步长因子 $\lambda_k = 1$ 即可. 显然

$$\begin{aligned}
&\|H(x^{k+1}, u^{k+1})\| = \|H(x^{k+1}, u^{k+1}) - H(x^*, 0)\| = \\
&\quad O(\|x^{k+1} - x^*\|) + O(u^{k+1}) = O(\|x^k - x^*\|^2) + O(u^k) = \\
&\quad O(\|x^k - x^*\|^2) = O(\|H(x^k, u^k)\|^2),
\end{aligned}$$

其中最后一个式子利用了

$$\|x^k - x^*\| = O(\|H(x^k, u^k)\|). \tag{13}$$

这是因为由式(12), (10) 以及$\{\|(G(x^k, u^k))^{-1}(\nabla_x H(x^k, u^k)^{\mathrm{T}}\|\}$ 的有界性可知当 $k \to +\infty$ 时有

$$\begin{aligned}
&\|x^k - x^*\| \leqslant \|\Delta x^k\| + \|x^k + \Delta x^k - x^*\| = \\
&\quad \|\Delta x^k\| + O(\|x^k - x^*\|^2) \leqslant L_1 \|H(x^k, u^k)\| + O(\|x^k - x^*\|^2).
\end{aligned}$$

而由 H 的 Lipschitz 连续性可知 $\|H(x^k, u^k) - H(x^*, 0)\| \leqslant L_2 \|x^k - x^*\| + O(u^k)$, 从而式(13) 成立. 所以当 $k \to +\infty$ 时, 步长因子 $\lambda_k = 1$, 从而由式(12) 可知定理 3 成立. 证毕.

4　数值结果

下面给出算法 1 的数值实验结果. 程序用 Matlab 语言编写, 具体算例来源于文献[12]. 相关参数为: $\delta = 0.5$, $\sigma = 0.5 \times 10^{-4}$, $\eta = 0.95$, $\gamma = 0.5$, 终止条件为 $\|H(z)\| \leqslant 10^{-5}$. 相应的数值结果见表 1, 其中 $r(x_0)$ 和 $r(x^*)$ 分别表示在初始点和最终迭代点 x^* 处函数 $r(x, u)$ 的值. 并且本文还将算法 1 与文献[5] 中的信赖域算法的数值结果进行了比较(见表 2), 其中违反度 $\varepsilon_1 = \|c_E(x)\| + \|c_I^{(+)}(x)\|$.

表 1 数值结果

Tab. 1 Numerical results

问题	初始点	函数计算次数	迭代次数	最优解	初始 $r(x_0)$	最终 $r(x^*)$
HS14	(1,1)	5	3	(0.822 9,0.911 5)	0.062 5	5.193 1e-007
	(-1,-1)	9	5	(-1.822 1,-0.411 1)	4.062 5	9.827 9e-008
HS22	(2,2)	21	11	(0.895 5,1.008 9)	8	4.924 9e-013
	(1.5,1.5)	23	12	(0.929 1,0.965 3)	1.562 5	2.032 1e-013
HS35	(-2,-2,-2)	23	12	(0.105 6,0.105 6,0.105 6)	12	1.999 5e-013
	(-1,-1,-1)	17	9	(0.075 6,0.075 6,0.075 6)	3	8.068 7e-011
HS63	(0,0,0)	15	8	(1.434 8,0.820 7,4.718 9)	3.761 0e+003	2.238 3e-014
	(2,2,2)	11	6	(4.752 1,0.559 1,1.450 8)	173	5.067 7e-013

表 2 数值结果的比较

Tab. 2 Compare numerical results

问题	m 的个数	初始点	迭代次数	违反度 ε_1	文献[5]迭代次数	文献[5]违反度 ε_1
HS14	2	(1,1)	8	2.923 7e-008	43	1.104 0e-007
		(0,0)	7	2.162 3e-008	34	1.188 5e-006
		(-1,-1)	9	3.370 7e-008	21	3.224 1e-006
HS32	5	(0.1,0.7,0.2)	1	4.539 9e-007	6	1.538 6e-006
		(0,0,0)	6	3.827 9e-008	6	3.305 0e-007
		(-1,-1,-1)	10	2.307 6e-008	8	1.182 8e-010

算例中所选的问题都是非线性最优化问题的约束条件,从而得到的解都是原最优化问题的可行解. 从数值结果可以看出本文所使用的方法是非常有效的,能较快地算出约束条件对应的可行解.

因此本文给出了求解非线性等式和不等式问题的一种光滑化算法,该方法用半光滑函数将不等式转化为等式方程组,再利用光滑化技巧进行求解,在整个过程中只需求解 1 个线性方程组,保留了传统的牛顿类算法的结构且具有很好的收敛性.

参考文献:

[1] PSHENICHNYI B N. Newton's method for the solution of systems of equalities and inequalities[J]. Math Notes Acad Sci Ussr, 1970, 8: 827-830.

[2] DANIEL J W. Newton's method for nonlinear inequalities[J]. Numer Math, 1973, 40: 381-387.

[3] POLYAK B T. Gradient methods for solving equations and inequations[J]. UDSSR Comput Math, 1964, 4: 17-32.

[4] DENNIS J E, EL-ALEM M, WILLIAMSON K. A trust-region approach to nonlinear systems of equalities and inequalities[J]. SIAM J Optim, 1999, 9(2): 291-315.

[5] 童小娇,周叔子. 非线性等式与不等式问题的信赖域算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2001, 1: 53-62.

[6] 邵远夫,李成林. Hilbert 空间中函数和的次微分规划及应用[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(6): 475-478.

[7] CHEN C, MANGASARIAN O L. A class of smoothing functions for nonlinearand mixed complementarity problems[J]. Comput Optim Appl, 1996, 5: 97-138.

[8] XIU Nai-hua, ZHANG Jian-zhong. A smoothing Gauss-Newton method for the generalized HLCP[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 129: 195-208.

(下转第 563 页)

Research on the effect of R- peak in ECG wave by smoothing filtering

HUANG Jin-wen[1,2], WANG Wei-lian[2]
(1. Department of Physics, Baoshan Teacher's College, Baoshan 678000, China;
2. School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: By using smoothing filter, the high frequency noise in signal can be reduced. But it also makes the R- peaks distorting, and then affecting its amplitude. In this work, the tolerance of R- peak in different situation, such as different sampling and different interval of QRS wave, after smoothing filtering was analyzed and discussed. The theory analysis and experiment results were provided. It will be useful for ECG signal processing.

Key words: smoothing filtering; ECG; R- peak; effect

* *

(上接第 558 页)

[9] CLAKE F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York: John Wiley and Sons, 1983.

[10] QI L, SUN D. Smoothing functions and smoothing newton method for complementarity andvariational inequalitiey problems[J]. Journal of Optimization Theoryand Applications, 2002, 113: 121-147.

[11] QI L, SUN J. A Nonsmooth version of Newton's method[J]. Math Program, 1993, 58: 353-367.

[12] HOCK W, SCHITTKOWSKI K. Test examples fornonlinear programming codes[M]. Lecture Notes in Econom and Math Systems 187, Berlin: Springer- Verlag, 1981.

A smoothing method for solving the nonlinear system of equalities and inequalities

YANG Liu, CHEN Yan-ping, TONG Xiao-jiao
(School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: It is concerned with a new algorithm for solving the nonlinear system of equalities and inequalities. By using the so- called max function, the inequalities are transfered into equalities and a system of semismooth equations is set. Then a smoothing Gauss- Newton method is introduced for solving the reformulated system. The global and local convergence are studied under suitable conditions. Numerical examples are given to show that the new approach is effective.

Key words: system of equalities and inequalities; semismooth function; smoothing method; global convergence.