云南大学学报 (自然科学版), 2008, 30 (6): 549~ 552 CN 53- 1045/N ISSN 0258- 7971
Journal of Yunnan University

关于行(列)反对称矩阵的Schur分解*

袁晖坪
(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 提出了行(列)转置矩阵与行(列)反对称矩阵的概念, 研究了它们的性质, 获得了一些新的结果, 给出了行(列)反对称矩阵的Schur分解的公式, 它们可极大地减少行(列)对称矩阵的Schur分解的计算量与存储量, 并且不会丧失数值精度.

关键词: 行(列)转置矩阵; 行(列)反对称矩阵; 正规矩阵; Schur分解
中图分类号: O 151.21 文献标识码: A 文章编号: 0258- 7971(2008)06- 0549- 04

很多实际问题的数学模型, 都可转化成线性问题, 进而利用矩阵解决之. 许多应用领域(如信息、控制、工程等)中大量出现的都是关于行、列或对角线的对称图像(矩阵), 人们研究矩阵, 一般都从主对角线方向考虑问题(如对角化, 正定性等); 至于次对角线方向和行(列)对称的情形常被忽略, 但事实上不是主对角线方向的矩阵理论(如行(列)对称性[1,2], 次对称性与次正定性[3], 非Hermite正定性[4], 等)同样是有用的. 矩阵的Schur分解是线性代数中矩阵的基本分解方法之一, 他们在统计学、系统论、控制论、最优化问题、线性方程组和特征值问题、工程领域的应用问题等方面都有应用[5~10]. 线性代数讨论了矩阵的转置和对称性, 对其他的对称性较少涉及. 本文进一步研究了行(列)转置矩阵与行(列)反对称矩阵的性质, 给出了行(列)反对称矩阵的Schur分解与复正规阵分解的公式, 减少了行(列)反对称矩阵的Schur分解与复正规分解的计算量与存储量, 这无论是对于矩阵理论或实际应用都是很有意义的. 如用计算机对具有某种对称性质的图像进行采样, 所得到的数据矩阵具有行或列的某种对称性, 在对数据矩阵进行某种分解时, 若矩阵阶数很大, 则计算量很大而效率很低, 若能找到矩阵中某一部分与其它部分间的一些定量关系, 那么就可以大量节省计算量与储存量. 本文用 $J_n = J$ 表次对角线元素全为1, 其余元素全为0的 n 阶方阵; A^T, A^S 与 A^H 分别表矩阵 A 的转置、次转置与共轭转置阵; $C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 复矩阵集. 显然: $J^T = J$, $J^2 = I$, $J^{-1} = J$[3].

定义 **1** 设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$, 则称

$$A^R = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \text{与} A^C = \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{mn} & a_{m,n-1} & \cdots & a_{m2} & a_{m1} \end{pmatrix}$$

分别为矩阵 A 的行转置矩阵与列转置矩阵, 并记为 A^R 与 A^C. 特别,

若 $A^R = A$ ($A^C = A$), 则称 A 为行(列)对称矩阵.

若 $A^R = -A$ ($A^C = -A$), 则称 A 为行(列)反对称矩阵.

命题 **1**[9] 设 $A \in C^{m\times n}$, 则

(1) $A^R = J_m A$, $A^C = A J_n$;

* 收稿日期: 2008- 02- 20
基金项目: 重庆市自然科学基金资助项目(CSTS 2005 BB 0243); 重庆市教委科技项目基金资助项目(KJ0707023).
作者简介: 袁晖坪(1958-), 男, 重庆人, 教授, 主要从事矩阵论方面的研究.

(2) $(A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{C}}, (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{R}}$;

(3) $(A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{S}} = (A^{\mathrm{S}})^{\mathrm{C}}, (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{S}} = (A^{\mathrm{S}})^{\mathrm{R}}$;

(4) $(A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} = (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{R}}$;

(5) $(A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} = A, (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}} = A$;

(6) $(kA)^{\mathrm{R}} = kA^{\mathrm{R}}, (kA)^{\mathrm{C}} = kA^{\mathrm{C}}$($k$ 为常数);

(7) 当 $B \in C^{m\times n}$ 时, 有$(A \pm B)^{\mathrm{R}} = A^{\mathrm{R}} \pm B^{\mathrm{R}}, (A \pm B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \pm B^{\mathrm{C}}$;

(8) 当 $B \in C^{n\times k}$ 时, 有$(AB)^{\mathrm{R}} = A^{\mathrm{R}}B, (AB)^{\mathrm{C}} = AB^{\mathrm{C}}$.

显然: 行对称矩阵只有 2 种类型: $\begin{pmatrix} B \\ -JB \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} B \\ O \\ -JB \end{pmatrix}$(其中 $B \in C^{m\times n}$, $O \in C^{1\times n}$); 列对称矩阵只有 2 种类型: $(B \quad -JB)$ 或 $(B \quad O \quad -BJ)$(其中 $B \in C^{m\times n}$, $O \in C^{m\times 1}$).

定理 1(Schur 分解) 已知行反对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} B \\ -J_nB \end{pmatrix} \in C^{2n\times n}$, 设 $B \in C_{n\times n}$ 的 Schur 分解为 $B = U^{\mathrm{H}}LU$, 其中 U 为酉矩阵, L 为上三角阵且其对角元为 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U & -UJ_n \\ U & UJ_n \end{pmatrix}$, 使 $PAU^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}L \\ 0 \end{pmatrix}$.

证明 $P^{\mathrm{H}}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U^{\mathrm{H}} & U^{\mathrm{H}} \\ -J_nU^{\mathrm{H}} & J_nU^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & -UJ_n \\ U & UJ_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & O \\ O & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, 所以 P 为酉矩阵, 且 $PAU^{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U & -UJ_n \\ U & UJ_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ -J_nB \end{pmatrix}U^{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2UBU^{\mathrm{H}} \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}L \\ O \end{pmatrix}$. 证毕.

定理 2(Schur 分解) 已知列反对称矩阵 $A = (B \quad -BJ_n) \in C^{n\times 2n}$, 设 $B \in C^{n\times n}$ 的 Schur 分解为 $B = U^{\mathrm{H}}LU$, 其中 U 为酉矩阵, L 为上三角阵且其对角元为 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U^{\mathrm{H}} & U^{\mathrm{H}} \\ -J_nU^{\mathrm{H}} & J_nU^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$, 使 $UAP = (\sqrt{2}L \quad O)$.

定理 2 的证明与定理 1 类似, 因此从略.

定理 3 已知行反对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} B \\ O \\ -J_nB \end{pmatrix} \in C^{(2n+1)\times n}$, 设 $B \in C^{n\times n}$ 的 Schur 分解为 $B = U^{\mathrm{H}}LU$, 其中 U 为酉矩阵, L 为上三角阵且其对角元为 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U & 0 & -UJ_n \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ U & 0 & UJ_n \end{pmatrix}$, 使 $PAU^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}L \\ O \end{pmatrix}$.

证明 $P^{\mathrm{H}}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U^{\mathrm{H}} & 0 & U^{\mathrm{H}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -J_nU^{\mathrm{H}} & 0 & J_nU^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 & -UJ_n \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ U & 0 & UJ_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & 0 & O \\ 0 & 2 & 0 \\ O & 0 & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n+1}$, 所以 P 为酉矩阵, 且 $PAU^{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U & 0 & -UJ_n \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ U & 0 & UJ_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ O \\ -J_nB \end{pmatrix}U^{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2UBU^{\mathrm{H}} \\ O \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}L \\ O \end{pmatrix}$. 证毕.

定理 4 已知列反对称矩阵 $A = (B \quad O \quad -BJ_n) \in C^{n\times(2n+1)}$, 设 $B \in C^{n\times n}$ 的 Schur 分解为 $B =$

$U^{H}LU$, 其中 U 为酉矩阵, L 为上三角阵且其对角元为 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}U^{H} & 0 & U^{H}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -J_nU^{H} & 0 & J_nU^{H}\end{pmatrix}$, 使 $U^{H}AP=(\sqrt{2}L\quad O)$.

定理 4 的证明与定理 3 类似, 因此从略.

定理 5　已知列反对称矩阵 $A=(B\quad -BJ_n)\in C_{n\times 2n}$, 设 B 为 Hermite 矩阵且 $B=QDQ^{H}$, 其中 D 为实对角阵, 对角元为 B 的特征值, Q 为酉阵, 则存在酉阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q & Q\\ -J_nQ & J_nQ\end{pmatrix}$, 使 $Q^{H}AP=(\sqrt{2}D\quad O)$.

证明　因为 $P^{H}P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q^{H} & -Q^{H}J_n\\ Q^{H} & Q^{H}J_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & Q\\ -J_nQ & J_nQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^{H}Q & Q\\ O & Q^{H}Q\end{pmatrix}=I_{2n}$, 所以 P 为酉矩阵, 且 $Q^{H}AP=\frac{1}{\sqrt{2}}Q^{H}(B\quad -BJ_n)\begin{pmatrix}Q & Q\\ -J_nQ & J_nQ\end{pmatrix}=(\sqrt{2}Q^{H}BQ\quad O)=(\sqrt{2}D\quad O)$. 证毕.

定理 6　已知行反对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}B\\ -J_nB\end{pmatrix}\in C^{2n\times n}$, 设 B 为 Hermite 矩阵且 $B=QDQ^{H}$, 其中 D 为实对角阵, 对角元为 B 的特征值, Q 为酉阵, 则存在酉阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q^{H} & -Q^{H}J_n\\ Q^{H} & Q^{H}J_n\end{pmatrix}$, 使 $PAQ=\begin{pmatrix}\sqrt{2}D\\ O\end{pmatrix}$.

定理 6 的证明与定理 5 类似, 因此从略.

定理 7　已知列反对称矩阵 $A=(B\quad O\quad -BJ_n)\in C^{n\times(2n+1)}$, 设 B 为 Hermite 矩阵且 $B=QDQ^{H}$, 其中 D 为实对角阵, 对角元为 B 的特征值, Q 为酉阵, 则存在酉阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q & O & Q\\ O & \sqrt{2} & O\\ -J_nQ & O & J_nQ\end{pmatrix}$, 使 $Q^{H}AP=(\sqrt{2}D\quad O)$.

证明　$P^{H}P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q^{H} & O & -Q^{H}J_n\\ O & \sqrt{2} & O\\ Q^{H} & O & Q^{H}J_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & O & Q\\ O & \sqrt{2} & O\\ -J_nQ & O & J_nQ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2I_n & O & O\\ O & 2 & O\\ O & O & 2I_n\end{pmatrix}=I_{2n+1}$, 所以 P 为酉矩阵, 且 $Q^{H}AP=\frac{1}{\sqrt{2}}Q^{H}(B\quad O\quad -BJ_n)\begin{pmatrix}Q & O & Q\\ O & \sqrt{2} & O\\ -J_nQ & O & J_nQ\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2Q^{H}BQ\quad O\quad O)=(\sqrt{2}D\quad O)$. 证毕.

定理 8　已知行反对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}B\\ O\\ -J_nB\end{pmatrix}\in C^{(2n+1)\times n}$, 设 B 为 Hermite 矩阵且 $B=QDQ^{H}$, 其中 D 为实对角阵, 对角元为 B 的特征值, Q 为酉阵, 则存在酉阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q^{H} & O & -Q^{H}J_n\\ O & \sqrt{2} & O\\ Q^{H} & O & Q^{H}J_n\end{pmatrix}$, 使 $PAQ=\begin{pmatrix}\sqrt{2}D\\ O\end{pmatrix}$.

定理 8 的证明与定理 7 类似, 因此从略.

定理 9(复正规阵分解)　已知行反对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}B\\ -J_nB\end{pmatrix}\in C^{2n\times n}$, 设 B 为复正规阵且 $B=Q\Lambda Q^{H}$,

其中 Q 为酉阵, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^{n\times n}$, 且 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q^H & -Q^H J_n \\ Q^H & Q^H J_n \end{pmatrix}$, 使 $Q_1 A Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

证明 $Q_1 Q_1^H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^H & -Q^H J_n \\ Q^H & Q^H J_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -J_n Q & J_n Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^H Q & O \\ O & Q^H Q \end{pmatrix} = I_{2n}$, 所以 Q 为酉矩阵, 且 $Q_1 A Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q^H & -Q^H J_n \\ Q^H & Q^H J_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ -J_n B \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} Q^H B Q \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Lambda \\ O \end{pmatrix}$. 证毕.

定理 **10**(复正规阵分解) 已知列反对称矩阵 $A = (B \quad -BJ_n) \in C^{n\times 2n}$, 设 B 为复正规阵且 $B = Q\Lambda Q^H$, 其中 Q 为酉阵, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^{n\times n}$, 且 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 B 的特征值, 则存在酉矩阵 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -J_n Q & J_n Q \end{pmatrix}$, 使 $Q^H A Q_1 = (\sqrt{2}\Lambda \quad O)$.

定理 10 的证明与定理 9 类似, 因此从略.

参考文献:

[1] 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 科学通报, 2000, 45(14): 1 560-1 562.

[2] 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(9): 842-849.

[3] 袁晖坪. 次亚正定矩阵[J]. 数学杂志, 2001, 21(1): 29-32.

[4] 李耀堂, 刘庆兵. 非 Hermite 正定矩阵与正稳定矩阵[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2002, 24(3): 164-166.

[5] COHEN L. Time-frequency analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.

[6] 孟庆松. 基于系统矩阵有序实 Schur 分解的模型降阶[J]. 信息技术, 2006(6): 58-61.

[7] 袁晖坪. 行(列)对称矩阵的 Schur 分解与正规阵分解[J]. 山东大学学报: 理学版, 2007, 42(10): 123-126.

[8] 迟彬, 叶庆凯. 用奇异值分解方法计算具有重特征值矩阵的特征矢量[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(3): 233-238.

[9] 袁晖坪. 行(列)反对称矩阵的奇异值分解[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2007, 29(5): 449-452.

[10] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 2 版. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

One Schur factorization of row (column) antisymmetric matrices

YUAN Hui-ping

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The concept of row (column) transposed matrix and row (column) antisymmetric matrix are introduced and analyzed, which leads to some new results. In addition, the formula of the Schur factorization of row (column) antisymmetric matrix is given, which makes calculation easier and accurate.

Key words: row (column) transposed matrix; row (column) antisymmetric matrix; normal matrix; Schur factorization