云南大学学报（自然科学版），2008，30（1）：7～10　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

局部凸空间中的 Arrow－Barankin－Blackwell 定理的推广*

黄　辉，江传军，鲁大景
（云南大学 数学系，云南 昆明　650091）

摘要：讨论了正真有效点集合在有效点集合中的稠密性．介绍了局部凸空间中的 quasi－Bishop－Phelps 锥并研究了其性质．推广 Arrow－Barankin－Blackwell 定理从有界集到无界集．

关键词：局部凸空间；quasi－Bishop－Phelps 锥；稠密性
中图分类号：O 177.92　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2008)01－0007－04

设 X 是局部凸空间，$A \subset X$ 是凸尖锥，它导出 X 中的一个偏序．设 $A \subset X$ 是非空集，A 关于 C 的全体有效点集合记为 $E(A,C)$，A 的全体正真有效点集合记为 $Pos(A,C)$．

向量优化中的一个重要问题是研究 $Pos(A,C)$ 在 $E(A,C)$ 中的稠密性．1953 年，Arrow，Barankin 和 Blackwell[1] 证明了：如果 R^n 装备自然序并且 A 是 R^n 的紧凸子集，则 A 的正真有效点集合在有效点集合中稠密．这一结果在向量优化和数理经济中有重要意义．在过去的几十年中，一些作者对 Arrow，Barankin 和 Blackwell 的稠密性定理作了推广．Britran 和 Magnanti[2] 证明了如果 R^n 上的偏序由任意的闭凸尖锥给出这一定理仍成立．Radner[3]，Majumdar[4] 和 Peleg[5] 分别在无穷维赋范空间 l^∞，L^∞ 和 $l^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 上获得了稠密性结果．Borwein[6] 证明了在由具有弱紧基的闭凸锥导出偏序的赋范空间中稠密性定理成立．Jahn[7] 证明了在由 Bishop－Phelps 锥产生偏序的赋范空间中 Arrow－Barankin－Blackwell 定理对弱紧凸集成立．1993 年，Ferro[8] 又进一步把 Arrow－Barankin－Blackwell 定理推广成如下形式：

(i) 设 X 是赋范空间，$A \subset X$ 是紧凸集，$C \subset X$ 是有基的闭凸锥．则 $Pos(A,C)$ 在 $E(A,C)$ 中稠密．

2003 年，Ng 和 Zheng[9] 在赋范空间中建立了下面一般形式的 Arrow－Barankin－Blackwellg 定理：

(ii) 设 X 是赋范空间，$A \subset X$ 是弱紧凸集，$C \subset X$ 是有基的 quasi－Bishop－Phelps 锥．则 $Pos(A,C)$ 在 $E(A,C)$ 中稠密．

关于 $Pos(A,C)$ 在 $E(A,C)$ 的稠密性，目前仍有下面的公开问题尚待解决．

公开问题：设 X 是赋范空间，$A \subset X$ 是弱紧凸集，$C \subset X$ 是有基的闭凸锥．问 $Pos(A,C)$ 是否在 $E(A,C)$ 中稠密？

在本文中，我们减弱 A 的有界性条件，首先推广由 Ng 和 Zheng[9] 介绍的 quasi－Bishop－Phelps 锥从赋范空间到局部凸空间．接下来证明了在局部凸空间中，若 A 是 C－网紧凸集，则(A) 成立；若 A 是 C－网弱紧凸集，则(B) 也成立．值得注意的是 C－网紧凸集不必是有界的，甚至是局部紧的，需要指出的是我们的证明不依赖于找到一个紧凸集 D 使得 $A = D + C$．

设 X 是局部凸拓扑向量空间，$A \subset X$ 是非空集．$C \subset X$ 是凸尖锥并导出 X 中的一个偏序：$x, y \in X$，$x \leqslant cy$ 当且仅当 $y - x \in C$．X 的对偶空间记为 X^*．C 的对偶锥用 C^+ 表示，即

$$C^+ = \{f \in X^* \mid f(x) \geqslant 0, \forall x \in C\}.$$

C^+ 的严格正泛函全体构成的集合记为 C^{+i}，即

$$C^{+i} = \{f \in X^* \mid f(x) > 0, \forall x \in C \setminus \{0\}\}.$$

凸子集 Θ 称为 C 的一个基，若

* 收稿日期：2007－02－05
基金项目：云南省教育厅基金资助项目(K1050497)；云南大学基金资助项目(K1059140)；国家自然科学基金资助项目(10761012)．
作者简介：黄　辉(1974－　)，男，广东人，副教授，博士，主要从事非光滑分析和向量优化方面的研究．

$$C = \mathrm{cone}(\Theta) = \{t\theta \mid t \geqslant 0, \theta \in \Theta\}, \text{且 } 0 \notin \mathrm{cl}(\Theta).$$

显然,若 C 有基,则 C 是尖锥.

A 关于序锥 C 的全体有效点集合记为 $E(A,C)$,即 $x \in E(A,C)$ 当且仅当 $x \in A$,且

$$(A - x) \cap - C = \{0\}.$$

A 关于 C 的全体正真有效点集合记为 $Pos(A,C)$,即 $\bar{x} \in Pos(A,C)$ 当且仅当 $\bar{x} \in A$,且存在 $f \in C^{+i}$ 使得

$$f(\bar{x} = \min\{f(x) \mid x \in A\}.$$

已知且容易验证,$Pos(A,C) \subset E(A,C)$.有关有效点的性质可参考文献[10].

1 主要结果

设 X 是赋范空间,$C \subset X$ 是闭凸集,称 C 是 Bishop - Phelps 锥,若存在 $f \in X^* \setminus \{0\}$ 使得

$$C = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant f(x)\}.$$

已知 C 可表达成 Bishop - Phelps 锥当且仅当 C 有有界基[1].为推广 Bishop - Phelps 锥,Ng 和 Zheng[9] 引入了下面的概念:闭凸锥 $C \subset X$ 称为是 quasi - Bishop - Phelps 锥,若存在紧集 $G \subset X$ 使得

$$C \subset \{x \in X \mid \|x\| \leqslant \sup\{f(x) \mid f \in G\}\}.$$

我们推广这个概念到局部凸空间.

定义 1 设 X 是局部凸空间,闭凸锥 $C \subset X$ 称为是 quasi - Bishop - Phelps 锥,若对于 X 上的任意一个连续半范 p,都存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X^*$ 使得

$$C \subset \{x \in X \mid p(x) \leqslant \max\{f_i(x) \mid i = 1,2,\cdots,n\}\}. \tag{1}$$

命题 1 设 X 是局部凸空间,$C \subset X$ 是闭凸尖锥,则下面的叙述等价:

(i) C 是 quasi - Bishop - Phelps 锥;

(ii) 任取网 $\{c_\alpha\} \subset C$, $c_\alpha \xrightarrow{w} 0$ 当且仅当 $c_\alpha \to 0$;

(iii) 任取 X 上的连续半范 p, $0 \notin \omega - \mathrm{cl}(U_p)$,其中 $U_p = \{x \in C \mid p(x) = 1\}$.

证明 (i)⇒(ii).假设 $\{c_\alpha\} \subset C$ 并且 $c_\alpha \xrightarrow{w} 0$.任取 X 中 0 点的一个邻域 V,因为 X 是局部凸空间,所以存在 0 点的均衡凸邻域 W 使得 $W \subset V$.令 $p_W(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tW\}$, $\forall x \in X$.则 p_W 是 X 上的连续半范.根据(i)和(1)知 $p_W(c_\alpha) \to 0$.因此存在 α_0,使得当 $\alpha \succeq \alpha_0$ 时,有 $p_W(c_\alpha) < 1$,这说明当 $\alpha \succeq \alpha_0$ 时,有 $c_\alpha \in W \subset V$,因此 $c_\alpha \to 0$.

(ii)⇒(iii).反证.倘若存在 X 上的一个连续半范 p,使得 $0 \in \omega - \mathrm{cl}(U_p)$,则存在网 $\{c_\alpha\} \subset U_p$,使得 $c_\alpha \xrightarrow{w} 0$,根据(ii)有 $c_\alpha \to 0$.因为 p 是连续半范,所以 $0 = p(0) = \lim\limits_\alpha p(c_\alpha) = 1$.矛盾.

(iii)⇒(i).由(iii)存在 $g_1, g_2, \cdots, g_n \in X^*$,使得

$$U_p \cap \{x \in X \mid |g_1(x)| < 1, |g_2(x)| < 1, \cdots, |g_n(x)| < 1\} = \varnothing,$$

故

$$1 \leqslant \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|, \cdots, |g_n(x)|\}, \forall x \in U_p.$$

从而任取满足 $p(y) \neq 0$ 的 $y \in C$,都有

$$y \in \{x \in X \mid p(x) \leqslant \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|, \cdots |g_n(x)|\}\}. \tag{2}$$

显然,当 $y \in C$ 且 $p(y) = 0$ 时,(2)也成立,故

$$C \subset \{x \in X \mid p(x) \leqslant \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|, \cdots, |g_n(x)|\}\}.$$

证毕.

注 1 下面的推出关系显然成立:C - 网紧 ⇒ C - 网弱紧,反之未必成立.

定义 2 设 X 是局部凸空间,$C \subset X$ 是闭凸锥,$A \subset X$.集合 A 被称为:

(i) C - 网弱紧集,若对于任意的网 $\{x_\alpha\} \subset A$,存在子网 $\{x_{\alpha\beta}\} \subset \{x_\alpha\}$ 和网 $\{c_\beta\} \subset C$,使得 $\{x_{\alpha\beta}\} \subset A$,并且 $\{x_{\alpha\beta} - c_\beta\}$ 弱收敛于 A 中的某一点;

(ii) C - 网紧集,若对于任意的网 $\{x_\alpha\} \subset A$,存在子网 $\{x_{\alpha\beta}\} \subset \{x_\alpha\}$ 和网 $\{c_\beta\} \subset C$,使得 $\{x_{\alpha\beta} - c_\beta\} \subset$

A,并且$\{x_{\alpha_\beta}-c_\beta\}$ 收敛于 A 中的某一点.

引理 1[9]　设 X 是局部凸空间,$C,K\subset X$ 是凸尖锥且$C\setminus\{0\}\subset \mathrm{int}(K)$,$A\subset K$ 是凸子集.则 $E(A,K)\subset Pos(A,C)$.

定理 1　设 X 是局部凸空间,$C\subset X$ 是有基的闭凸锥,$A\subset X$ 是C - 网弱紧凸集,$\bar a\in E(A,C)$.则存在网$\{a_W\}\subset Pos(A,C)$,$a_W\xrightarrow{w}\bar a$,网$\{c_W\}\subset C$ 和网$\{z_W\}\subset X$,$z_W\to 0$ 使得

$$a_W+c_W=\bar a+z_W.$$

因此,$E(A,C)\subset \mathrm{cl}^{\,w}(Pos(A,C))$.

证明　设 Θ 是C 的基,则 $0\notin \mathrm{cl}(\Theta)$.根据分离定理[1],存在 $f\in X^*$ 使得

$$r=\inf\{f(\theta)\mid \theta\in\Theta\}>0.$$

令 $U=\{x\in X\mid |f(x)|<0.5r\}$.则 U 是X 中 0 点的开凸邻域.令 $N(0)$ 表示 X 中 0 点的所有邻域,再令 $N_0=\{V\in N(0)\mid V$ 是U 的凸子集$\}$.显然,任取 $V\in N_0$

$$\inf\{f(x)\mid x\in\Theta+V\}\geqslant 0.5r.$$

这表明 $0\notin \mathrm{cl}(\Theta+V)$,令 $C_V=\mathrm{cone}(\Theta+V)$,则 C_V 是凸尖锥且$\Theta+V$ 是C_V 的一个基.令 $A_V=(\bar a-\mathrm{cl}(V_V))\cap A$.根据下确界的定义,存在网$\{x_\alpha\}\subset A_V$,使得

$$\lim_\alpha f(x_\alpha)=\inf\{f(x)\mid x\in A_V\}.\tag{3}$$

因为 A 是C - 网弱紧集,所以存在子网$\{x_{\alpha\beta}\}\subset A$,网$\{c_\beta\}\subset C$ 和$\bar z\in A$,使得$\{x_{\alpha\beta}-c_\beta\}\subset A$,且 $x_{\alpha\beta}-c_\beta\xrightarrow{w}\bar z$.因为 $c_\beta\in C\subset \mathrm{cl}(C_V)$,所以

$$x_{\alpha\beta}-c_\beta\in\bar a-\mathrm{cl}(V_V)-C\subset\bar a-\mathrm{cl}(V_V).$$

因为 $\bar a-\mathrm{cl}(C_V)$ 是闭凸集,而局部凸空间中的闭凸集都是弱闭集,所以 $\bar z\in(\bar a-\mathrm{cl}(C_V))\cap A$.由(3) 得

$$f(\bar z)=\lim_\beta f(x_{\alpha\beta}-c_\beta)\leqslant\lim_\beta f(x_{\alpha\beta})=\inf\{f(x)\mid x\in A_V\},$$

即

$$f(\bar z)=\inf\{f(x)\mid x\in A_V\}.$$

由上式知 $\bar z\in Pos(A_V,C_V)$.由 $\mathrm{Pos}(A_V,C_V)\subset E(A_V,C_V)$ 知 $E(A_V,C_V)\neq\varnothing$.取 $b_V\in E(A_V,C_V)\subset E(A,C_V)$.从 $b_V\in A_V\subset a-\mathrm{cl}(C_V)$ 得 $b_V-\bar a\in-\mathrm{cl}(C_V)$,所以存在 $\lambda_V\geqslant 0,\theta_V\in\Theta,x_V\in V,y_V\in V$,使得

$$b_V-\bar a=-\lambda_V(\theta_V+x_V)+y_V.\tag{4}$$

因为 A 是C - 网弱紧集,所以存在子网$\{b_{V_W}\}\subset\{b_V\}$,$\{c_W\}\subset C$ 和点$a_0\in A$,使得$\{b_{V_W}-c_W\}\subset A$,且$\{b_{V_W}-c_W\}$ 弱收敛于 a_0.根据引理 1,$b_{V_W}\in E(A,C_{V_W})\subset Pos(A,C)$,因此必有 $c_W=0$.从而 $b_{V_W}\xrightarrow{w}a_0$.不失一般性,我们可假设$\{f(b_{V_W})\}$ 是有界的数网.根据(4) 知

$$f(b_{V_W}-\bar a)=-\lambda_{V_W}f(\theta_{V_W}+x_{V_W})+f(y_{V_W})\leqslant-\lambda_{V_W}\frac{r}{2}+\frac{r}{2},$$

故$\{\lambda_{V_W}\}$ 是有界的数网.显然 $-\lambda_{V_W}x_{V_W}+y_{V_W}\to 0$.根据(4) 知

$$-\lambda_{V_W}\theta_{V_W}=b_{V_W}-\bar a+\lambda_{V_W}x_{V_W}-y_{V_W}\xrightarrow{w}a_0-\bar a\in-C.$$

由 $\bar a\in E(A,C)$ 知 $a_0=\bar a$.令 $a_W=b_{V_W},c_W=\lambda_{V_W}\theta_{V_W},z_W=-\lambda_{V_W}x_{V_W}+y_{V_W}$.则

$$a_W+c_W=\bar a+z_W,$$

且 $a_W\xrightarrow{w}\bar a$,$z_W\to 0$.证毕.

定理 2　设 X 是局部凸空间,$C\subset X$ 是有基的 quasi - Bishop - Phelps 锥,$A\subset X$ 是C - 网弱紧凸集.则 $E(A,C)\subset \mathrm{cl}(Pos(A,C))$.

证明　任取$\bar a\in E(A,C)$.根据定理1,存在网$\{a_W\}\subset Pos(A,C)$,$a_W\xrightarrow{w}a$,网$\{c_W\}\subset C$ 和网$\{z_W\}$

$\subset X, z_W \to 0$,使得

$$a_W + c_W = \bar{a} + z_W,$$

故 $c_W \xrightarrow{w} 0$.因为 C 是 quasi - Bishop - Phelps 锥,根据命题1知 $c_W \to 0$,从而 $a_W \to \bar{a}$.证毕.

定理3 设 X 是局部凸空间,$C \subset X$ 是有基的闭凸锥,$A \subset X$ 是 C - 网紧凸集.则 $E(A,C) \subset \mathrm{cl}(Pos(A,C))$.

证明 任取 $\bar{a} \in E(A,C)$.根据定理1,存在网$\{a_W\} \subset Pos(A,C)$,使得 $a_W \xrightarrow{w} \bar{a}$.注意到在定理1的证明过程中,若 A 是 C - 网紧凸集, 则必有 $a_W \to \bar{a}$.证毕.

注2 设 X 是局部凸空间,$C \subset X$ 是有基的闭凸锥.令 $A = C$,则 A 是 C - 网紧凸集.根据定理3,$E(A,C) \subset \mathrm{cl}(Pos(A,C))$ 据我们所知,以前的所有稠密性结果都不能直接应用于这个简单的例子.

注3 显然,若 A 是紧凸集,则 A 是 C - 网紧凸集.若 A 是弱紧凸集,则 A 是 C - 网弱紧凸集.因此 Ferro[8] 的结果(A) 和 Ng 和 Zheng[9] 的结果(B) 分别是我们的定理2和定理3的特例.

参考文献:

[1] ARROWK J,BARANKIN E W,BLACKWELL D. Admissible points of convex sets,contribution to the theory of games[M].Princeton,New Jersey:Princeton University Press,1953.

[2] BRITRAN G R,MAGNANTI T L. The structure of admissible points with respect to cone dominance[J].J Optim Theory Appl,1979,29(2):573-614.

[3] RADNER R. A note on maximal points of convex sets in l^∞,5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability[M].California:University of California Press,1967.

[4] MAJUMDAR M. Some general theorems on efficient prices with an infinite-dimensional commodity space[J].J Economic Theory,1972,5(4):1-13.

[5] PELEG B. Effciency prices for optimal consumption plans,part 2[J].Israel J Math,1971,9(7):222-234.

[6] BORWEIN J. The geometry of Pareto efficiency over cones[J].Math Operations forshung und Statistik,Series Optimization,1980,11(8):235-248.

[7] JAHN J. A generalization of a theorem of Arrow,Barankin,and Blackwell[J].SLAM J Control Optim ,1978,34(10):87-92.

[8] FERRO F. General form of the arrow-barankin-blackwell theorem in normed spaces and -case[J].J Optim Theory Appl,1993,79(3):127-138.

[9] NG K F,ZHENG X Y. On the density of positive proper efficient points in a normed space[J].J Optim Theory Appl,2003,119(6):105-122.

[10] 黄辉,侯慧娣,张燕.局部凸空间中双重扰动的超有效点的稳定性(英文)[J].云南大学学报:自然科学版,2001,23(6):409-412.

[11] DAUER J P,GALLAGHER R J. Positive proper efficient points and related cone results in vector optimization theory[J].SIAM J Control Optim,1990,28(4):158-172.

Generalization of the Arrow-Barankin-Blackwell theorem in a locally convex space

HUANG Hui, JIANG Chuan-jun, LU Da-jing

(Department of Mathematics,Yunnan University,Kunming 650091,China)

Abstract: The density of the set of positive proper efficient points in the set of efficient points is discussed. Quasi-Bishop-Phelps cone in a locally convex space is introduced,and its property is studied. Generalizations of the Arrow-Barankin-Blackwell Theorem from a bounded set to an unbounded set are given.

Key words: locally convex space;quasi-Bishop-Phelps cone;density