云南大学学报（自然科学版），2008，30（1）：1～6　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

高校教育收费问题的微分方程模型与宏观调控分析*

化存才
（云南师范大学 数学学院，云南 昆明　650092）

摘要： 首先，依据“教育成本分担”的收费理论，在适当的假设下，提出了描述高校教育收费问题的 2 个基本微分方程模型；其次，通过对基本模型的定性分析，得出高校保持或者稳定其教育收费的几个条件；最后，通过对 2 个基本模型在 3 种情形下的几个特殊模型进行分析，给出关于高校教育收费和招生规模宏观调控的一些新的结论和建议．此外，还提出了 3 种扩展的微分方程模型．

关键词： 高校教育收费；微分方程模型；教育成本分担；宏观调控
中图分类号： O 29　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0258－7971(2008)01－0001－06

1999 年，中国的高等教育收费政策开始全面实施．高等教育收费是关系到国家、高等学校和受教育者及其家庭利益的大事．如何合理地解决高等教育收费问题，解决贫困生的学费支付问题，并且协调高等教育发展、人才培养和教育公平之间的关系，避免突出社会矛盾问题的出现是当今中国面临的社会难题之一．多年来，已有相当多的教育理论界学者从教育经济学，社会学和法学等角度出发对此进行了有益的探讨，并提出了一些相应的对策[1,2]．

对于高等教育收费及其相关问题，近年来有部分学者通过数学模型进行了分析，如文献[3]归纳总结了已有的个人投资教育成本与获得收益的计算方法，文献[4]用系统的模型方法研究了高校中的公平与效率问题，对“高校收费如何保证个人受教育的公平性并提高教育效率”进行了实例分析，文献[5]通过构建反映高收入和低阶层需求曲线的现行高校收费定价模型，并借助于几何图形分析了保障低收入阶层进入高校机会的可行性．最近，文献[6]则从就业与招生的关系出发提出了几个关于高校毕业生就业率和招生规模的微分方程和时滞微分方程模型．然而，至今为止，在描述和解决关于高等学校教育收费及其相关的招生规模调控的问题上，还没有文献引入过数学模型．

在本文中，我们的主要目的是提出关于高等校教育收费的 2 个微分方程模型，并且进一步研究高校教育收费和招生规模的宏观调控问题．

1　高校教育收费的 2 个基本微分方程模型

按照 1986 年美国纽约大学校长 D. Bruce Johnstone 提出的“教育成本分担”理论，高校的教育成本要由政府、社会和受教育者个人分担[1]．

实际上，高校的教育收费只与受教育者个人分担的教育成本有关．按照教育收费的补充性和承受性原则[8]，我们认为高校教育收费的主要影响因素是收费标准（它通过受教育者个人分担的教育成本体现）和贫困生的无支付能力（会拖欠学费）．现以此为基础，以收费年为单位，我们设高校的招生人数 N 为连续变量，高校的教育收费为 $R(N)$，人均分担的教育成本为 $\gamma(N)$，贫困生人均未支付的费用为 $p(N)$，它们都

---

* 收稿日期：2007－03－19
基金项目：云南省引进高层次人才工作经费资助（2003）；云南省自然科学基金资助项目（2005A0026M）；教育部春晖计划项目资助（2003－云南项目 14）．
作者简介：化存才（1964－　），男，云南人，教授，博士，硕士生导师，主要从事微分方程和实际问题的数学模型方面的研究．

是招生人数的函数.因为 $\gamma(N)$ 和 $p(N)$ 满足下列条件:当 $\gamma(N)$ 增大时,有 $R(N)$ 增加;当 $p(N)$ 增大时,有 $R(N)$ 减少,所以,我们可假设 $R(N)$ 的变化率与 $\gamma(N)$ 成正线性相关,而与 $p(N)$ 成负线性相关,于是,我们就得到了如下描述高校教育收费问题的微分方程模型(Ⅰ)

$$R' = \delta\gamma(N) - \sigma p(N), \tag{1}$$

其中 $\delta > 0, \sigma > 0$ 是比例系数.

由于高校贫困生的人均未支付费用 $p(N)$ 会随受教育者个人所分担的人均教育成本 $\gamma(N)$ 的增加而增加,故我们又有 $p(N) = g(\gamma(N))$,其中 $g(\gamma)$ 是单调增加的函数,$g'(\gamma) \geqslant 0$ 表示增长率.此时,我们进一步得到如下关于高校教育收费问题的微分方程模型(Ⅱ)

$$R' = \delta\gamma(N) - \sigma g(\gamma(N)). \tag{2}$$

进一步,如果假设由 $R(N)$ 去确定 $\gamma(N)$ 和 $p(N)$,那么我们分别有 $\gamma(N) = f(R(N))$ 与 $p(N) = h(R(N))$,其中 $f(R)$ 和 $h(R)$ 都是单调增加的函数,且可设 $f'(R) \geqslant 0, h'(R) \geqslant 0$.此时,我们得到如下高校教育收费问题的微分方程模型(Ⅲ)

$$R' = \delta f(R) - \sigma h(R). \tag{3}$$

同理,我们还可得到与(2) 相应的描述高校教育收费问题的微分方程模型(Ⅳ)

$$R' = \delta f(R) - \sigma g(f(R)). \tag{4}$$

如果将模型(3) 中的 $N, R, f(R)$ 和 $h(R)$ 分别视为时间,人口数量,绝对繁殖率和死亡率的话,那么(3) 所描述的正好是人口自由发展的微分方程模型[7],不同的函数形式表示了不同的人口发展状况.因为在人口的发展模型中,死亡率和繁殖率是没有直接联系的,所以,对于这里的高校教育收费问题而言,(2) 和(4) 就是本文所提出的主要控制方程模型.

2 高校教育收费基本模型的定性分析

在本节中,我们主要通过定性分析(2) 和(4) 去寻求解决高校教育收费问题的方案.

从模型(2) 可知,高校教育收费为常数的充分必要条件是

$$\delta\gamma(N) = \sigma g(\gamma(N)). \tag{5}$$

这表明,高校保持其教育收费不变的充分必要条件是要在个人分担的人均教育成本和贫困生的人均未支付费用 $g(\gamma(N))$ 之间进行均衡.为了实现这种均衡,必须要求方程(5) 存在正根 N_0,从而高校的招生人数 N_0 和个人分担的人均教育成本 $\gamma_0 = \gamma(N_0)$ 应该是确定的.

目前,我国将个人分担的教育成本比例的上限定为 25%[6],而实际上高校中贫困生的比例已超过 30%,这是一种失衡现象,客观原因是高等教育成本难于核算,容易使收费标准超过个人分担的教育成本比例的上限,或者通过收费而补偿部分政府投入[8].因此,在高校扩大招生规模的条件下,从政策措施上增加政府的教育经费投入,优惠鼓励和吸引社会捐资办学,以助学贷款,奖学金,勤工助学等形式解决贫困生的支付能力等都是实现均衡,解决问题的方案.

进一步,根据函数极值判别法,我们还有高校保持教育收费不变的如下充分条件:

(1) 当 $\gamma'(N_0) > 0, 0 < g'(\gamma_0) < \dfrac{\delta}{\sigma}$ 时,有 $R'(N_0) = 0, R''(N_0) > 0$,高校的教育收费达到极小值.这说明:在个人分担的人均教育成本 $\gamma(N)$ 增加的条件下,只要把贫困生人均未支付费用的增长率 $g'(\gamma)$ 控制在一定的限度内,就可以保持高校的极小收费 $R(N_0)$ 不变.

(2) 当 $\gamma'(N_0) < 0, g'(\gamma_0) > \dfrac{\delta}{\sigma}$ 时,有 $R'(N_0) = 0, R''(N_0) > 0$,高校教育收费达到极小值.这说明,如果贫困生的人均未支付费用的增长率超过了一个度$\dfrac{\delta}{\sigma}$,那么只有通过降低个人分担的人均教育成本 $\gamma(N)$,才能保持高校的极小收费 $R(N_0)$ 不变.

(3) 当 $\gamma'(N_0) < 0, 0 < g'(\gamma_0) < \dfrac{\delta}{\sigma}$ 时,有 $R'(N_0) = 0, R''(N_0) < 0$,高校的教育收费达到极大值. 这说明,在个人分担的人均教育成本 $\gamma(N)$ 减少,贫困生的人均未支付费用的增长率在一定的限度 $\dfrac{\delta}{\sigma}$ 内时,高校可以保持其极大收费 $R(N_0)$ 不变.

(4) 在条件 $\gamma'(N_0) > 0, g'(\gamma_0) > \dfrac{\delta}{\sigma}$ 下,$\gamma(N)$ 单调增加,$g'(\gamma)$ 也较大,高校的教育收费达到极大值. 这种情况相当于高收费,会出现部分贫困生因为无支付能力而拖欠较多的学费,或者失学的现象,因此,在解决现实的教育收费问题时应当尽力避免.

从模型(4) 可知,高校的教育收费 $R(N)$ 为常数的充分必要条件是

$$\delta f(R) = \sigma f(f(R)). \tag{6}$$

这是另一种均衡,它要求(6) 存在正根 R_0,也就有 $\gamma_0 = f(R_0)$. 因为 R_0 是(4) 的平衡点,所以,根据稳定性判别法[9],我们有关于教育收费 R_0 的如下稳定性结论:

(5) 当 $0 < g'(\gamma_0) < \dfrac{\delta}{\sigma}, f'(R_0) > 0$ 时,R_0 是模型(4) 的稳定平衡点. 这说明,在个人分担的人均教育成本 $\gamma = f(R)$ 增加的条件下,只有贫困生人均未支付费用的增长率在一定的限度 $\dfrac{\delta}{\sigma}$ 内,才会保持高校的教育收费 R_0 稳定不变.

(6) 当 $g'(\gamma_0) > \dfrac{\delta}{\sigma}, f'(R_0) < 0$ 时,R_0 也是模型(4) 的稳定平衡点. 这说明,如果贫困生的人均未支付费用的增长率超过一个度 $\dfrac{\delta}{\sigma}$,那么,只有通过降低个人分担的人均教育成本,才能保持高校的教育收费 R_0 稳定不变.

(7) 在其它条件下,高校的教育收费 R_0 都是不稳定的.

3　几个特殊模型与宏观调控分析

在本节中,我们转入分析几个特殊函数形式下的高校教育收费基本模型(2) 和(4),给出关于教育收费和招生规模的宏观调控问题的一些新结论和建议.

设在免费教育($\gamma = 0$) 时,招生人数为 n;而在收费教育时,政府规定的个人分担的人均教育成本为 γ_M,高校招生人数为 $M > n$. 我们分 3 种情况进行讨论.

3.1　个人分担的人均教育成本随招生人数增加而增加的情况　为简便计,在个人分担的人均教育成本随招生人数增加而增加的条件下,我们在模型(2) 中设 $\gamma(N) = a + bN$ 和 $g(\gamma) = g_0\gamma$ 为线性函数. 于是我们有 $\gamma(N) = b(-n + N)$,其中 $b = \dfrac{\gamma_M}{M - n} > 0$. 代入(2) 后,我们得到如下教育收费模型

$$R'(N) = b(\delta - \sigma g_0)(-n + N). \tag{7}$$

可见,当 $N > n$ 时,保持高校教育收费不变的均衡条件是 $\delta = \sigma g_0$;又由 $0 < \gamma(N) \leqslant \gamma_M$ 知,$n < N \leqslant M$,因此高校的招生人数规模可以在政府规定的范围内扩大. 在非均衡条件下,当 $g_0 < \dfrac{\delta}{\sigma}, N > n$(或者 $g_0 > \dfrac{\delta}{\sigma}, N > n$) 时,有 $R' > 0$(或者 $R' < 0$). 这表明:在高校扩大招生规模时,只有贫困生人均未支付费用的增长率较小(或者较大),才可考虑调高(或者调低) 教育收费.

积分(7),我们有高校的教育收费是在招生人数的 2 次函数

$$R(N) = \frac{1}{2} b(\delta - \sigma g_0)(-n + N)^2. \tag{8}$$

可见,按照(8) 去调整教育收费时将会偏高.

如果在模型(2) 中改设 $g(\gamma) = g_0\gamma^2$ 为二次函数,那么易知高校的教育收费为正的招生人数规模为

$$n < N \leqslant n + \frac{3\delta(M - n)}{2g_0\gamma_M} . \tag{9}$$

可见,当政府规定分担的人均教育成本较低($\gamma_M \to 0$)时,有利于高校扩大自主招生规模.

下面,我们再从模型(4)出发进行定性分析.假设 $\gamma = f(R) = c + \mathrm{d}R$ 为线性函数,$g(\gamma) = g_0\gamma^{1+T}$ 为幂函数,其中 $T > 0$.由于在免费教育时,有 $R = 0, \gamma = 0$;而在收费教育时,如果政府规定的教育收费为 R_0 时,个人分担的人均教育成本为 γ_0,那么我们有 $\gamma = \mathrm{d}R, g(\gamma) = g_0 d^{1+T}R^{1+T}$,其中 $d = \frac{\gamma_0}{R_0} > 0$.代入(4)后,我们得到如下的教育收费模型

$$R' = \delta \mathrm{d}R - \sigma g_0 d^{1+T}R^{1+T}. \tag{10}$$

模型(10)存在不稳定平衡点 $R_1 = 0$(它对应于免费)和稳定平衡点 $R_2 = \frac{1}{d}\sqrt[T]{\frac{\delta}{\sigma g_0}}$(它对应于稳定收费).特别地,当取 $T = 1$ 时,(10)是1个 Logistic 模型,此时有$\frac{R_2}{R_0} = \frac{\delta}{\sigma g_0\gamma_0}$.因此,当 $0 < \gamma_0 < \frac{\delta}{\sigma g_0}$ 时,有 $R_2 > R_0$,这说明,当个人分担的人均教育成本在一定限度内时,高校的稳定教育收费才会提高;当 $\gamma_0 > \frac{\delta}{\sigma g_0}$ 时,有 $R_2 < R_0$,这说明,当个人分担的人均教育成本超过一个度时,会因出现部分学生拖欠学费的现象而使高校的稳定教育收费降低.

3.2 个人分担的人均教育成本随招生人数增加而减少的情况 在个人分担的人均教育成本随招生人数增加而减少的条件下,我们在模型(2)中假设 $\gamma(N) = \frac{b}{N}$ 和$g(\gamma) = g_0\gamma$.由前面所设,我们有 $\gamma(N) = \gamma_M \frac{M}{N}$.代入(2)后,得到如下教育收费模型

$$R'(N) = (\delta - \sigma g_0)\frac{M\gamma_M}{N} . \tag{11}$$

积分(11)得教育收费与招生人数呈对数关系

$$R(N) = (\delta - \sigma g_0)M\gamma_M \ln\frac{N}{n} . \tag{12}$$

因 $\ln\frac{N}{n} = o(N) = o(N^2)(N \to \infty)$,故按照(12)去确定的收费较(8)低,而且高校的教育收费可随招生规模的扩大而缓慢增长,再由 $0 < \gamma(N) \leqslant \gamma_M$ 知,$N \geqslant M$.可见,高校的招生规模可以超过政府的规定,并且收费增长得较慢,这是一种值得推广的教育收费与扩招模式.

如果在模型(2)中改设 $g(\gamma) = g_0\gamma^2$,那么易知高校保持教育收费增长的招生人数规模为

$$N \geqslant \frac{\sigma g_0\gamma_M M}{\delta} , \tag{13}$$

而高校的教育收费为

$$R(N) = \delta M_{\gamma_M}\ln\frac{N}{n} - \sigma g_0 M^2\gamma_M^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) . \tag{14}$$

当 $N \to \infty$ 时,高校的教育收费为正的近似招生人数规模是

$$N \geqslant n\exp\left[\frac{\sigma g_0}{\delta n}M\gamma_M\right] . \tag{15}$$

(15)表明,高校的招生必须达到一定规模时,才不至于出现办学亏损的结果.

3.3 个人分担的人均教育成本是招生人数的有界函数的情况 在分担的人均教育成本是招生人数的有界函数的条件下,综合考虑前面的两种情况,我们在模型(2)中假设 $\gamma(N) = \frac{bN + c}{1 + N}$ 和 $g(\gamma) = g_0\gamma$.同样,由前面所设,我们有单调有界函数 $\gamma(N) = \frac{b(-n + N)}{1 + N}$,其中 $b = \frac{\gamma_M(1 + M)}{M - n} > 0$.代入(2)后,得到如下教育收费模型

$$R'(N) = \frac{\delta b(-n+N)}{1+N} - \frac{\sigma g_0 b(-n+N)}{1+N}. \tag{16}$$

积分(16) 得教育收费与招生人数呈对数关系

$$R(N) = (\delta - \sigma g_0) b\left[N - n - (n+1)\ln\frac{N+1}{n+1}\right]. \tag{17}$$

如果在模型(2) 中改设 $g(\gamma) = g_0\gamma^2$,那么易知当 $\delta < \sigma g_0 b$ 时,高校保持其教育收费增长的招生人数规模为

$$n < N \leqslant \frac{\sigma g_0 bn + \delta}{\sigma g_0 b - \delta}. \tag{18}$$

因此,在条件 $\delta < \sigma g_0 b$ 下,高校应限制扩大招生的规模.

最后,我们再在模型(4) 中假设 $\gamma = f(R) = \frac{\mathrm{d}R}{1+R}$,$g(\gamma) = g_0\gamma^2$.如果政府规定的教育收费为 R_0 时,个人分担的人均教育成本为 γ_0,那么我们有 $\gamma = d_1 R$,其中 $d_1 = \frac{1+R_0}{R_0}\gamma_0$.代入(4)后,我们得到如下的教育收费的 Logistic 模型

$$R' = \delta d_1 R - \sigma g_0 d_1^2 R^2. \tag{19}$$

易知,当 $\delta < \delta g_0 d_1$ 时,方程(19) 有不稳定的教育收费

$$R = \frac{\delta R_0}{\sigma R_0(1+R_0) - \delta R_0}. \tag{20}$$

4 模型的扩展

在上节中,我们给出的几个特殊函数形式下的高校教育收费模型各有自己的优缺点,如果扬长避短,可考虑将它们以适当的方式组合在一起,那么就可以得到许多扩展的模型.

4.1 混合微分方程模型 设想高校考虑按照不同的招生人数规模而采用相应的教育收费模型,那么,我们可将 2 种或者 2 种以上模型混合连接在一起,以便按人数规模调整高校教育收费方式,如

$$\begin{cases} R'_1(N) = b(\delta - \sigma g_0)(-n+N), \\ R'_2(N) = (\delta - \sigma g_0)\dfrac{M_{\gamma_M}}{N}, \\ R_1(N_0) = 0, R_2(N_1) = R_1(N_1). \end{cases} \tag{21}$$

4.2 二维耦合微分方程模型 设想不同(地区) 的高校都采用同样的收费模型,而它们之间有某种相互影响,那么,我们可将 2 种以上模型综合在一起,如主要考虑 2 次非线性耦合的 Logistic 模型

$$\begin{cases} R'_1 = \delta d_1 R_1 - \sigma g_0 d_1^2 R_2^2, \\ R'_2 = \delta d_1 R_2 - \sigma g_0 d_1^2 R_1^2, \\ R_1(N_0) = R_{10}, R_2(N_0) = R_{20}. \end{cases} \tag{22}$$

进而可以研究不同(地区) 高校招生人数规模与收费标准的同步问题等.

4.3 三维微分方程模型 由于经济社会发展的不平衡,不同(地区) 的高校采用的收费模型不同,这样就导致了教育收费与招生人数规模的不公平现象.为促进教育公平,构建和谐社会,就需要政府在两者之间进行宏观调控.如果引入随招生人数变化的调控变量 $a(N)$,考虑在 2 种不同模型之间进行线性反馈调控,那么,我们可得三维微分方程模型.例如

$$\begin{cases} R'_1 = \delta d_1 R_1 - \sigma g_0 a, \\ R'_2 = \delta d_2 R_2 - \sigma g_0 d_2^2 R_1^2, \\ a' = e_1 R_1 + e_2 R_2, \\ R_1(N_0) = R_{10}, R_2(N_0) = R_{20}, a(N_0) = a_0. \end{cases} \tag{23}$$

进而可以深入研究不同(地区)高校教育收费标准与招生人数规模的分岔与混沌等动力学问题.

5 结　论

本文主要提出了描述高校教育收费问题的2个基本微分方程模型(2)和(4).通过对这2个基本模型的定性分析,得出高校保持或者稳定其教育收费的几个条件;通过对模型(2)和(4)在3种情形下的几个特殊模型进行分析,给出关于高校教育收费和招生规模宏观调控的一些新的结论和建议.

本文还提出了3种扩展的微分方程模型,有关这些模型的进一步研究结果将另文发表.此外,对于高等教育收费标准的问题,我们还将考虑利用文献[10]的新结果去进行研究.

参考文献:

[1] 申欣旺.我国高等教育收费现状及对策研究[J].教学研究,2004,27(3): 193-197.

[2] 李福华.论高等教育收费制度下的几对关系[J].高等师范教育研究,2003,15(2):21-29.

[3] 冯梅,马宁莉.基于成本－收益数学模型的个人教育投资问题的思考[J].江苏经贸职业技术学院学报,2004,1:61-63.

[4] 赵晓梅,刘少雪.处理高等教育效率与公平问题的系统方法[J].复旦教育论坛,2003,1(4):51-54.

[5] 宁泽逵,王征兵.高等教育收费制(定价)的思考[J].西北农林科技大学学报:社会科学版,2004,14(1):92-95.

[6] 化存才.高校毕业生就业率和招生规模的数学模型[J].工程数学学报,2005,22(8):59-62.

[7] 张保庆.规范高校收费,全面落实贫困生资助政策[J].中国高等教育,2004(19):3-6.

[8] BAZYKIN A D. Nonlinear dynamics of interacting populations [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[9] 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支[M].北京:北京大学出版社,2000.

[10] 化存才.凸需求函数、凸分布与多种价格并存的优化模型[J].云南大学学报:自然科学版,2007,29(2):123-126.

Differential equation models for educational charges of universities with analysis of macroscopical adjustment and control

HUA Cun-cai

(School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract: At first, according to the theory on sharing in the educational cost, two basic differential equation models are present for describing the educational charges of universities under appropriate assumptions. Then, by analyzing the two basic models qualitatively, several conditions are obtained for the universities to preserve and stabilize its charges. Finally, by analyzing several special models of the two basic models for the educational charges of universities in three cases, some new conclusions and suggestions are given for macroscopically adjusting and controlling the educational charges of universities and scale of recruit students. In addition, three extended differential equation models are also proposed.

Key words: educational charge of universities; differential equation models; sharing in the educational cost; macroscopical adjustment and control