云南大学学报（自然科学版），2009，31（6）：547～551 CN 53－1045/N ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

具有非光滑核的奇异积分交换子的加权估计[*1]

张 霖[1,2]，江寅生[1]，曹勇辉[1]
（1. 新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830046；2. 新疆财经大学 应用数学学院，新疆 乌鲁木齐 830012）

摘要：讨论了当 $\alpha,\beta\in A_p$，$b\in BMO_{(\alpha\beta^{-1})^{1/p}}$，则交换子 $[b,T](f)$ 从 $L^p(\alpha)$ 到 $L^p(\beta)$（$1<p<\infty$）有界. 该文中核的条件要弱于一般点态的 Hörmander 条件.

关键词：BMO_ω；交换子；带非光滑核奇异积分
中图分类号：O174.2 **文献标识码**：A **文章编号**：0258－7971(2009)06－0547－05

设 T 在 $L^p(R^n)$ 空间有界（$1<p<\infty$）. 称一个可测函数 $K(x,y)$ 为算子 T 的伴随核，是指

$$T(f)(x)=\int_{R^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中函数 f 是具有紧支集的连续函数，并且几乎所有 x 都不在函数 f 的支集里.

如果 $\alpha>0$ 和 $c_1>1$，当

$$|K(x,y)-K(z,y)|\leqslant C\frac{|x-z|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}, \tag{2}$$

这里 $|x-y|\leqslant c_1|x-z|$，就称核 $K(x,y)$ 满足点态 Hörmander 条件. 当核满足 Hörmander 条件，已经得到许多这样的算子及其交换子有界性的结果[1~3].

文献[4]用较弱一点的条件(6)代替 Hörmander 条件(2)且证明了带非光滑核算子 T 是在 $L^p(R^n)$ 空间有界的，对所有的 $1<p<\infty$ 都成立. 邓东皋和颜立新已经证明了相应的交换子 $[b,T]$ 在 L^p 的有界性[5]. 本文讨论的是当 $\alpha,\beta\in A_p$，$b\in BMO_{(\alpha\beta^{-1})^{1/p}}$，则交换子 $[b,T](f)$ 是从 $L^p(\alpha)$ 到 $L^p(\beta)$（$1<p<\infty$）有界的.

文献[4]中的引理2证明了条件(6)比点态的 Hörmander 条件(2)弱一些.

本文中字母"C"代表了独立于变量的常数，且 C 可能会不同.

1 预备知识

当非负函数 ω 在 R^n 局部可积，就称 ω 为权. 当 $1<p<\infty$，若存在常数 C，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(\omega(x))^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leqslant C,$$

其中方体 $Q\subset R^n$，就称权 ω 是属于 Muckenhoupt 类 $A_p(R^n)$. $\omega\in A_1(R^n)$ 当且仅当

$$M(\omega)(x)\leqslant C\omega(x)\qquad 几乎处处于\ x\in R^n,$$

这里 M 为标准的 Hardy－Littlewood 算子（见文献[6～9]）.

令 $\omega\in A_p$，$1<p<\infty$，定义这样一类权组 $\alpha,\beta\in A_p$ 且 $\omega^p=\alpha\beta^{-1}$.

对于函数 $b(x)$，当存在一有限的常数 C，对任一个方体 Q，有

$$\sup_Q\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q|b(x)-b_Q|\,\mathrm{d}x\leqslant C,$$

---

* 收稿日期：2008－08－29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10861010)；新疆大学院校联合资助项目(YX080106).
作者简介：张 霖(1981－)，男，新疆人，博士生，主要从事调和分析和偏微分方程方面的研究.
通讯作者：江寅生(1949－)，男，新疆人，教授，博士生导师，主要从事调和分析及应用方面的研究.

这里 $\in A_p, 1 < p < \infty, \omega(Q) = \int_Q \omega(x)\mathrm{d}x$,就称函数 $b \in BMO_\omega$. 且把满足上式中最小的 C 定义为 $\|b\|_{BMO_\omega}$.

定义1 当对于每一个 $t>0$,A_t 在下面意义下被核 $a_t(x,y)$ 所表示:对每一个函数 $u \in L^p(R^n)$,$p \geq 1$,

$$A_t u(x) = \int_{R^n} a_t(x,y)u(y)\mathrm{d}y,$$

且满足条件

$$|a_t(x,y)| \leqslant h_t(x,y) = t^{-n/2}s\left(\frac{|x-y|^2}{t}\right), \tag{3}$$

这里 s 是一个正的、有界的递减函数及满足条件

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\varepsilon}s(r^2) = 0, \tag{4}$$

其中 $\varepsilon>0$. 这样的一组算子 $A_t, t>0$ 被称为“恒等逼近”. 在文献[10]中,伴随“恒等逼近”$\{A_t, t>0\}$的sharp极大函数 $M_A^{\#}f$ 定义为

$$M_A^{\#}f = \sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - A_{t_Q}f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

这里 $t_Q = l^2(Q)$,$l(Q)$ 是方体 Q 的边长和 $f \in L^p(R^n)(p \geqslant 1)$.

为了便于下面的证明,引入记号

$$C_b^{\,r}(f)(x) = \sup_{x\in Q}|Q|^{-1}\int_Q |b(x)-b(y)|^r|f(y)|\,\mathrm{d}y, 0 < r < \infty.$$

为了得到下一节的定理1,还需要下面的引理1.

引理1 令 $A_t(t>0)$ 为一个“恒等逼近”及 $b \in BMO_\omega$,则对于每一个函数 $f \in C_0^\infty(R^n)$,有

$$\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q |A_{t_Q}(b-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant CM(C_b^1(f))(x).$$

证明 固定 $f \in C_0^\infty(R^n)(p>1)$ 几乎处处于 $x \in R^n$,

$$\begin{aligned}
\int_Q |A_{t_Q}(b-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y &\leqslant |Q|^{-1}\int_Q\int_{R^n} h_{t_Q}(x,y)|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \\
&|Q|^{-1}\int_Q\int_{2Q} h_{t_Q}(x,y)|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \\
&\sum_{k=1}^{\infty}|Q|^{-1}\int_Q\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ} h_{t_Q}(x,y)|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned}$$

对于 Ⅰ,有

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leqslant C|Q||2Q|^{-1}\int_Q\int_{2Q}|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \\
&C|2Q|^{-1}\int_{2Q}|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \\
&C|Q|^{-1}\int_Q|2Q|^{-1}\int_{2Q}|(b(y)-b(z))f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leqslant \\
&CM(C_b^{\,1}(f))(x).
\end{aligned}$$

对于Ⅱ,当 $x \in Q$ 和 $y \in 2^{k+1}Q\backslash 2^kQ$ 时,有 $|x-y| \geqslant 2^{k-1}l$ 及 $h_{t_Q} \leqslant C\dfrac{s(2^{2(k-1)})}{|Q|}$. 故

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}s(2^{2(k-1)})|Q|^{-2}\int_Q\int_{2^{k+1}Q}|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \\
&C\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k-1)n}s(2^{2(k-1)})|2^{k+1}Q|^{-1}\int_{2^{k+1}Q}|(b(y)-b_Q)f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant
\end{aligned}$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k-1)n}s(2^{2(k-1)})|2^{k+1}Q|^{-1}\int_{2^{k+1}Q}|Q|^{-1}\int_{Q}|(b(y)-b(z))f(y)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C|Q|^{-1}\int_{Q}\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k-1)n}s(2^{2(k-1)})|2^{k+1}Q|^{-1}\int_{2^{k+1}Q}|(b(y)-b(z))f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant$$
$$C|Q|^{-1}\int_{Q}\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k-1)n}s(2^{2(k-1)})C_b^{\,1}(f)\mathrm{d}z\leqslant$$
$$CM(C_b^{\,1}(f))(x).$$

这里最后一个不等式是由 $\sum_{k=2}^{\infty}2^{(k-1)n}s(2^{2(k-1)})\leqslant C\sum_{k=2}^{\infty}2^{-(k-1)\varepsilon}<\infty$(此式由(4)式得到)得出,其中 $\varepsilon>0$. 证毕.

2　主要定理及其证明

下面讨论的算子是在文献[4]所引入的算子. 它们是按如下方式定义:

(a) 算子 T 是 $L^2(R^n)$ 上的有界算子,在(1)式意义下,这个算子还有一个伴随核;

(b) 存在着一组“恒等逼近”$\{B_t\}(t>0)$,算子 TB_t 有一组伴随核 $k_t(x,y)$ 并且存在 2 个常数 c_1,c_2 有

$$\int_{|x-y|>c_1t^{1/2}}|K(x,y)-K_t(x,y)|\,\mathrm{d}x\leqslant c_2,\text{对所有 } y\in R^n;\tag{5}$$

(c) 存在着一组“恒等逼近”$\{A_t\}(t>0)$,由核 $K_t(x,y)$ 复合而成的算子 A_tT 满足

$$|K(x,y)-K_t(x,y)|\leqslant c_4\frac{t^{\alpha/2}}{|x-y|^{n+\alpha}},\tag{6}$$

这里 $|x-y|\geqslant c_3t^{1/2}$, $c_3,c_4,\alpha>0$.

当算子 T 满足条件(a)和(b),则算子 T 是弱(1,1)的也是强 (p,p) 的,这里 $1<p\leqslant2$. 此时,当条件(c)也满足时,算子 T 是在 $L^p(R^n)$ 有界的,其中 $1<p<\infty$. 下面得到我们的主要定理.

定理 1　当算子 T 满足上面的条件(a),(b),(c)及 $b\in BMO_\omega$,则交换子 $[b,T]$ 是从 $L^p(\alpha)$ 到 $L^p(\{\beta\})$ 有界的,这里 $(\alpha,\beta)\in A_p(\omega)$, $1<p<\infty$.

证明　固定 $f\in C_0^\infty(R^n)$, $p>1$,几乎处处于 $x\in R^n$,令 Q 为中心在 x_0 的方体. 为了证明定理 1,只需要证明

$$M_A^\#[b,T]f(x)\leqslant C(M(C_b^{\,1}(Tf))(x)+[M(C_b^{\,r}(f)(x))]^{1/r}).\tag{7}$$

利用式(7)及文献[11]中定理 2.2 中的证明过程,即可得到定理 1.

令 $f_1=f_{\chi_{2Q}}$, $f_2=f-f_1$,有

$$A_{tQ}([b,T]f)=A_{tQ}(b-b_Q)Tf-A_{tQ}T(b-b_Q)f_1-A_{tQ}T(b-b_Q)f_2.$$

则

$$|Q|^{-1}\int_{Q}|[b,T]f(y)-A_{t_Q}[b,T]f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant$$
$$|Q|^{-1}\int_{Q}|(b(y)-b_Q)Tf(y)|\,\mathrm{d}y+|Q|^{-1}\int_{Q}|T((b(y)-b_Q)f_1)(y)|\,\mathrm{d}y+$$
$$|Q|^{-1}\int_{Q}|A_{t_Q}((b(y)-b_Q)Tf)(y)|\,\mathrm{d}y+|Q|^{-1}\int_{Q}|A_{t_Q}T((b(y)-b_Q)f_1)(y)|\,\mathrm{d}y+$$
$$|Q|^{-1}\int_{Q}|(T-A_{t_Q}T)((b(y)-b_Q)f_2)(y)|\,\mathrm{d}y=$$
$$I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

对于 I_1,有

$$I_1\leqslant C|Q|^{-1}\int_{Q}(|Q|^{-1}\int_{Q}|(b(y)-b(z))Tf(y)|\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}z\leqslant$$
$$CM(C_b^1(T(f)))(x).$$

对于 I_2,注意到算子 T 是在 L^r 有界的,$1 < r < \infty$,则

$$I_2 \leqslant C\left(|Q|^{-1}\int_Q |T((b(y)-b_Q)f_1)(y)|^r \mathrm{d}y\right)^{1/r} \leqslant$$

$$C\left(|Q|^{-1}\int_Q |b(y)-b_Q|^r |f(y)|^r \mathrm{d}y\right)^{1/r} \leqslant$$

$$C|Q|^{-1}\int_Q\left(|Q|^{-1}\int_Q |b(y)-b(z)|^r |f(y)|^r \mathrm{d}y\right)^{1/r}\mathrm{d}z \leqslant$$

$$C[M(C_b{}^r(|f|^r))(x)]^{1/r}.$$

对于 I_3,由引理1得

$$I_3 \leqslant CM(C_b{}^1(T(f(x)))).$$

对于 I_4,有

$$I_4 \leqslant |Q|^{-1}\int_Q\int_{R^n} h_{t_Q}(x,y)\,|T((b(y)-b_Q))f_1(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant$$

$$|Q|^{-1}\int_Q\int_{2Q} h_{t_Q}(x,y)\,|T((b(y)-b_Q))f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Q|^{-1}\int_Q\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ} h_{t_Q}(x,y)\,|T((b(y)-b_Q))f(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = E_1 + E_2.$$

对于 E_1,利用 Hölder 不等式,可得

$$E_1 \leqslant C|2Q|^{-1}\int_{2Q}|T((b(y)-b_Q)f)(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$C\left(|2Q|^{-1}\int_{2Q}|T((b(y)-b_Q)f)(y)|^r\mathrm{d}y\right)^{1/r} \leqslant$$

$$C\left(|2Q|^{-1}\int_{2Q}|b(y)-b_Q|^r|f(y)|^r\mathrm{d}y\right)^{1/r} \leqslant C[M(C_b{}^r(|f|^r))(x)]^{1/r}.$$

对于 E_2,类似于 E_1 证明,可得

$$E_2 \leqslant C[M(C_b{}^r(|f|^r))(x)]^{1/r}.$$

最后,对于 I_5,利用条件(c)有

$$I_5 \leqslant |Q|^{-1}\int_Q\int_{(2Q)^c}|K(y,z)-K_{t_Q}(y,z)||(b(z)-b_Q)f(z)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}Q\backslash 2^kQ}\frac{1}{|x_0-z|^n}\frac{l(Q)^\alpha}{|x_0-z|^\alpha}|(b(z)-b_Q)f(z)|\,\mathrm{d}z \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\alpha}(|2^{k+1}Q|^{-1}\int_{2^{k+1}Q}|(b(z)-b_Q)f(z)|\,\mathrm{d}z \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\alpha}(|2^{k+1}Q|^{-1}\int_{2^{k+1}Q}|b(z)-b_Q|^r|f|^r\mathrm{d}z)^{1/r} \leqslant C[M(C_b{}^r(|f|^r))(x)]^{1/r}.$$

综上知定理1结论成立. 证毕.

参考文献:

[1] 刘宗光. Calderón - Zygmund 奇异积分算子交换子在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性[J]. 数学进展,2001,30:447-458.

[2] CALDERON-ZYGMUND. On commutators of singularintergrals[J]. Studia Math,1975,53:139-174.

[3] 周疆,马柏林,江寅生,等. 线性交换子的加权估计[J]. 云南大学学报:自然科学版,2008,30(2):113-118.

[4] DUONG X T, MCINTOSH A. Singular integral operators with non - smooth kernels on irregular domains[J]. REVISTA MATEMATIC Iberoamericana,1999,15:233-265.

[5] DENG Dong-gao, YAN Li-xin. Commutators of singularintegral operators with non - smooth kernels[J]. Acta Math Scientia, 2005,25:137-144.

[6] 周民强. 调和分析[M]. 北京:北京大学出版社,1999.

[7] 陆善镇,王昆扬.实分析[M].北京:北京师范大学出版社,2006.

[8] STEIN E M. Fourier analysis[M]. Princeton: Princeton University Press,USA,1993.

[9] GARCIA-CUERVA J,RUBIO DE FRANCIA. Weighted norminequalities and related topics[M]. Amsterdam – NewYork, North – Holland,1985.

[10] MARTELL J M. Sharp maximal functions associated withapproximations of the identity in spaces of homogeneous type andapplications[J]. Studia Math,2004,161:113-145.

[11] GARCÍA-CUERVA J,HARBOURE E,SEGOVIA C,et al. Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals[J]. Indiana University Mathematics Journal,1991,40:1 397-1 420.

Weighted estimates for commutators of singular integral operators with non – smooth kernels

ZHANG Lin[1,2], JIANG Yin-sheng[1], CAO Yong-hui[1]

(1. College of Mathematics and System Sciences,Xinjiang University,Urumqi 830046,China;

2. College of Applied Mathematic,Xinjiang University of Finance and Economics,Urumqi 830012,China)

Abstract: It is proved that the commutator $[b,T](f)$ is a bounded from $L^p(\alpha)$ to $L^p(\beta)$, $1<p<q<\infty$, where $\alpha,\beta\in A_p$, $b\in BMO_{(\alpha\beta^{-1})^{1/p}}$. The condition of kernel is weaker than the usual pointwise H örmander condition.

Key words: BMO_ω; commutator; singular integraloperator with non – smooth kernel

* *

(上接第 546 页)

Boundedness of Littlewood – Paley operators and its commutators

ZHAO Kai[1], WANG Zhen[1], WANG Lei[2]

(1. College of Mathematics,Qingdao University, Qingdao 266071,China;

(2. Department of Mathematics,Teachers College Qingdao University,Qingdao 266071,China)

Abstract: The Littlewood – Paley operators and its commutators were discussed. By the atomic and molecular decompositions of Herz – type Hardy spaces,the boundedness of the Littlewood – Paley operator g_ψ and the commutator $g_{\psi,b}$ on Herz – type Hardy spaces are obtained.

Key words: Littlewood – Paley operator; commutator; Herz – type Hardy space; boundedness