云南大学学报（自然科学版），2009，31（5）：493～498　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

色关联噪声驱动双稳系统平均首通时间的研究[*1]

于占东[1,2]，赵自保[2]，曾春华[1,3]，谢崇伟[1]
（1. 云南大学 物理系，云南 昆明　650091；2. 昆明陆军学院 物理教研室，云南 昆明　650000
3. 昆明理工大学 理学院，云南 昆明　650093）

摘要：研究了色关联噪声驱动双稳系统的瞬时性质，根据 Novikov 定理和 Fox 近似方法得到相应的 Fokker－Planck 方程，使用最陡下降法得到了 2 个相反方向平均首通时间的解析表达式，即 T^{+}（从左势阱到右势阱）和 T^{-}（从右势阱到左势阱）. 经过数值计算，结果表明：①加性和乘性噪声的色关联效应使得一个方向上的逃逸变得更加容易，而另一个方向上的逃逸更加困难；②在正关联情况下，加性和乘性噪声的关联时间的增加会使得左势阱到右势阱的逃逸抑制现象减弱；而在负关联情况下，加性和乘性噪声的关联时间的增加会使得右势阱到左势阱的逃逸抑制现象减弱；并且噪声关联的色效应对正关联和负关联任意方向上的平均首通时间的影响完全相反.

关键词：关联强度；关联时间；平均首通时间；双稳系统
中图分类号：O 413　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971（2009）05－0493－06

噪声对非线性系统影响的研究中，人们发现在某种特定情况下，外部噪声（乘性噪声）和内部噪声（加性噪声）可能来自于同一个噪声源，并且它们之间彼此关联. 平均首通时间是系统从一个稳态出发穿越势垒进入另一势阱所用时间的平均值，它是用来刻画逃逸问题的重要的特征量，噪声诱导布朗粒子的逃逸问题已被广泛地关注[1～6]. Madureira 等[7]在对关联的乘性噪声和加性噪声同时驱动双稳系统的研究时，发现逃逸率出现了巨大的抑制现象. 贾亚等[8]研究了白关联的乘性噪声和加性噪声同时驱动双稳系统的平均首通时间，发现了噪声之间的关联性对平均首通时间有很大的影响. 梅冬成等[9]研究了色关联的乘性噪声和加性噪声驱动双稳系统的平均首通时间，即乘性噪声和加性噪声的关联时间不为 0，发现了系统的平均首通时间受关联强度 λ 和关联时间 τ 的影响，并且关联强度 λ 和关联时间 τ 对平均首通时间起到了相反的作用. 宁丽娟等[10]研究了色关联的乘性噪声和加性噪声驱动的非对称双稳系统中平均首通时间，并且发现了非对称性的增加减小逃逸率.

逃逸率和平均首通时间通常是用来描述系统瞬时性质的 2 个特征量. 尽管如此，上述文献仅仅研究了单方向上的逃逸率和平均首通时间（从左势阱到右势阱）. 2003 年，Wang 等[11]研究了白关联的乘性噪声和加性噪声驱动的双稳系统，并且证明了乘性噪声和加性噪声之间的关联性破坏了 2 个方向平均首通时间对称性（从左势阱到右势阱和从右势阱到左势阱）. 文献[11]主要研究了白关联噪声驱动的双稳系统，然而在实际的系统中 2 个噪声之间的关联时间不可能为 0（即色关联），因为它需要无穷大的功率才能产生出来[12]. 本文进一步将理论分析与实际情况相结合，讨论了关联时间 τ 不为 0 时，这种色关联效应对双稳系统的 2 个相反方向上的平均首通时间的影响.

1　平均首通时间

考虑由色关联乘性噪声和加性噪声同时驱动双稳系统，描述该系统的朗之万方程为：

---

* **收稿日期**：2008－07－11
基金项目：云南省教育厅科学研究基金资助项目（08C0235）.
作者简介：于占东（1981－　），男，云南人，助教，主要从事非线性的随机动力学性质方面的研究.
通讯作者：谢崇伟（1962－　），男，云南人，教授，主要从事非线性的随机动力学性质方面的研究.

$$\frac{dx}{dt} = -V'(x) + x\xi(t) + \eta(t), \tag{1}$$

这里 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 都是均值为零的高斯白噪声,其统计性质:

$$\begin{aligned}
&\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \\
&\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \\
&\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\alpha\delta(t - t'), \\
&\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = \frac{\lambda\sqrt{D\alpha}}{\tau}\exp\left[-\frac{|t - t'|}{\tau}\right] \\
&\quad \to 2\lambda\sqrt{\alpha D}\delta(t - t') \text{ as } \tau \to 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

式中,D 为乘性噪声强度,α 是加性噪声强度,λ 是乘性噪声和加性噪声的关联强度,τ 是乘性噪声和加性噪声的关联时间. 势函数 $V(x)$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \tag{3}$$

有 2 个稳态 $x_{\pm} = \pm 1$ 和 1 个非稳态 $x_u = 0$. 根据 Novikov 定理[13] 和 Fox 近似方法[14] 可以得到对应方程(1)的近似 Fokker - Planck 方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}f(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x)P(x,t), \tag{4}$$

这里

$$\begin{aligned}
&f(x) = x - x^3 + Dx + 2\lambda_0\sqrt{\alpha D}, \\
&G(x) = Dx^2 + 2\lambda_0\sqrt{\alpha D}x + \alpha,
\end{aligned} \tag{5}$$

和 $\lambda_0 = \dfrac{\lambda}{1 + 2\tau}.$

从方程(4)和(5)可得,系统的稳态几率分布函数为

$$P_{st}(x) = NG(x)^{-1/2}\exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right].$$

其中 N 是归一化常数,$U(x)$ 是系统修正势,

$$U(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\lambda_0\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x + \gamma_1\ln\left(x^2 + 2\lambda_0\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x + \frac{\alpha}{D}\right) + \gamma_2\arctan\left(\frac{\lambda_0 + \sqrt{D/\alpha}x}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}\right), \tag{7}$$

这里

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{2D}(4\lambda_0^2 - 1) - \frac{1}{2},$$

$$\gamma_2 = -\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}\left[(4\lambda_0^2 - 3)\frac{\alpha}{D} - 1\right].$$

我们感兴起的是这个系统的瞬时性质(平均首通时间),从初始态 $x_{\pm}$ 到终点态 $x_{\mp}$ 平均首通时间的精确表达式[15]

$$T(x_{\mp} \to x_u) = \int_{x_{\mp}}^{x_u} \frac{dx}{G(x)P_{st}(x)}\int_{-\infty}^{x} P_{st}(y)dy$$

很复杂,并且很难处理,所以使用最快下降法[16]. 当 α 和 D 很小,并且远小于势垒高度 $\Delta U(x) = U(x_{\mp}) - U(x_u)$ 时,由最快下降法得到的平均首通时间为

$$T^{\pm} = T(x_{\mp} \to x_u) \simeq 2\pi[|V''(x_{\mp})V''(x_u)|]^{-1/2}\exp\left[\frac{U(x_u) - U(x_{\mp})}{D}\right], \tag{9}$$

将方程(3)和(7)式代入到(9),可以得到该系统平均首通时间的表达式

$$T^{\pm}(\lambda,\tau) \simeq \sqrt{2}\pi\left\{1 \mp 2\lambda_0\sqrt{\frac{\alpha}{D}} + \frac{D}{\alpha}\right\}^{-\frac{\gamma_1}{D}}\exp\left\{-\frac{1}{2D} \mp \frac{2\lambda_0}{D}\sqrt{\frac{\alpha}{D}} +\right.$$

$$\frac{\gamma_2}{D}\left[\arctan\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\lambda_0^{\ 2}}} \mp \arctan\frac{\lambda_0 \mp \sqrt{D/\alpha}}{\sqrt{1-\lambda_0^{\ 2}}}\right]\Bigg\}. \tag{10}$$

当关联时间为0 时,关联强度 λ 对2 方向上平均首通时间 T^+ 和 T^- 的影响已经在文献[11]中有过讨论,这里不再重复. 为了研究更接近事实,我们关心的是关联时间不为 0 情况下,关联时间 τ 和关联强度 λ 对 2 方向上平均首通时间 T^+ 和 T^- 的影响. 根据方程(10)表达式,经过数值处理,我们作出不同噪声参数情况下的图形,讨论关联时间 τ 和关联强度 λ 对 2 方向上平均首通时间 T^+ 和 T^- 的影响.

(1)当关联强度 λ 一定时,随关联时间 τ 增大,T^+ 单调递减;当 τ 一定时,随着 λ 增加,T^+ 增大,如图1. 而从图 2 表明,当 λ 一定时,随着关联时间 τ 增大,T^- 是单调递增;当 τ 一定时,随着 λ 增大,T^- 反而减小. 关联时间 τ 和关联强度 λ 对任意方向上的平均首通时间的影响完全相反,既无论关联时间 τ 还是关联强度 λ 对 T^+ 和 T^- 的影响也完全相反. 从图 3 ~4 中,我们同样可看到这一规律. 并且,当 $\lambda>0$ 时,$T^+(\tau\neq 0)<T^+(\tau=0)$,$T^-(\tau\neq 0)>T^-(\tau=0)$,即噪声关联的色效应使得一个方向上的逃逸变得更容易,而在相反方向上的逃逸更困难.

图 1　平均首通时间 T^+ 随交叉关联时间 τ 的变化关系,相关的参数 $D=0.1,\alpha=0.1.\ \lambda=0.1,0.3,0.5$.

Fig. 1　Curves of the mean first – passage time T^+ versus τ with $D=0.1,\alpha=0.1.\ \lambda=0.1,0.3,0.5$.

图 2　平均首通时间 T^- 随交叉关联时间 τ 的变化关系,相关的参数 $D=0.1,\alpha=0.1.\ \lambda=0.3,0.5,0.9$.

Fig. 2　Curves of the mean first – passage time T^- versus τ with $D=0.1,\alpha=0.1.\ \lambda=0.3,0.5,0.9$.

图 3　平均首通时间 T^+ 随交叉关联强度 λ 的变化关系,相关的参数 $D=0.1,\alpha=0.1,\ \tau=0.0,0.5,1.2$.

Fig. 3　Curves of the mean first – passage time T^+ versus λ with $D=0.1,\alpha=0.1,\tau=0.0,0.5,1.2$.

图 4　平均首通时间 T^- 随交叉关联强度 λ 的变化关系,相关的参数 $D=0.1,\alpha=0.1,\tau=0.0,0.5,1.2$.

Fig. 4:　Curves of the mean first – passage time T^- versus λ with $D=0.1,\alpha=0.1,\ \tau=0.0,0.5,1.2$.

(2)从图5~8中,我们得到随着乘性噪声强度 D 的增大,2个方向上的平均首通时间 T^+ 和 T^- 却在减小.然而,在正关联情况下($\lambda=0.3$,如图5~6),在噪声关联时间较小的情况下,T^+ 随着 D 的变化,会出现1个峰值(对应 $nu=1/T^+$ 逃逸率的极小值);而在负关联情况下($\lambda=-0.4$,如图7~8),在噪声关联时间较小的情况下,T^- 随着 D 的变化,同样会出现1个峰值,这对应于 Madureira[7] 工作中的所谓的逃逸抑制现象.因此噪声关联的色效应减弱逃逸抑制现象.当乘性噪声强度 D 一定时,随关联时间 τ 增大,在正关联情况下,T^+ 减小;而在负关联情况下,T^+ 增加,如图5和7所示.而图6和8表明,随关联时间 τ 增大,在正关联情况下,T^- 增加;而在负关联情况下,T^- 减小.从而,关联时间 τ 对正关联情况下和负关联情况下任意方向上的平均首通时间的影响完全相反.

图5 平均首通时间 T^+ 随乘性噪声强度 D 的变化关系,相关的参数 $\alpha=0.1,\lambda=0.3.\tau=0.0,0.5,1.2.$

Fig. 5 Curves of the mean first - passage time T^+ versus $D$with $\alpha=0.1,\lambda=0.3.\tau=0.0,0.5,1.2.$

图6 平均首通时间 T^- 随乘性噪声强度 D 的变化关系,相关的参数 $\alpha=0.1,\lambda=0.3.\tau=0.0,0.5,1.2.$

Fig. 6 Curves of the mean first - passage time T^- versus $D$with $\alpha=0.1,\lambda=0.3.\tau=0.0,0.5,1.2.$

图7 平均首通时间 T^+ 随乘性噪声强度 D 的变化关系,相关的参数 $\alpha=0.1,\lambda=-0.4.\tau=0.0,0.5,1.2.$

Fig. 7 Curves of the mean first - passage time T^+ versus $D$with $\alpha=0.1,\lambda=-0.4.\tau=0.0,0.5,1.2.$

图8 平均首通时间 T^- 随乘性噪声强度 D 的变化关系,相关的参数 $\alpha=0.1,\lambda=-0.4.\tau=0.0,0.5,1.2.$

Fig. 8 Curves of the mean first - passage time T^- versus $D$with $\alpha=0.1,\lambda=-0.4.\tau=0.0,0.5,1.2.$

2 结 论

研究了色关联噪声所驱动的双稳系统的2个相反方向上的平均首通时间,使用最陡下降法得到了2个相反方向平均首通时间的解析表达式,研究结果表明:噪声关联时间 τ 和关联强度 λ 对任意方向上的平均首通时间的影响完全相反,噪声关联的色效应使得一个方向上的逃逸变得更容易,而在相反方向上的逃

逸更困难;噪声关联的色效应对正关联情况下和负关联情况下任意方向上的平均首通时间的影响也是完全相反.

参考文献:

[1] MADUREIRA A J R, HANGGI P, BUONOMANO V, et al. Escape form a fluctuating double well[J]. Phys Rev E, 1995, 51: 3 849-3 861.

[2] MEI D C, CHEN L E, XIE G Z, et al. The transition rate of a double well system driven bycross – correlated noises[J]. Acta Physica sinica Ov – ed, 1999, 8: 808-812.

[3] MEI D C, XIE G Z, CAO L, et al. Transient properties of a bistable system driven by cross – correlated noises: correlation times are nonzero case[J]. Chin Phys Lett, 1999, 16: 327-329.

[4] BAI Guang-qi, CHENG Luo-en, LIU Hong- zhang. The effects of cross – correlated noises on the mean frist – passage time ofa bistable system[J]. 云南大学学报:自然科学版, 1999, 21(1): 6-8.

[5] XIE C W, MEI D C. Mean frist – passage time of a bistable kinetic model driven by multiplicative coloured noise and additive white noise [J]. Chin Phys Lett, 2003, 20: 813-816.

[6] XIE C W, MEI D C, CAO L, et al. Escape ofbrownin particles in an asymmetric bistable sawtooth potentialdriven by cross – correlated noises[J]. Eur Phys J B, 2003, 33: 83-86.

[7] MADUREIRA A J R, HANGGI P, WIO H S. Giant suppression of the activation rate in presence of correlated white noise sources[J]. Phys Lett A, 1996, 217: 248-252.

[8] JIA Y, LI J R. Transient properties of a bistable Kinetic model with correlation between additive and multiplicative noises: mean first – passage time[J]. Phys Rev E, 1996, 53: 5 764-5 768.

[9] MEI D C, XIE G Z, CAO L, et al. Mean first – passage time of abistable kinetic model driven by cross – correlated noises[J]. PhysRev E, 1999, 59: 3 880-3 883.

[10] 宁丽娟,徐伟,杨晓丽,色关联噪声驱动的非对称双稳系统中平均首次穿越时间的研究[J]. 物理学报, 2007, 56: 25-29.

[11] WANG J, CAO L, WU D J. Effect on the mean first passage timein symmetrical bistable systems by cross – correlation between noises[J]. Phys Lett A, 2003, 308: 23-30.

[12] HU G. Stochastic force and nonlinear systems[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technological Education Publishing House, 1994.

[13] NOVIKOV E A. Functionals and the random – force method in turbulence theory[J]. Sov Phys JETP, 1965, 20: 1 290.

[14] FOX R F. Uniform convergence to an effective Fokker – Planck equation for weakly colored noise[J]. Phys Rev A, 1986, 34: 4 525-4 527.

[15] MASOLIVER J, WEST B J, LINDENBERG K. Bistablility driven by Gaussian colored noise[J]. Phys RevA, 1987, 35: 3 086-3 094.

[16] FOX R F. Functional – calculus approach to stochastic differential equations[J]. Phys Rev A, 1986, 33: 467-476.

Effects of colored correlations between noises on the mean first passage time for a bistable system

YU Zhan-dong[1,2], ZHAO Zi-bao[2], ZENG Chun-hua[1,3], XIE Chong-wei[1]

(1. Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091, China; 2. Teaching and Research Group of Physics, Kunming Military Academy of PLA, Kunming 650000, China; 3. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: The transient properties of a bistable system driven by colored cross – correlated noises is studied. According to Novikov theorem and Fox′ approach, we derive the approximative Fokker – Planck equation. The analytic expression of the mean first - passage times(MFPT) in two opposite directions is derived by the steepest - descent approximation, i. e. , T^+ (from the left well to the right) and T^- (from the right well to the left). From numerical computations we find the following: ① The colored correlation between the additive and the multiplicative noises makes the system escape easier in one direction and more difficult in the other direction; ② The correlation time τ causes the suppression of escape rate from the left well to the right well to become inapparent for the case of the positive correlation between noises ($\lambda > 0$); and τ causes the suppression of escape rate from the right well to the left well to become inapparent for the case of the negative correlation between noises ($\lambda < 0$); and the colored correlation among noises play opposing roles on the MFPT in any direction for $\lambda > 0$ and for $\lambda < 0$.

Key words: correlation strength; correlation time; meanfirst passage time; bistable systemclearpage

* *

(上接第492页)

New law of β^- - decay lives of nuclei far from stable - line

ZHI Qi-jun[1], ZHANG Xiao-ping[2]

(1. School of Physics and Electronics, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China;
2. Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: The experimental β^--decay lives of nuclei far from stable line are systematically analyzed and an exponential law between β - decay half - life and the nucleon number (Z, N) of parent nuclei far from the β - stable line is discovered. Based on theoretical analysis, a new formula with four parameters is proposed to describe the β^- - decay half-lives of nuclei far from the β - stable line. Experimental data are well reproduced by the formula. In addition, by using this formula, the β^- - decay half-lives of some unknown nuclei are calculate and predicted.

Key words: β^- - decay lives; exponential law; formula