云南大学学报（自然科学版），2009，31（1）：11～15　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

具高阶 Laplace 算子的脉冲时滞双曲型方程组的振动性 [*1]

罗李平，杨　柳，王艳群
（衡阳师范学院 数学系，湖南 衡阳　421008）

摘要：讨论一类具高阶 Laplace 算子的脉冲时滞双曲型方程组的振动性，利用特征函数法和一阶脉冲时滞微分不等式获得了该类方程在 2 类不同边值条件下所有解振动的若干充分性条件．所得结论充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用．

关键词：双曲型方程组；振动性；高阶 Laplace 算子；脉冲；时滞

中图分类号：O 175.27　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2009)01－0011－05

众所周知，在自然科学和社会科学里许多学科的一些问题中出现了大量的含时滞的(偏)微分方程．因此，这一领域近 20 年来出现了大量的研究成果，如文献[1～7]及其后所列参考文献．而脉冲现象作为一种瞬时突变现象，在现代科技领域的实际问题中是普遍存在的．脉冲偏微分方程作为偏微分方程的一个新分支，它是 20 世纪 90 年代初形成和发展起来的，1991 年 Erbe 等学者在研究单一物种生长模型时给出了脉冲抛物方程稳定性的比较准则[8]，这是为国际数学界真正了解的有关脉冲偏微分方程研究的最早结果．之后，对其研究日益受到重视．脉冲偏微分方程的振动理论作为其中的一个重要研究领域，近 10 年来引起了许多学者的极大关注，已陆续有很多好的研究论文发表，如文献[9～22]及其后所列参考文献．但对具高阶 Laplace 算子的脉冲偏泛函微分方程组的振动性研究，就笔者所知，目前国内外尚未见报道．现在我们的目的是研究如下一类具高阶 Laplace 算子的脉冲时滞双曲型偏微分方程组(1)的振动性问题，建立了该类方程组分别在边值条件(B_1)，(B_2)下所有解振动的若干充分性判据．所得结果为解决上述学科领域中的一些实际问题提供了数学理论基础．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a_i(t)\Delta^{2l-1}u_i+b_i(t)\Delta^{2l-1}u_i(t-\tau,x)-p_i(t,x)u_i(t-\sigma,x)-\displaystyle\sum_{j=1}^{m}q_{ij}(t,x)u_j(t-\rho,x),\\ \qquad\qquad (t,x)\in R_+\times\Omega\equiv G,t\neq t_k,i\in I_m=\{1,2,\cdots,m\},\\ u_i(t_k^+,x)-u_i(t_k^-,x)=b_k u_i(t_k,x),\qquad k=1,2,\cdots;i\in I_m,\\ \dfrac{\partial u_i(t_k^+,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial u_i(t_k^-,x)}{\partial t}=c_k\dfrac{\partial u_i(t_k,x)}{\partial t},\qquad k=1,2,\cdots;i\in I_m.\end{cases}\tag{1}$$

$$\frac{\partial\Delta^r u_i}{\partial N}+\beta(x)\Delta^r u_i=0,(t,x)\in R_+\times\partial\Omega,t\neq t_k,r=0,1,2\cdots,2l-2,i\in I_m;\tag{B_1}$$

$$\Delta^r u_i=0,\ (t,x)\in R_+\times\partial\Omega,\ t\neq t_k,\ r=0,1,2,\cdots,2l-2,i\in I_m.\tag{B_2}$$

其中 $u_i=u_i(t,x)$，$R_+[0,\infty)$，$\Omega\subset R^n$ 是有界区域，$\partial\Omega$ 逐片光滑，Δ 是 R^n 中的 n 维 Laplace 算子，N 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$\beta(x)\in C(\partial\Omega,(0,\infty))$；$l\geqslant 1$ 是整数，$\Delta^r u_i=\Delta(\Delta^{r-1}u_i)$，$r\geqslant 1$，当 $r=0$ 时，记 $\Delta^r u_i=u_i$.

* 收稿日期：2008－03－13
基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目(07C164)；湖南省自然科学基金资助项目(06JJ5001)．
作者简介：罗李平(1964－　)，男，湖南人，教授，主要从事偏泛函微分方程振动理论方面的研究．

在以下的讨论中,我们总假定下列条件成立:

(H_1) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 是固定点列,且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;

(H_2) τ,σ,ρ 为正常数,且 $b_k, c_k > -1, k = 1,2,\cdots$;

(H_3) $a_i(t), b_i(t) \in PC(R_+,R_+)$, $p_i(t,x) \in PC(R_+\times\bar{\Omega},R_+)$, $q_{ij}(t,x) \in PC(R_+\times\bar{\Omega},R)$, $q_{ii}(t,x) > 0, i,j \in I_m$. 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类:仅在 $t = t_k(k = 1,2,\cdots)$ 为第 1 类间断点,但在 $t = t_k$ 左连续;$a(t) = \min\limits_{i\in I_m}\{a_i(t)\}$, $b(t) = \min\limits_{i\in I_m}\{b_i(t)\}$, $p(t) = \inf\limits_{i\in I_m, x\in\Omega}\{p_i(t,x)\}$, $q_{ii}(t) = \inf\limits_{x\in\Omega}\{q_{ii}(t,x)\}$, $\bar{q}_{ij}(t) = \sup\limits_{x\in\Omega}\{|q_{ij}(t,x)|\}, i,j \in I_m$, $q(t) = \min\limits_{i\in I_m}\left\{q_{ii}(t) - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{q}_{ji}(t)\right\} > 0$.

定义 1 称向量函数 $u(t,x) = (u_1(t,x),u_2(t,x),\cdots,u_m(t,x))^{\mathrm{T}}$ 为边值问题((1),(B_1))(((1),(B_2)))的解,若对 $i \in I_m, u_i(t,x)$ 满足:

① 对固定的 $x, u_i(t,x)$ 是以 t_k 为第 1 类间断点的分片连续函数;

② $u_i(t_k,x) = u_i(t_k^-,x), \dfrac{\partial u_i(t_k,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial u_i(t_k^-,x)}{\partial t}, k = 1,2,\cdots$,且分别满足(1)式的第 2 式和第 3 式;

③ 对 $t \neq t_k, x \in \Omega, \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t^2}$ 存在,且满足(1)式的第 1 式;对固定的 $t, t \neq t_k, \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial x_r^2}$ 存在,$r \in I_n$;

④ 对 $t \neq t_k, x \in \partial\Omega, \dfrac{\partial u_i(t,x)}{\partial N}$ 存在且满足(B_1)($u_i(t,x)$ 满足(B_2)).

定义 2 称数值函数 $v(t,x):G\to R$ 为非振动的,若它最终为正或最终为负;反之,称 $v(t,x)$ 为振动的. 称向量函数 $u(t,x):G\to R^m$ 为非振动的,若它的每一分量都是非振动的;称向量函数 $u(t,x):G\to R^m$ 为振动的,若它至少有一分量作为数值函数是振动的.

引理 1[23] 设 λ_0 是如下特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0, & x \in \Omega, \lambda \text{ 是常数}, \\ \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial N} + \beta(x)\varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega\end{cases} \tag{2}$$

的第一特征值,$\varphi(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数,且 $\beta(x) \in C(\partial\Omega,(0,\infty))$,则 $\lambda_0 > 0, \varphi(x) > 0, x \in \Omega$.

引理 2[24] 设 $y(t) \in C^2([t_0,\infty],R)$ 且 $y(t) > 0, y'(t) > 0, y''(t) < 0, t \geqslant t_0$,则对任意的 $\theta \in (0,1)$,存在 $t_1 \geqslant t_0$,使得当 $t \geqslant t_1$ 时,有 $y(t) \geqslant \theta t y'(t)$.

引理 3[25] 设 $a(t), b(t) \in (R_+,R)$ 是局部可积函数且 $b(t) \geqslant 0$;$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $y(t_k) = y(t_k^-)$;$b_k > -1, k = 1,2,\cdots$;τ 为正常数. 若

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} b(s)\exp\left(\int_{s-\tau}^{s} a(r)\,\mathrm{d}r\right)\prod_{s-\tau\leqslant t_k<s}(1+b_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

则脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases}y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau) \leqslant 0, & t \geqslant 0, t \neq t_k, k = 1,2,\cdots \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = b_k y(t_k), & k = 1,2,\cdots\end{cases}$$

无最终正解(参见文献[25]中的定理 2).

首先考虑边值问题((1),(B_1))解的振动性.

定理 1 若对任意的 $\theta \in (0,1)$,下列 3 个条件之一成立:

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\theta p(s)(s-\sigma)\exp\left(\int_{s-\sigma}^{s}\theta\lambda_0^{2l-1} r a(r)\,\mathrm{d}r\right)\prod_{s-\sigma\leqslant t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{3}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\theta\lambda_0^{2l-1} b(s)(s-\tau)\exp\left(\int_{s-\tau}^{s}\theta\lambda_0^{2l-1} r a(r)\,\mathrm{d}r\right)\prod_{s-\tau\leqslant t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{4}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\rho}^{t}\theta q(s)(s-\rho)\exp\Big(\int_{s-\rho}^{s}\lambda_0^{2l-1}ra(r)\,\mathrm{d}r\Big)\prod_{s-\rho\le t_k<s}(1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{5}$$

则边值问题((1)，(B_1))的所有非零解在区域 G 内振动，其中 λ_0 由问题(2)确定.

证明　假设(3)成立且边值问题((1)，(B_1))有 1 个非振动解 $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),\cdots,u_m(t,x))^{\mathrm T}$，不妨设当 $t\geqslant T>0$ 时，有 $|u_i(t,x)|>0,i\in I_m$. 令 $\delta_i=\operatorname{sgn}u_i(t,x)$，则 $y_i(t,x)=\delta_i u_i(t,x)>0,(t,x)\in[T,\infty)\times\Omega,i\in I_m$. 令 $T_1=T+\max\{\tau,\sigma,\rho\}$，则 $y_i(t-\tau,x)>0,y_i(t-\sigma,x)>0$，$y_j(t-\rho,x)>0,(t,x)\in[T,\infty)\times\Omega,i,j\in I_m$.

当 $t\neq t_k,k=1,2,\cdots$ 时，(1)式 2 边乘以问题(2)的第 1 特征值 λ_0 对应的特征函数 $\varphi(x)$，并关于 x 在 Ω 上积分，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big[\int_\Omega y_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big]+\int_\Omega p_i(t,x)y_i(t-\sigma,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta_i}{\delta_j}\int_\Omega q_{ij}(t,x)y_j(t-\rho,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$a_i(t)\int_\Omega\Delta^{2l-1}y_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x+b_i(t)\int_\Omega\Delta^{2l-1}y_i(t-\tau,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\geqslant T_1,i\in I_m. \tag{6}$$

由 Green 公式及边值条件(B_1)有

$$\int_\Omega\Delta^{2l-1}y_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\Big[\frac{\partial\Delta^{2l-2}y_i}{\partial N}\varphi(x)-\Delta^{2l-2}y_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial N}\Big]\mathrm{d}S+\int_\Omega\Delta^{2l-2}y_i\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_\Omega\Delta^{2l-2}y_i\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega\Delta^{2l-2}y_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=-\lambda_0^{2l-1}\int_\Omega y_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\geqslant T_1,\ i\in I_m, \tag{7}$$

$$\int_\Omega\Delta^{2l-1}y_i(t-\tau,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=-\lambda_0^{2l-1}\int_\Omega y_i(t-\tau,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\geqslant T_1,i\in I_m, \tag{8}$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

令 $V_i(t)=\int_\Omega y_i(t,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,V(t)=\sum_{i=1}^{m}V_i(t)$，则 $V_i(t)>0,V(t)>0,t\geqslant T_1,i\in I_m$. 于是结合条件$(H_3)$，由(6)～(8)可得

$$V''(t)\leqslant-\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)-\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)-p(t)V(t-\sigma)-$$
$$\sum_{i=1}^{m}\Big\{q_{ii}(t)V_i(t-\rho)-\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar q_{ij}(t)V_j(t-\rho)\Big\}=$$
$$-\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)-\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)-p(t)V(t-\sigma)-\sum_{i=1}^{m}\Big\{q_{ii}(t)-\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar q_{ji}(t)\Big\}V_i(t-\rho)\leqslant$$
$$-\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)-\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)-p(t)V(t-\sigma)-\min_{i\in I_m}\Big\{q_{ii}(t)-\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar q_{ji}(t)\Big\}\sum_{i=1}^{m}V_i(t-\rho)=$$
$$-\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)-\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)-p(t)V(t-\sigma)-q(t)V(t-\rho),\quad t\geqslant T_1.$$

于是有

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)+p(t)V(t-\sigma)+q(t)V(t-\rho)\leqslant 0,\ t\geqslant T_1. \tag{9}$$

从而有

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+p(t)V(t-\sigma)\leqslant 0,\qquad t\geqslant T_1, \tag{10}$$

或

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+\lambda_0^{2l-1}b(t)V(t-\tau)\leqslant 0,\qquad t\geqslant T_1, \tag{11}$$

或

$$V''(t)+\lambda_0^{2l-1}a(t)V(t)+q(t)V(t-\rho)\leqslant 0,\qquad t\geqslant T_1. \tag{12}$$

由(10)式易知，$V''(t)\leqslant 0,t\geqslant T_1$，于是可推得 $V'(t)>0,t\geqslant T_1$. 事实上，倘若不然，则存在 $T_2>T_1$，使得 $V'(T_2)\leqslant 0$. 当 $t\geqslant T_2$ 时，有 $V'(t)\leqslant V'(T_2)$. 对 t 从 T_2 到 t 积分，有 $V(t)\leqslant V(T_2)+V'(T_2)(t-T_2)$. 当 $t\to\infty$ 时，有 $\lim_{t\to\infty}V(t)=-\infty$，而这与 $V(t)>0$ 矛盾. 因此由引理 2 可知，存在 $T_2\geqslant T_1$，对任意的 $\theta\in$

$(0,1)$，有 $V(t) \geqslant \theta t V'(t), t \geqslant T_2$. 令 $Z(t) = V'(t)$，则由(10)式有

$$Z'(t) + \theta\lambda_0^{2l-1} t a(t) Z(t) + \theta p(t)(t-\sigma)V(t-\sigma) \leqslant 0,\ t \geqslant T_2. \tag{13}$$

当 $t = t_k, k = 1,2,\cdots$ 时，结合(1)式的第2式，第3式及定义1中的条件②可得

$$u_i(t_k^+,x) = u_i(t_k^-,x) + b_k u_i(t_k,x) = (1+b_k)u_i(t_k^-,x),$$

$$\frac{\partial u_i(t_k^+,x)}{\partial t} = \frac{\partial u_i(t_k^-,x)}{\partial t} + b_k \frac{\partial u_i(t_k,x)}{\partial t} = (1+b_k)\frac{\partial u_i(t_k^-,x)}{\partial t}.$$

由此可知 $\mathrm{sgn} u_i(t_k^+,x) = \mathrm{sgn} u_i(t_k^-,x)$. 于是有

$$\begin{aligned} Z(t_k^+) - Z(t_k^-) = V'(t_k^+) - V'(t_k^-) = \left(\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \sum_{i=1}^m \int_\Omega (\mathrm{sgn} u_i(t_k^+,x)) \frac{\partial u_i(t_k^+,x)}{\partial t}\varphi(x)\mathrm{d}x - \\ \left(\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \sum_{i=1}^m \int_\Omega (\mathrm{sgn} u_i(t_k^-,x)) \frac{\partial u_i(t_k^-,x)}{\partial t}\varphi(x)\mathrm{d}x = \\ c_k\left(\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \int_\Omega (\mathrm{sgn} u_i(t,x)) \frac{\partial u_i(t_k,x)}{\partial t}\varphi(x)\mathrm{d}x = c_k V'(t_k) = c_k Z(t_k), \end{aligned}$$

即

$$Z(t_k^+) - Z(t_k^-) = c_k Z(t_k). \tag{14}$$

因此可知 $Z(t)$ 是微分不等式(13),(14)的一个最终正解. 但据条件(3)及引理3知,(13),(14)无最终正解,矛盾.

对于条件(4)或(5)成立的情形，可由(11),(14)式或(12),(14)式及引理3类似地推出矛盾. 所以边值问题((1),(B_1))的所有非零解在区域 G 内振动. 证毕.

下面考虑边值问题((1),(B_2))解的振动性.

引理4[23] 设 λ_1 是如下特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0, & x \in \Omega, \lambda \text{ 是常数}, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

的第1特征值, $\varphi_1(x)$ 是与 λ_1 对应的特征函数，则 $\lambda_1 > 0, \lambda_1(x) > 0, x \in \Omega$.

借助于引理4和类似于证明定理1的方法，我们可得以下定理2，具体证明将省略.

定理2 若对任意的 $\theta \in (0,1)$，下列3个条件之一成立：

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma}^t \theta p(s)(s-\sigma)\exp\left(\int_{s-\sigma}^s \theta\lambda_1^{2l-1} r a(r)\mathrm{d}r\right) \prod_{s-\sigma\leqslant t_k<s} (1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{e},$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^t \theta\lambda_1^{2l-1} b(s)(s-\tau)\exp\left(\int_{s-\tau}^s \theta\lambda_1^{2l-1} r a(r)\mathrm{d}r\right) \prod_{s-\tau\leqslant t_k<s} (1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{e},$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma}^t \theta q(s)(s-\rho)\exp\left(\int_{s-\rho}^s \theta\lambda_1^{2l-1} r a(r)\mathrm{d}r\right) \prod_{s-\rho\leqslant t_k<s} (1+c_k)^{-1}\mathrm{d}s > \frac{1}{e},$$

则边值问题((1),(B_2))的所有非零解在区域内振动，其中 λ_1 由问题(15)确定.

注 若用条件

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^t b(s)\exp\left(\int_{s-\tau}^s a(r)\mathrm{d}r\right) \prod_{s-\tau\leqslant t_k<s} (1+b_k)^{-1}\mathrm{d}s > 1$$

代替引理2中的极限条件(参见文献[25]中的定理3)，则还可以得到分别平行于本文定理1和定理2的关于边值问题((1),(B_1))和((1),(B_2))解振动的新结果.

参考文献：

[1] 罗李平,欧阳自根. 一类偶数阶非线性中立型方程的渐进性和振动性[J]. 云南大学学报:自然科学版,2007,29(4):330-334.

[2] 罗李平. 一类中立型时滞抛物偏微分方程的强迫振动性[J]. 数学的实践与认识,2005,35(10):182-189.

[3] 刘春潮,李永昆.一类非线性中立型微分方程的振动定理(英)[J].云南大学学报:自然科学版,2002,24(2):88-92.
[4] 王培光,傅希林,俞元洪.一类时滞双曲方程的振动准则[J].数学研究与评论,1998,18(1):105-111.
[5] 崔保同,俞元洪,林诗仲.具有时滞的双曲型微分方程解的振动性[J].应用数学学报,1996,19(1):80-88.
[6] 何猛省,高述春.双曲时滞偏微分方程解的振动性质[J].科学通报,1992,37(13):1 163-1 166.
[7] LALLI B S, YU Y H, CUI B T. Oscillation of certain partial differential equations with deviating arguments[J]. Bulletin Australian Mathematical Society, 1992, 46(2):373-380.
[8] ERBE L H, FREEDMAN H I, LIU X Z, WU J H. Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth[J]. Journal of Australian Mathematical Society, Series B, 1991, 32(4):382-400.
[9] 罗李平.具非线性扩散系数的脉冲时滞双曲型方程组的振动性[J].自然科学进展,2008,18(3):341-344.
[10] 罗李平,欧阳自根.脉冲中立型时滞抛物偏微分方程组的振动准则[J].应用数学学报,2007,30(5):822-830.
[11] 罗李平,欧阳自根.非线性脉冲中立型时滞抛物方程组解的振动性[J].生物数学学报,2007,22(3):496-502.
[12] 罗李平,欧阳自根.一类非线性脉冲中立型时滞抛物方程组的振动准则[J].工程数学学报,2007,24(4):639-644.
[13] LUO Li-ping. Oscillation theorem of systems of quasilinear impulsive delay hyperbolic equations[J]. Northeastern Mathematical Journal, 2007, 23(3):255-262.
[14] 罗李平,欧阳自根.非线性脉冲时滞双曲型方程组的振动准则[J].南京师范大学学报:自然科学版,2006,29(4):27-31.
[15] 赵琼,刘伟安.一类脉冲时滞双曲型方程组解的振动性[J].数学杂志,2006,26(5):563-568.
[16] LIU A P, XIAO L, LIU T. Oscillation of nonlinear impulsive hyperbolic equations with several delays[J]. Electronic Journal of Differential Equation, 2004, 2004(24):1-6.
[17] 燕居让.脉冲时滞抛物型方程解的振动性[J].数学学报,2004,47(3):579-586.
[18] CUI B T, LIU Y Q, DENG F Q. Some oscillations problems for impulsive hyperbolic differential systems with several delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 146(2-3):667-679.
[19] LUO J W. Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulses[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 133(2-3):309-318.
[20] 邓立虎,葛渭高.脉冲时滞抛物型方程解的振动准则[J].数学学报,2001,44(3):501-506.
[21] 张立琴.具有不依赖于状态脉冲的双曲型偏微分方程的振动准则[J].数学学报,2000,43(1):17-26.
[22] FU X L, LIU X Z. Oscillation criteria for impulsive hyperbolic systems[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 1997, 3(2):225-244.
[23] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial equations of second order[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
[24] PHILOS CH G. A new criterion for oscillatory and asymptofic behavior of delay differential equations[J]. Bulletin Academie Polonaise Sciences, Series Sciences Mathematics Astronom Physics, 1981, 29:367-370.
[25] YAN J R, KOU C H. Oscillation of solutions of impulsive delay differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 254(2):358-370.

Oscillation of systems of impulsive delay hyperbolic equations with high order Laplace operator

LUO Li-ping, YANG Liu, WANG Yan-qun
(Department of Mathematics, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: The oscillation of the systems of a class of impulsive delay hyperbolic equations with high order Laplace operator is discussed. By using the eigenvalue function method and first order impulsive delay differential inequalities, some sufficient conditions for the oscillation of all solutions of the equations are obtained under two kinds of different boundary value conditions. The results fully reflect the influence action of impulsive and delay in oscillation.

Key words: system of hyperbolic equations; oscillation; high order Laplace operator; impulse; delay