云南大学学报（自然科学版），2010，32（3）：299～303　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

三轴液核地球自转的动力学方程* 1

张捍卫，王庆林，郭增长
（河南理工大学 测绘学院，河南 焦作　454003）

摘要：整体地球自转动力学的理论研究一般是在旋转对称模型基础上进行的，并得到了一系列与观测相符合的结论. 但实际上地球是一个非旋转对称的椭球体，甚至是梨形椭球体. 因此，三轴地球模型的自转理论研究应该是具有一定意义的. 在所有量保留到极移平方量级而忽略其更小量级的情况下，给出了三轴液核地球自转的动力学方程. 研究指出，在此精度上三轴液核地球自转的动力学方程是线性耦合的，并得到了三轴液核地球自转的 4 个本征频率. 同时指出，如果在推导过程中保留更小量级，则液核地球自转动力学方程是复杂的非线性方程组，它没有解析解.

关键词：三轴地球模型，液核，本征频率
中图分类号：P 31　**文献标识码**：A　**文章编号**：0258－7971（2010）03－0299－05

地球具有液核的假说始于 19 世纪 30 年代. 在 19 世纪末有学者预言，具有液体核的地球可能存在近周日自由摆动. 20 世纪初，Poincare 发表了《论变形球体的进动》的论文，给出了具有液态核的刚体地球的章动理论. 1948 年 Jeffreys 运用 Poincare 的理论探讨了地球液核的动力学效应，指出由于液核存在，Chandler 摆动的周期将缩短，而主章动项振幅将减少的结论. 此后，Jeffreys 又继续深入研究了这个课题，分别讨论了地壳的弹性形变和地球液核密度不均有的影响. 1979 年 Wahr[1] 提出了弹性、椭球成层、旋转、无海洋、自引力和具有液核的动力学模型，并在 1986 年又给出了滞弹微椭、自转、无海洋、自引力和具有液体外核和固体内核地球模型的动力学理论[2]. 1997 年 Dehant&Defraigne[3] 考虑了地幔的非弹性和地幔对流的动力学效应，给出了一个新的非刚体地球章动转换函数；2002 年 Mathews[4] 考虑了核幔边界和内核边界处的电磁效应、地幔的非弹性、海洋效应等；2002 年 Buffett[5] 考虑了地幔滞弹性、海洋潮汐、液体外核和地幔之间以及固体内核和液体外核之间的电磁耦合效应，并考虑了非线性的影响. 虽然根据目前的液核地球模型动力学理论已能满意地解释极移和章动现象，但基本上都是假设地球是旋转对称的椭球体，并在 $O(m\varepsilon)$（极移和椭率乘积量级）上给出动力学方程. 1989 年 Arnold[6] 研究了非旋转对称刚体的自转理论，2002 年 Van Hoolst[7] 研究了地球扁率的二阶项和其三轴性对自转运动的影响，给出了相关的理论公式和自转本征模. 2003 年 Souchay[8] 给出了三轴天体（地球、火星等）对行星自转影响的一般性结论，但没有考虑到非线性方程中可能存在的多解问题. 2005 年 Folgueira [9] 利用哈密尔顿函数方法对三轴天体的自由摆动进行了研究，但也只考虑了它的线性解.

本文给出了三轴液核地球自转的动力学方程. 在推导过程中，对 Rochester 的耗散力矩表达式进行了变换，使得耦合系数 K 变为无量纲的参数，从而使得动力学方程的结构更加对称和美观；且方程的每一项都保留到极移的平方量级，即 $O(m^2)$ 量

* **收稿日期**：2009－06－12
基金项目：河南省科技创新人才杰出青年基金资助（094100510023）；地球空间环境与大地测量教育部重点实验室测绘基础研究基金资助（0702）；河南省基础与前沿研究项目资助（082300460140）
作者简介：张捍卫（1967－），男，辽宁人，博士后，教授，主要从事动力大地测量和天文地球动力学的研究. E－mail：zhanwei800@163.com

级.并指出在此精度上三轴液核地球自转的动力学方程是线性耦合的,进而得出了三轴液核地球自转存在4个本征频率.

1 三轴液核地球自转的动力学方程

旋转对称液核地球自转的理论已解决,并得到了与观测相符合的结论.由于实际地球是非旋转对称的,那么能否从三轴液核地球模型出发,能得出一些有价值的结论?这是从事地球自转研究的学者所关心的.这里仍然假设地球是由弹性地幔、均质理想流体且不可压缩的液态核组成,在核幔边界上存在惯性耦合和耗散耦合.

1.1 液核地球角动量方程的一般形式 在地球固定参考系中,地幔、地核的角动量方程为[10-12]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_m}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}_m = -\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{L}_m, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_f}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}_f = -\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{L}_f . \end{cases} \tag{1}$$

这里,$\boldsymbol{\omega}$ 是地壳和地幔相对惯性空间的角速度;$\boldsymbol{H}_m$ 和 $\boldsymbol{H}_f$ 分别是壳幔和液核的角动量,$\boldsymbol{N}$,$\boldsymbol{\Gamma}$ 分别是核幔边界上的惯性、耗散力矩;$\boldsymbol{L}_m$ 和 $\boldsymbol{L}_f$ 分别是壳幔和液核受到的外力矩.两式相加,可得整体地球自转的角动量方程

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_m + \boldsymbol{H}_f$,$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_m + \boldsymbol{L}_f$ 是整体地球的角度量和作用在其上的外力矩.角动量 $\boldsymbol{H}_m$,$\boldsymbol{H}_f$ 和 $\boldsymbol{H}_f$ 的表达式为

$$\boldsymbol{H}_m = \boldsymbol{C}_m \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{h}_m, \boldsymbol{H}_f = \boldsymbol{C}_f \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{h}_f;$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{h}. \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_m + \boldsymbol{C}_f$ 是地球的惯量张量;$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{h}_f$,$\boldsymbol{h}_m$,$\boldsymbol{h}_f$ 分别是由于壳幔、液核内物质相对地球固定参考系的流动而产生的相对角动量.

1.2 旋转角速度的约定、惯量张量和相对角动量的表述 在地球固定参考系中,我们约定

$$\omega = \Omega m_1 \hat{i} + \Omega m_2 \hat{j} + \Omega(1 + m_3)\hat{k},$$
$$\omega_f = \Omega m_{f1} \hat{i} + \Omega m_{f2} \hat{j} + \Omega m_{f3} \hat{k}. \tag{4}$$

这里 ω_f 是液核相对壳幔(或地球固定参考系)的旋转角速度;无量纲参数 m_1,m_2,m_3,以及 m_{f1},m_{f2} 和 m_{f3} 的量级为 $10^{-6} \sim 10^{-8}$,此量级记为 $O(m)$;Ω 为地球自转的恒星角频率.

地幔惯量张量 $\boldsymbol{C}_m$ 的矩阵形式为:$\boldsymbol{C}_m = (C_{mij})$,且

$$C_{m11} = A_m + c_{m11}, C_{m22} = B_m + c_{m22}, C_{m33} = C_m + c_{m33}; C_{mij} = c_{mij}(i \neq j). \tag{5}$$

对于 $\boldsymbol{C}_f$,$\boldsymbol{C}$ 的张量元表述与(5)式类同,只是分别把下标中的 m 变换为 f、和去掉.在(5)式中惯量张量元的大写字母,例如:A,A_m,A_f 等为常数;而小写字母,例如:c_{ij},c_{fij} 则是时间的函数;且惯量张量是对称的.由于地球接近旋转对称的椭球体,可认为 c_{12},c_{f12} 比 c_{13},c_{f13} 要小3个数量级.

在忽略Love数的频率特性后,可得在引潮力和地球自转变化的激发作用下,整体地球惯量张量元的修正为[10-12]

$$c_{13} = \frac{k_{21}}{k_f}(C - A)(m_1 - W_1),$$
$$c_{23} = \frac{k_{21}}{k_f}(C - A)(m_2 - W_2), \tag{6}$$
$$c_{33} = \frac{4}{3}\frac{k_{20}}{k_f}(C - A)(m_3 + W_3). \tag{7}$$

其中

$$W_1 = \frac{2D}{\Omega^2 R^2}\sum_j A_{21j}\sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}),$$
$$W_2 = \frac{2D}{\Omega^2 R^2}\sum_j A_{21j}\cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j}); \tag{8}$$
$$W_3 = \frac{3D}{2\Omega^2 R^2}\sum_j A_{20j}\cos(\omega_{20j}t + \beta_{20j}). \tag{9}$$

这里 $k_{20} = 0.295\,25$,$k_{21} = 0.294\,70$,分别是带谐潮、田谐潮位Love数的标称值,$k_f = 0.938$,是长期Love数;$D = 26\,335.838\ \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$,为Doodson常数;$A_{nmj}$,$\omega_{nmj}$ 和 β_{nmj} 分别为无量纲的潮波振幅、角频率和相位;R 为地球平均球体半径.W_1,W_2,W_3 的量级为 10^{-5} 或更小.

在忽略Love数的频率特性后,可得在引潮力和地球自转变化的激发作用下,地球液核惯量张量元的修正为[10-12]

$$c_{f13} = A_f\{\gamma \cdot (m_1 - W_1) + \beta \cdot m_{f1}\},$$
$$c_{f23} = A_f\{\gamma \cdot (m_2 - W_2) + \beta \cdot m_{f2}\}, \tag{10}$$
$$c_{f33} = \frac{4\alpha}{3}\frac{k_{20}}{k_f}(C - A)(m_3 + W_3). \tag{11}$$

这里 $\alpha = 0.211\,5$,$\beta = 0.557\,5 \times 10^{-3}$,

$\gamma = 1.919 \times 10^{-3}$.

整体地球、液核的相对角动量为[10-12]

$$h_1=h_{f1}=A_f\Omega m_{f1},h_2=h_{2f}=A_f\Omega m_{f2},$$

$$h_3=h_{f3}\approx h_1\times O(m). \tag{12}$$

此时，选择了壳幔的 Tisserand 轴作为地球固定参考系的坐标轴.

1.3　惯性力矩、耗散力矩和引潮力矩的表述　首先约定以下符号

$$\sigma_1=\frac{C-B}{A},\sigma_2=\frac{C-A}{B},e=\frac{C-A}{A},$$

$$H=\frac{C-A}{C},\sigma_3=\frac{B-A}{C}. \tag{13}$$

$$\sigma_{f1}=\frac{C_f-B_f}{A_f},\sigma_{f2}=\frac{C_f-A_f}{B_f},e_f=\frac{C_f-A_f}{A_f},$$

$$\sigma_{f3}=\frac{B_f-A_f}{C_f}. \tag{14}$$

其中在(13)式中的前 4 项，(14)式中的前 3 项的量级都为 10^{-3}，此量级记为 $O(\varepsilon)$；2 式的最后一项量级为 10^{-5}.

核幔边界的惯性力矩与耗散力矩第 1、第 2 分量的和分别为[10~12]

$$\frac{N_1+\Gamma_1}{A_f\Omega^2}=-(\gamma-e_f)(m_2-W_2)-K(1+\mathrm{i}\eta)m_{f1}-(\beta-e_f)m_{f2}, \tag{15}$$

$$\frac{N_2+\Gamma_2}{A_f\Omega^2}=\frac{A_f}{B_f}(\gamma-e_f)(m_1-W_1)+\frac{A_f}{B_f}(\beta-e_f)m_{f1}-\frac{A_f}{B_f}K(1+\mathrm{i}\eta)m_{f2}. \tag{16}$$

这里 $\mathrm{i}^2=-1$. 其中 K 为耦合系数，$K<<10^{-3}$；对于电磁耦合 $\eta=1$，对于粘滞耦合 $\eta=0.1$. 惯性力矩、耗散力矩的第 3 分量要比第 1、第 2 分量至少小 $O(m)$.

二阶引潮力矩的表达式为[10-12]

$$\frac{L_1}{A\Omega^2}=\xi_1W_2,\frac{L_2}{B\Omega^2}=-\xi_2W_1,\frac{L_{f1}}{A_f\Omega^2}=\xi_{f1}W_2,$$

$$\frac{L_{f2}}{B_f\Omega^2}=\xi_{f2}W_1. \tag{17}$$

这里无量纲参数 $\xi_1,\xi_2,\xi_{f1},\xi_{f2}$ 的量级为 $O(m)$ 或更小，其具体表达式见文献[10].

1.4　无外力情况下，在精度上的液核地球自转动力学方程　把有关公式代入到(2)式，以及(1)式的第 2 式，使得方程左端每一项化成无量纲后并保留到 $O(m^2)$ 或 $O(m\varepsilon^2)$ 量级，并在忽略外力矩情况下($W_1=0,W_2=0,W_3=0$)有

$$\begin{cases}\frac{1}{\Omega}\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)\dot{m}_1+\left\{\sigma_1-\frac{k_{21}}{k_f}e\right\}m_2-\frac{A_f}{A}m_{f2}+\\ \frac{A_f}{A\Omega}\dot{m}_{f1}=0,\\ \frac{1}{\Omega}\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}\sigma_2\right)\dot{m}_2-\left\{\sigma_2-\frac{k_{21}}{k_f}\sigma_2\right\}m_1+\frac{A_f}{B}m_{f1}+\\ \frac{A_f}{B\Omega}\dot{m}_{f2}=0,\\ \frac{1}{\Omega}(1+\gamma)\dot{m}_1+(\sigma_{f1}-e_f)m_2-\tilde{\alpha}_3'm_{f2}+\\ \frac{1}{\Omega}(1+\beta)\dot{m}_{f1}=0,\\ \frac{1}{\Omega}\left(1+\frac{A_f}{B_f}\gamma\right)\dot{m}_2-\left\{\sigma_{f2}-\frac{A_f}{B_f}e_f\right\}m_1+\frac{A_f}{B_f}\tilde{\alpha}_3'm_{f1}+\\ \frac{A_f}{B_f\Omega}(1+\beta)\dot{m}_{f2}=0.\end{cases} \tag{18}$$

这里上标 1 点指的是相对时间的导数；$\tilde{\alpha}_3'=(1+e_f)-\mathrm{i}K(1+\mathrm{i}\eta)$. 利用(13)和(14)式，上式进一步化为

$$\begin{cases}\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)\dot{m}_1+\left\{1-\frac{k_{21}}{k_f}\right\}e\Omega m_2-\frac{A_f}{A}\Omega m_{f2}+\frac{A_f}{A}\dot{m}_{f1}=\\ \frac{B-A}{A}\Omega m_2,\\ \left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)\dot{m}_2-\left\{1-\frac{k_{21}}{k_f}\right\}e\Omega m_1+\frac{A_f}{A}\Omega m_{f1}+\frac{A_f}{A}\dot{m}_{f2}=\\ -\frac{B-A}{A}\dot{m}_2,\\ (1+\gamma)\dot{m}_1-\{(1+e_f)-\mathrm{i}K(1+\mathrm{i}\eta)\}\Omega m_{f2}+\\ (1+\beta)\dot{m}_{f1}=\frac{B_f-A_f}{A_f}\Omega m_2,\\ (1+\gamma)\dot{m}_2+\{(1+e_f)-\mathrm{i}K(1+\mathrm{i}\eta)\}\Omega m_{f1}+\\ (1+\beta)\dot{m}_{f2}=\frac{B_f-A_f}{A_f}\dot{m}_2.\end{cases} \tag{19}$$

另外，还有一个关于 m_3 的独立方程. 可见，在 $O(m^2)$ 或 $O(m\varepsilon^2)$ 的精度上，液核地球的极移与自转速率变化是分离开来的. (19)式就是三轴液核地球模型的自转动力学方程.

令无量纲参数为

$$\alpha_1=\frac{A_f}{A}\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)^{-1},\alpha_2=\frac{1+\beta}{1+\gamma},$$

$$\tilde{\alpha}_3=\frac{(1+e_f)-\mathrm{i}K(1+\mathrm{i}\eta)}{1+\gamma}. \tag{20}$$

$$\sigma_c=\left\{1-\frac{k_{21}}{k_f}\right\}e\times\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)^{-1},$$

$$Q=\frac{B-A}{A}\left(1+\frac{k_{21}}{k_f}e\right)^{-1},Q_f=\frac{B_f-A_f}{A_f}\frac{1}{1+\gamma}.\quad(21)$$

则(19)式变为

$$\begin{cases}\dot{m}_1+\sigma_c\Omega m_2+\alpha_1\dot{m}_{f1}-\alpha_1\Omega m_{f2}=Q\Omega m_2,\\ \dot{m}_2-\sigma_c\Omega m_1+\alpha_1\dot{m}_{f2}+\alpha_1\Omega m_{f1}=-Q\,\dot{m}_2,\\ \dot{m}_1+\alpha_2\dot{m}_{f1}-\tilde{\alpha}_3\Omega m_{f2}=Q_f\Omega m_2,\\ \dot{m}_2+\alpha_2\dot{m}_{f2}+\tilde{\alpha}_3\Omega m_{f1}=-Q_f\dot{m}_2.\end{cases}\quad(22)$$

把(22)式的第1式作为实部、第2式作为虚部相加;第3式作为实部、第4式作为虚部相加后可以变为复数形式的方程组

$$\begin{cases}\dot{\tilde{m}}-\mathrm{i}\sigma_c\Omega\tilde{m}+\alpha_1\dot{\tilde{m}}_f+\mathrm{i}\alpha_1\Omega\tilde{m}_f=Q(\Omega m_2-\mathrm{i}\dot{m}_2),\\ \dot{\tilde{m}}+\alpha_2\dot{\tilde{m}}_f+\mathrm{i}\tilde{\alpha}_3\Omega\tilde{m}_f=Q_f(\Omega m_2-\mathrm{i}\dot{m}_2).\end{cases}\quad(23)$$

这里令 $\tilde{m}=m_1+\mathrm{i}m_2,\tilde{m}_f=m_{f1}+\mathrm{i}m_{f2}$.

2 三轴液核地球的自由摆动

在(22)式中,假设其解为

$$m_1=X_1\cos(\sigma\Omega t+\varphi),m_2=X_2\sin(\sigma\Omega t+\varphi);\quad(24)$$

$$m_{f1}=Y_1\cos(\sigma\Omega t+\varphi),m_{f2}=Y_2\sin(\sigma\Omega t+\varphi).\quad(25)$$

代入(22)式可得

$$\begin{pmatrix}-\sigma & (\sigma_c-Q) & -\alpha_1\sigma & -\alpha_1\\ -\sigma_c & (1+Q)\sigma & \alpha_1 & \alpha_1\sigma\\ -\sigma & -Q_f & -\alpha_2\sigma & -\tilde{\alpha}_3\\ 0 & (1+Q_f)\sigma & \tilde{\alpha}_3 & \alpha_2\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=0.\quad(26)$$

要使得(26)式有解,则系数行列式必为0,在忽略 Q,Q_f 情况下其近似解为

$$\sigma_1\approx\left(1-\frac{A_f}{A}\right)^{-1}\left(1-\frac{k_{21}}{k_1}\right)e,\quad(27)$$

$$\tilde{\sigma}_{2,3}\approx-\left[1+\frac{A}{A-A_f}(e_f-\beta+K\eta)\right]\pm\mathrm{i}\frac{AK}{A-A_f},\sigma_4=0.\quad(28)$$

其中 $\sigma_1\Omega$ 为Chandler摆动频率.可见,由于地幔弹性和海洋的存在,而使得其周期比欧拉周期长160 d;由于液核的存在,而使得其周期比欧拉周期短30 d.$\tilde{\sigma}_{2,3}\Omega$ 为近周日自由摆动频率,从惯性空间看为自由核章动(FCN);由于核幔边界的耦合效应使得 $\tilde{\sigma}_{2,3}\Omega$ 为复数,所以近周日自由摆动的振幅存在着衰减(增强).$\sigma_4\Omega=0$ 意味着自由极移存在一个常数项.

3 结果与讨论

如果只在 $O(m\varepsilon)$ 精度上考虑问题,此时(23)式右端为0,则化为了旋转对称液核地球模型的自由极移方程组,其解为

$$\tilde{m}(t)=A_t\exp(\mathrm{i}\sigma_1\Omega t)+A_2\exp(\mathrm{i}\tilde{\sigma}_2\Omega t).\quad(29)$$

其中 A_1,A_2 为积分常数.因此,旋转对称地球模型的解是三轴地球模型的一个特例.

在三轴地球模型下,地球的近周日自由摆动的振幅不但可能衰减也可能增强;另外自由极移可能存在一个常数项.推导中,如果保留到更小的量级,则将是一个非线性方程组,而且此方程组也不能改化到类似于空间自由运动刚体的Euler方程,因此也不能通过椭圆函数方法求解.

参考文献:

[1] WAHR J M. The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth[D], USA: University of Colorado, 1979.

[2] WAHR J M, BERGEN Z. The effects of mantle anelasticity on nutations Earth tides and tidal variations in rotation rate[J]. Geophysical Journal International, 1986, 87(2): 633-668. doi: 10.1111/j.1365-246X.1986.tb06642.x.

[3] DEHANT V, DEFRAIGNE P. New transfer functions for nutations of a nonrigid Earth[J]. Journal of Geophysical Research, 1997, 102(B12): 27 659-27 687.

[4] MATHEWS P M, HERRING T A, BUFFET B A. Modeling of nutation-precession: New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth´s interior[J]. Journal of Geophysical Research, 2002, 107(B4): ETG3-1-ETG3-30. 10.1029/2001 JB000390.

[5] BUFFETT B A, MATHWS P M, HERRING T A. Modeling of nutation – precession: Effects of electromagnetic coupling[J]. Journal of Geophysical Research, 2002, 107(B4): ETG5-1-ETG5-16. 10.1029/2001JB000056.

[6] ARNOLD V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. 2nd Edition, New York: Springer – Verlag, 1989.

[7] Van Hoolst T, DEHANT V. Influence of triaxiality and