云南大学学报（自然科学版），2010，32（3）：254～257　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

完全图的循环齐次分解[*1]

张晓辉，卢建岳，李根亮，武慧红，潘江敏
（云南大学 数学系，云南 昆明　650091）

摘要:得到了一般情形下完全图存在循环齐次分解的充要条件,结论推广了著名组合专家 Praeger 和 Li 在 G/M 为循环群的条件下得到的完全图存在(M,G)循环齐次分解的充要条件.

关键词:完全图；齐次分解；循环齐次分解;Cayley 齐次分解
中图分类号:G 642.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**:0258－7971(2010)03－0254－04

设 Γ 是一个图，$V\Gamma$,$A\Gamma$ 分别表示 Γ 的顶点集和弧集,$\mathrm{Aut}(\Gamma)$表示 Γ 的全自同构群. 图 Γ 的因子分解是将 Γ 分解为弧集互不相交的一些子图的并,每个子图称为 Γ 的一个因子. 如果这些因子都同构,则称这个分解为同构因子分解. 由于一般同构因子分解中图的自同构群不能诱导其因子上的群作用,从而难以建立系统的理论来进行研究,这使得图的同构因子分解只能在一些非常特殊的图类上进行. 本文我们研究完全图的齐次因子分解,它由著名的组合专家 Praeger 和 Li 首先提出并研究[1].

定义 1　设 Γ 为一个图,如果存在弧集 $A\Gamma$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$ 和子群 $M<G\leqslant\mathrm{Aut}(\Gamma)$,使得:

(ⅰ)M 在顶点集 $V\Gamma$ 上的作用是传递的且稳定每一个 Pi;

(ⅱ)$\boldsymbol{P}$ 是一个 G－不变划分且 G 在 $\boldsymbol{P}$ 上的诱导作用是传递的;

则称$(\Gamma,\boldsymbol{P})$为一个指数 k 的(M,G)齐次分解. 如果 $M\lhd G$ 且 M 在 $V\Gamma$ 上正则，则称$(\Gamma,\boldsymbol{P})$为 M－Cayley 齐次分解. 特别地，如果 M 为循环群,则称$(\Gamma,\boldsymbol{P})$为 M－循环齐次分解.

对称图的循环齐次分解受到了学者们的极大关注[2－13]. 其中文献[2]刻画了完全多部图的循环齐次分解,文献[5]研究了完全图的边传递循环齐次分解,文献[7]研究了完全图的一般循环齐次分解. 特别地，在文献[1]中，Praeger 和 Li 在 G/M 为循环群的条件下，给出了完全图存在循环齐次分解的充要条件，但一般情形尚未解决. 本文首先解决了这个问题，得到了如下结果：

定理 1　设 $\Gamma=K_n$ 为完全图，其中 $n=p_1^{d_1}p_2^{d_2}\cdots p_r^{d_r}$ 为 n 的标准分解式,则 Γ 存在指数 k 的循环齐次分解的充要条件为 $k\mid(p_i-1)$,其中 $i=1,2,\cdots,r$.

为了证明定理 1,首先介绍几个预备引理.

引理 1[10]　设 $G=\langle a\rangle\cong Z_n$,$n=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$ 为标准分解式，则 $\mathrm{Aut}(G)\cong\mathrm{Aut}(Z_{p_1^{r_1}})\times\cdots\times\mathrm{Aut}(Z_{p_s^{r_s}})$.

引理 2[2]　设图 Γ 有指数为 k 的(M,G)齐次分解,则 $k\mid\mathrm{val}(\Gamma)$.

设 G 是一个群，$S\subseteq G\setminus\{1\}$,我们称如下定义的图为群 G 关于 S 的 Cayley 图：$V\Gamma=G$,顶点 u 和 v 邻接的充要条件为 $vu^{-1}\in S$. 这个 Cayley 图记为 $\mathrm{Cay}(G,S)$.

引理 3[1]　设 M 为群，$G=M{:}H$，其中 $H\leqslant\mathrm{Aut}(M)$. 设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(M,S)$，$\Gamma_i=\mathrm{Cay}(M,S_i)$，$i\in\{1,2,\cdots,k\}$. 设 $P_i=A\Gamma_i$，$\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$,$\boldsymbol{S}=\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$,则$(\Gamma,\boldsymbol{P})$为 M－Cayley 齐次分解的充要条件

* **收稿日期**:2009－04－07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(K1020261)；云南省自然科学基金资助项目(2008CD060)；云南省教育厅基金资助项目(07Z10533).
作者简介：张晓辉(1982－　)，女，河北人,硕士生，主要从事群与图方面的研究.
通讯作者:潘江敏(1963－　)，男,湖北人,教授,主要从事置换群和代数图论的研究.

为：

（ⅰ）$S=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}S_i$，且对每个 $i\neq j$，有 $S_i\cap S_j=\phi$；

（ⅱ）$\boldsymbol{S}$ 为群 H 的一个不变划分，且 H 在 $\boldsymbol{S}$ 上的诱导作用是传递的.

对给定的群 M，下面我们给出构造 $M-$Cayley 齐次分解的一种方法.

构造 1　设 M 为群，$H\leqslant \mathrm{Aut}(M)$，$S\subseteq M\setminus\{1\}$ 为 H 的稳定子集，H 在 S 上的轨道集为 $\boldsymbol{O}=\{O_1,O_2,\cdots,O_r\}$. 设 $x_i\in O_i$，R 为 H 的一个子群，且包含 $\langle H_{x_i}\mid i=1,2,\cdots,r\rangle$. 令 $B_i=x_i^R\subseteq O_i$ 为 R 在元素 x_i 上的轨道，$S_1=B_1\cup\cdots\cup B_r$. 选取 R 在 H 中一个陪集代表元集 $\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}$，使得 $h_1=1$. 令 $S_i=S_1^{h_i}$.

容易证明：S 为 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 的不交并. 此外，设 $\Gamma_i=\mathrm{Cay}(M,S_i)$，$P_i=A\Gamma_i$，$\Gamma=\mathrm{Cay}(M,S)$. 令 $G=M:H$，则 M 在 $V\Gamma$ 上正则且稳定每个集合 P_i，$\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$ 为弧集 $A\Gamma$ 的一个划分，且 G 在 $\boldsymbol{P}$ 上诱导作用是传递的，所以 $(\Gamma,\boldsymbol{P})$ 为一个指数为 $|H:R|$ 的 $M-$Cayley 齐次分解.

下面的命题 1 给出了当 M 为素数幂阶循环群时，存在具有 $M-$循环齐次分解的图的充要条件.

命题 1　设 $M\cong Z_{p^d}$，p 为素数，则存在图 Γ 具有指数 k 的 $M-$循环齐次分解的充要条件为 $k\mid p^{d-1}(p-1)$.

证明　必要性. 设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(M,S)$ 存在指数 k 的齐次分解，设 $\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$，其中 $P_i=A\Gamma_i$. 设 $G=M:H$，$H\leqslant\mathrm{Aut}(M)\cong Z_{p^d}^*$. 因为 G 在 $\boldsymbol{P}$ 上的诱导作用是传递的，所以 H 在 P 上传递，从而 H 在 $\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$ 上也传递，故 k 整除 $|H|$. 注意到 $|H|$ 整除 $|Z_{p^d}^*|$，$|Z_{p^d}^*|=p^{d-1}(p-1)$，所以 $k\mid p^{d-1}(p-1)$.

充分性. 当 p 为奇素数时，$Z_{p^d}^*=\langle r\rangle$，其中 r 为 p^d 的原根. 因为 $k\mid p^{d-1}(p-1)$，设 $l=p^d(p-1)/k$，$H=\langle r^l\rangle$，则 $|H|=k$. 设 $S=1^{Z_{p^d}^*}$ 表示 M 中的元素 1 在 $Z_{p^d}^*$ 作用下的轨道，则 $|S|=p^{d-1}(p-1)$，$Z_{p^d}^*$ 在 S 上是正则的，且 H 在 S 上恰有 l 个轨道 $O_1,O_2,\cdots,O_l$. 对任意 $x_i\in O_i$，有 $H_{x_i}=1$，令 $R=1$，由构造 1，令 $S_1=\{x_i^R\mid 1\leqslant i\leqslant l\}$，$S_i=S_1^{h_i}$，其中 $h_1,h_2,\cdots,h_k$ 为 R 在 H 中的一个陪集代表元集，使得 $h_1=1$，设 $G=M:H$，则 $(\Gamma,\boldsymbol{P})$ 为一个 $M-$循环齐次分解，且指数为 $|H:R|$.

设 $p=2$，当 $d\leqslant 2$，结论显然成立. 当 $d\geqslant 3$ 时，$Z_{p^d}^*=\langle 5\rangle\times\langle -1\rangle\cong Z_{2^{d-2}}\times Z_2$. 因为 $k\mid 2^{d-1}$，可设 $k=2^e$，$e\leqslant d-1$. 设 $S=1^{Z_{p^d}^*}$，则 $Z_{p^d}^*$ 在 S 上正则. 因为 H 为交换群，H 必有指数为 k 的子群 R，且对任意 $x\in S$，都有 $H_x=1\leqslant R$，所以由构造 1 可知存在 $(\Gamma,\boldsymbol{P})$ 的指数 $|H:R|$ 的 $M-$循环齐次分解. 证毕.

下面的命题 2 给出了素数幂阶完全图存在循环齐次分解的充要条件.

命题 2　设 $\Gamma=K_{p^d}$ 为完全图，p 为奇素数，则存在 $A\Gamma$ 的划分 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\Gamma,\boldsymbol{P})$ 为一个指数 k 的 $M-$循环齐次分解的充要条件为 $k\mid(p-1)$.

证明　必要性. 设 $G=M:H$，$H\leqslant\mathrm{Aut}(M)=Z_{p^d}^*$. 因为 $\mathrm{val}(\Gamma)=p^d-1$，$\Gamma$ 存在一个指数 k 的 $M-$循环齐次分解，故 $k\mid(p^d-1)$. 另一方面，由于 G 在 $\boldsymbol{P}$ 上传递，故 H 也在 $\boldsymbol{P}$ 上和 $\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$ 上都传递，所以 $k\mid|Z_{p^d}^*|$，从而 $k\mid(p^{d-1}(p-1),p^d-1)$，故 $k\mid(p-1)$.

充分性. 设 $k\mid(p-1)$，$S=M\setminus\{0\}$，$H=\mathrm{Aut}(M)$，则 $H\cong Z_{p^d}^*=\langle r\rangle\cong Z_{p^{d-1}(p-1)}$ 在 S 上恰有 d 个轨道 1^H，p^H，$\cdots$，$(p^{d-1})^H$，其长度分别为 $p^{d-1}(p-1)$，$p^{d-2}(p-1)$，$\cdots$，$p-1$，1. 注意到如果 $i<j$，则点稳定子群 $H_{p^i}\subseteq H_{p^j}$，所以在 H 中存在包含 $\langle H_x\mid x\in X\rangle$ 的子群 R，使得 $|H:R|=k$. 由构造 1 可知，完全图 $\Gamma=K_{p^d}$ 存在指数 k 的 $M-$循环齐次分解. 证毕.

由命题 2 可得到下面的推论 1.

推论 1　设 p 为奇素数，$M\cong Z_{p^d}$，$S=M\setminus\{1\}$，则有：

(1) $\mathrm{Aut}(M)$ 在 S 上恰有 d 个轨道，长度分别为 $p^{d-1}(p-1)$，$p^{d-2}(p-1)$，$\cdots$，$p-1$，1.

(2) 若 $k\mid(p-1)$，$l=\dfrac{p^{d-1}(p-1)}{k}$，$H=\langle\sigma^l\rangle$，其中 $\langle\sigma\rangle=\mathrm{Aut}(M)$，则 H 在 S 上恰有 l 个轨道，且每个轨道的长度都为 k. 特别地，H 在每个轨道上正则.

引理 4　设完全图 $\Gamma=K_n$ 有 1 个指数 k 的 $M-$Cayley 齐次分解. 若 M 有正规 Sylow $p-$子群 M_p，则完全图 K_{p^d} 一定存在 1 个指数为 k 的 M_p-循环齐次分解，其中 $p^d=|M_p|$.

证明 因为图 $\Gamma=K_n$ 存在1个指数 k 的 M – 循环齐次分解,设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(M,S)$, $S=M\backslash\{1\}$. 设 $(\Gamma,\boldsymbol{P})$ 为指数 k 的 M – Cayley 齐次分解,其中 $\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$, $G=M:H,H\leqslant\mathrm{Aut}(M)$.

设 $S'=M_p\cap S$, $\sum=\mathrm{Cay}(M_p,S')$. 设 $S_i'=S_i\cap M_p$, $\sum_i=\mathrm{Cay}(M_p,S_i')$. 设 $P_i'=A\Gamma_i'$ 的弧集 $\boldsymbol{P}'=\{P_1',P_2',\cdots,P_k'\}$. 令 $G'=M_p:H'$,其中 $H'=H|_{M_p}$ 为 H 在其特征子群 M_p 上的限制. 下面证明 $(\sum,\boldsymbol{P}')$ 是一个指数 k 的 M_p – 循环齐次分解.

首先,由 $S=M\backslash\{1\}$,可得 $S'=M_p\cap S=M_p\backslash\{1\}$,即 $\sum\cong K_{p^d}$ 为完全图. 又 $S'=M_p\cap(\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i)=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(M_p\cap S_i)=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i'$,且对任意 $i\neq j$,有 $S_i'\cap S_j'=\phi$. 进一步,存在 $h\in H$,使得 $S_i^h=S_j$,所以 $(S_i')^{h'}=(S_i')^h=S_j'$,即 H 在 $\{S_1,S_2,\cdots,S_k\}$ 的诱导作用是传递的,故由引理3知 $(\sum,\boldsymbol{P}')$ 是1个指数 k 的 M_p – 循环齐次分解. 证毕.

下面证明定理1.

定理1证明 当 n 为偶数时,由文献[1]可知命题成立. 下设 n 为奇数. 设 $\Gamma=K_n$ 有1个指数为 k 的循环齐次分解, 由引理3,对每个 i,完全图 $K_{p_i^{d_i}}$ 也存在指数 k 的循环齐次分解,故由命题2可知 $k|(p_i-1)$.

反之,设对每个 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$,存在 $k\geqslant 2$,使得 $k|(p_i-1)$. 设 M_i 为 $p_i^{d_i}$ 阶循环群,则 $\mathrm{Aut}(M_i)=\langle\sigma_i\rangle\cong Z_{p_i^{d_i-1}(p_i-1)}$ 为循环群,$\langle\sigma_i^{l_i}\rangle\leqslant\mathrm{Aut}(M_i)$ 为 k 阶子群,其中 $l_i=\dfrac{p_i^{d_i-1}(p_i-1)}{k}$. 令 $M=M_1\times M_2\times\cdots\times M_r$,则 M 为 n 阶循环群,且 $\mathrm{Aut}(M)=\mathrm{Aut}(M_1)\times\mathrm{Aut}(M_2)\times\cdots\times\mathrm{Aut}(M_r)$. 令 $\Gamma=\mathrm{Cay}(M,M\backslash\{1\})$,则 $\Gamma\cong K_n$. 设 $H=\langle(\sigma_1^{l_1},\sigma_2^{l_2},\cdots,\sigma_r^{l_r})\rangle\leqslant\mathrm{Aut}(M)$, $G=M:H$,则 $G\leqslant\mathrm{Aut}(\Gamma)$. 由命题2的推论1可知 H 作用在 S 上恰有 $\dfrac{(n-1)}{k}$ 个轨道,且每个轨道的长度为 k,H 在每个轨道上正则. 设 $R=\{1\}$,由构造1,可得 K_n 有1个指数为 k 的循环齐次分解使得 $k=|H:R|$. 证毕.

参考文献:

[1] LI C H,PRAEGER C E. On partitioning the orbitals of a transitive permutation group[J]. Trans Amer Math Soc,2003,355:637-653.

[2] GIUDICI M,LI C H,POTOCNIK P,et al. Homogeneous factorizations of graphs and digraphs[J]. European J Combin,2006,27:11-37.

[3] GIUDICI M,LI C H,POTOCNIK P,et al. Homogeneous factorisations of complete multipartite graphs[J]. Discrete Math,2007,307:415-431.

[4] LI C H. Finite edge – transitive Cayley graphs and rotary Cayley maps[J]. Trans Amer Math Soc,2006,358:4 605-4 635.

[5] STRINGER L. Homogeneous factorisations of complete digraphs[D]. M Sc Dissertion:The University of Western Australia,2004.

[6] LIM K. Edge – transitive homogeneous factorisations of complete graphs[D]. M Sc Dissertion:The University of Western Australia, 2003.

[7] LI C H,PRAEGER C E. Self – complementary vertex – transitive graphs need not be Cayley graphs[J]. Bull London Math Soc, 2001,33(6):653-661.

[8] LI C H,PRAEGER C E,SRINGER L. Common circulant homogeneous factorisations of the complete digraphs[J]. Discrete Math,to appear.

[9] 张远达. 有限群构造[M]. 北京:科学出版社,1982.

[10] 徐明曜. 有限群导引(上,下册)[M]. 北京:科学出版社,1999.

[11] GURALNICK R, LI C H, PRAEGER C E,et al. On orbital partitions and exceptionality of primitive permutation groups[J]. Trans Amer Math Soc, 2004,356:4 857-4 872.

[12] 潘江敏. 有限交换群的自同构群[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2003,25(2): 88-90.

[13] PAN Jiang-min. Orders of periodic elements of general linear groups over any field[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2005,27(5): 269-271.

Circulant homogenous factorisations of complete graphs

ZHANG Xiao-hui, LU Jian-yue, LI Gen-liang, WU Hui-hong, PAN Jiang-min
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: A necessary and sufficient condition for complete graphs having circulant homogenous factorisations has been obtained, which generalizes a necessary and sufficient condition, given by praeger and Li, for complete graphs having (M, G) circulant homogenous factorisation under the condition that G/M is a cyclic group.

Key words: complete graph; homogeneous factorisation; circulant homogeneous factorisation; Cayley homogenous factorisation

* *

(上接第 253 页)

The existence of common fixed points for a family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces

GAO Xing-hui[1], MA Le-rong[1], ZHOU Hai-yun[2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China;
2. Department of Mathematics, Shijiazhuang Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: It is proved that the sequence generated by Aoyama, Kohsaka and Takahashi's shrinking projection method for a family of nonexpansive mappings is well defined by using metric projection operator technique, and then many necessary and sufficient conditions are obtained for the family of nonexpansive mappings having a common fixed point in a Hilbert space.

Key words: family of nonexpansive mappings; common fixed points; existence; shrinking projection method