云南大学学报 (自然科学版), 2010, 32 (3): 249~253 CN 53-1045/N ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

Hilbert空间中非扩张映像族公共不动点的存在性*

高兴慧[1], 马乐荣[1], 周海云[2]
(1. 延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000;
2. 石家庄军械工程学院 数学系, 河北 石家庄 050003)

摘要: 在Hilbert空间中, 首先利用距离投影算子技巧证明了由Aoyama, Kohsaka和Takahashi构造的关于非扩张映像族的收缩投影方法所生成的序列是有意义的; 其次获得了非扩张映像族有公共不动点的几个充分必要条件.

关键词: 非扩张映像族; 公共不动点; 存在性; 收缩投影方法
中图分类号: O 177.91 文献标识码: A 文章编号: 0258-7971(2010)03-0249-05

设 H 是一实的Hilbert空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示内积和范数, 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\mathbf{N}$ 是正整数集, $\to$ 和 $\rightharpoonup$ 分别表示强、弱收敛. 设 T 是 C 到 H 的映像, 如果对任意 $x, y\in C$, 有 $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$, 则称 $T: C\to H$ 是非扩张映像. 用 $F(T)$ 表示 T 的不动点集, 即 $F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$.

关于非线性算子方程的可解性或非线性算子不动点的存在性及其构造性迭代法问题, 很多作者对此进行了研究, 取得了许多成果[1-9]. 在无限维Hilbert空间中, 一般地, 即使对于非扩张映像来说, Mann迭代格式也仅有弱收敛定理, 为了得到强收敛定理, 须修正Mann迭代格式, 杂交投影算法就是Mann迭代的一种修正型.

2003年, Nakajo和Takahashi[1] 给出了如下单个非扩张映像 T 的杂交投影算法:

$$\begin{cases} x_0 = x\in C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \{z\in C: \|z-y_n\|\leqslant\|z-x_n\|\}, \\ Q_n = \{z\in C: \langle x_n - z, x - x_n\rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n\cap Q_n}(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\alpha_n\subset[0,1]$. 他们证明了以下结论: 如果 $F(T)\neq\varnothing$, 那么序列 $\{x_n\}$ 有意义; 这时, 如果 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1$, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(T)}x$. 这里 $P_{F(T)}$ 是 H 到 $F(T)$ 的距离投影算子.

2007年, Matsushita和Takahashi[2] 证明了在去掉假设条件 $F(T)\neq\varnothing$ 的情况下, 由(1)所生成的序列 $\{x_n\}$ 仍有意义; 并证明了 $F(T)\neq\varnothing$ 的充要条件是 $\{x_n\}$ 有界.

2009年, Aoyama, Kohsaka和Takahashi[3] 给出了如下非扩张映像族 $\{S_n\}$ 的收缩投影方法(比杂交投影算法简单):

$$\begin{cases} x\in H,\ C_1 = C, \\ x_n = P_{C_n}(x), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)S_n x_n, \\ C_{n+1} = \{z\in C_n: \|z-y_n\|\leqslant\|z-x_n\|\}, \quad n\in\mathbf{N}, \end{cases} \tag{2}$$

---

* 收稿日期: 2009-08-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771050)
作者简介: 高兴慧(1975-), 女, 陕西人, 硕士, 副教授, 主要从事非线性泛函分析方面的研究.

这里$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$. 他们证明了以下结论: 如果 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)\neq\varnothing$, 则序列$\{x_n\}$有意义; 这时, 如果$\sup_{n\in\mathbf{N}}\alpha_n<1$且$\{S_n\}$满足条件(Z), 则$\{x_n\}$强收敛于$P_F x$.

$\{S_n\}$满足条件(Z)⇔如果$\{x_n\}$是C中的有界序列, 且$\|T_n x_n-x_n\|\to 0(n\to\infty)$, 则$\omega_\omega(x_n)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)$(详见文献[3], 这里$\omega_\omega(x_n)$表示$\{x_n\}$的弱极限集).

受文献[2]的启示, 本文首先证明在去掉假设条件$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)\neq\varnothing$后, 由(2)所生成的序列$\{x_n\}$仍有意义; 其次给出并证明了$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)\neq\varnothing$的几个充要条件. 本文的结果改进和推广了文献[2~3]的相关结果.

1 预备知识

设C是H的非空闭凸子集, 对于任意$x\in H$, 存在唯一的$x_0\in C$, 使得

$$\|x-x_0\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall\ y\in C.$$

此时, 对于任意$x\in H$, 定义映像$P_C: H\to C$为$P_C(x)=x_0$, 称P_C为从H到C上的距离投影算子. 众所周知, P_C为非扩张映像[4].

设$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$是C到H的非扩张映像族, 如果对于每一个有界序列$\{z_n\}\subset C$, 当$\lim_{n\to\infty}\|z_{n+1}-S_n z_n\|=0$时, 有$\lim_{n\to\infty}\|z_n-S_m z_n\|=0$, $\forall m\in\mathbf{N}$, 则称$\{S_n\}$满足NST-条件(Ⅱ)[5].

引理 1[4] 设C是H的非空闭凸子集, 任给$x\in H$, $z\in C$, 则$z=P_C x$等价于

$$\langle x-z, z-y\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in C.$$

引理 2[10] 设C是H的有界闭凸子集, $T: C\to C$是非扩张映像, 则$F(T)\neq\varnothing$.

引理 3[10] 设C是H的非空闭凸子集, $T: C\to H$是非扩张映像, 则$I-T$次闭, 即当$x_n\rightharpoonup x_0$且$x_n-Tx_n\to y_0$时, 有$(I-T)x_0=y_0$.

引理 4[10] 设C是H的非空闭凸子集, $T: C\to H$是非扩张映像, 则$F(T)$是闭凸集.

2 主要结果

定理 1 设C是H的非空闭凸子集, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$是C到H的非扩张映像族, $\{\alpha_n\}\subset[0,1)$, 则由算法(2)所生成的序列$\{x_n\}$有意义.

证明 首先利用数学归纳法证明C_n是闭凸集. 事实上, 当$n=1$时, $C_1=C$是闭凸集. 假设对某个$k\in\mathbf{N}$, C_k是闭凸集, 则对于任意$z\in C_{k+1}\subset C_k$, 有

$$\|z-y_n\|\leqslant\|z-x_n\|,$$

即

$$2\langle z, x_n-y_n\rangle+\|y_n\|^2\leqslant\|x_n\|^2.$$

故C_{k+1}是闭凸集. 因此对所有的$n\in\mathbf{N}$, C_n是闭凸集.

其次证明C_n是非空集. 事实上, 显然C_1非空. 假设对某个$k\in\mathbf{N}$, C_k非空, 由于对于$i=1,2,\cdots,k-1$, 有$C_{i+1}\subset C_i$, 所以$C_1, C_2, \cdots, C_k$都是非空集, 从而$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$有意义. 设$z\in C_k$并令$r=\max\{\|z-y_n\|: n=1,2,\cdots,k\}$. 由于$S_r[z]=\{y\in C_k: \|z-y\|\leqslant r\}$有界闭凸, 且$P_{S_r[z]}S_k$是$S_r[z]$上的非扩张映像, 由引理 2可得: 存在$u_0\in S_r[z]\subset C_k$, 使得$P_{S_r[z]}S_k u_0=u_0$, 这里$P_{S_r[z]}$是$H$到$S_r[z]$的距离投影算子. 对于任意$y\in S_r[z]$, 利用引理 1可得$\langle y-u_0, u_0-S_k u_0\rangle\geqslant 0$, 特别地有$\langle y_k-u_0, u_0-S_k u_0\rangle\geqslant 0$. 因为$1-\alpha_k\geqslant 0$, 所以$\langle y_k-u_0, (1-\alpha_k)(u_0-S_k u_0)\rangle\geqslant 0$. 于是

$$\langle y_k-u_0, u_0-y_k+y_k-(\alpha_k u_0+(1-\alpha_k)S_k u_0)\rangle=\langle y_k-u_0, u_0-(\alpha_k u_0+(1-\alpha_k)S_k u_0)\rangle=$$
$$\langle y_k-u_0, (1-\alpha_k)(u_0-S_k u_0)\rangle\geqslant 0,$$

从而

$$\|u_0-y_k\|^2\leqslant\langle y_k-u_0,\ y_k-(\alpha_k u_0+(1-\alpha_k)S_k u_0)\rangle=$$
$$\langle y_k-u_0,\ \alpha_k(x_k-u_0)+(1-\alpha_k)(S_kx_k-S_ku_0)\rangle=$$
$$\alpha_k\langle y_k-u_0,\ x_k-u_0\rangle+(1-\alpha_k)\langle y_k-u_0,\ S_kx_k-S_ku_0\rangle\leqslant$$
$$\alpha_k\|y_k-u_0\|\cdot\|x_k-u_0\|+(1-\alpha_k)\|y_k-u_0\|\cdot\|S_kx_k-S_ku_0\|\leqslant$$
$$\|y_k-u_0\|\cdot\|x_k-u_0\|,$$

因此 $\|u_0-y_k\|\leqslant\|u_0-x_k\|$. 从 C_{k+1} 的构造可得 $u_0\in C_{k+1}$, 于是 C_{k+1} 非空. 由数学归纳法可得对所有 $n\in\mathbf{N}$, C_n 都是非空集, 因此由 (2) 所生成的序列 $\{x_n\}$ 有意义. 证毕.

定理 2　设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\{S_n\}$ 是 C 到 H 的非扩张映像族, $\{\alpha_n\}\subset[0,1)$ 满足 $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\alpha_n<1$. 假设 $\{S_n\}$ 满足 NST – 条件 (Ⅱ), $\{x_n\}$ 由算法 (2) 所生成, 则下列结论等价:

(ⅰ) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 非空;

(ⅱ) $\{x_n\}$ 有界;

(ⅲ) $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F(S_n)$ 非空;

(ⅳ) $x_n\to P_Fx\ (n\to\infty)$.

证明　(ⅰ)⇒(ⅱ).

从定理 1知 $\{x_n\}$ 有意义. 任给 $p\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, 利用 P_{C_n} 的非扩张性可得

$$\|x_n-p\|=\|P_{C_n}x-P_{C_n}p\|\leqslant\|x-p\|,\ \forall n\in\mathbf{N},$$

从而 $\{x_n\}$ 有界, 所以 (ⅰ) 可推出 (ⅱ).

(ⅱ)⇒(ⅲ). 由 $x_{n+1}=P_{C_{n+1}}x$, $x_n=P_{C_n}x$, $C_{n+1}\subset C_n$, 可得

$$\|x-x_n\|\leqslant\|x-x_{n+1}\|,\ \forall n\in\mathbf{N}\tag{3}$$

因为 $\{x_n\}$ 有界, 所以 $\{\|x-x_n\|\}$ 也有界, 由 (3) 式知 $\{\|x-x_n\|\}$ 的极限存在. 利用引理 1可得 $\langle x_{n+1}-x_n,\ x_n-x\rangle\geqslant0$, 于是

$$\|x_{n+1}-x_n\|^2=\|x_{n+1}-x-(x_n-x)\|^2=\|x_{n+1}-x\|^2-2\langle x_{n+1}-x,\ x_n-x\rangle+\|x_n-x\|^2=$$
$$\|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2-2\langle x_{n+1}-x_n,\ x_n-x\rangle\leqslant\|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0\tag{4}$$

由 $x_{n+1}\in C_{n+1}\subset C_n$ 可得 $\|x_{n+1}-y_n\|\leqslant\|x_{n+1}-x_n\|$, 结合 (4) 式可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=0$.

另一方面, 对每一 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$\|x_{n+1}-y_n\|=\|x_{n+1}-\alpha_nx_n-(1-\alpha_n)S_nx_n\|=\|\alpha_n(x_{n+1}-x_n)+(1-\alpha_n)(x_{n+1}-S_nx_n)\|\geqslant$$
$$(1-\alpha_n)\|x_{n+1}-S_nx_n\|-\alpha_n\|x_{n+1}-x_n\|,$$

所以

$$\|x_{n+1}-S_nx_n\|\leqslant\frac{1}{1-\alpha_n}\Big(\|x_{n+1}-y_n\|+\alpha_n\|x_{n+1}-x_n\|\Big).$$

因为 $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\alpha_n<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-S_nx_n\|=0$. 又因为 $\{S_n\}$ 满足 NST – 条件 (Ⅱ), 所以

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-S_mx_n\|=0,\ \forall m\in\mathbf{N}\tag{5}$$

由于 $\{x_n\}$ 有界, 所以存在子列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$, 使得 $x_{n_i}\rightharpoonup v$, 由 (5) 式可得 $\lim\limits_{i\to\infty}\|x_{n_i}-S_mx_{n_i}\|=0$, $\forall m\in\mathbf{N}$. 利用引理 3可得 $v\in F(S_m)$, $\forall m\in\mathbf{N}$, 所以 $v\in F$. 因此 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F(S_n)$ 非空.

(ⅲ)⇒(ⅳ). 假设 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F(S_n)$ 非空, 从引理 4可得, 对所有的 $n\in\mathbf{N}$, $F(S_n)$ 是闭凸的, 所以 F 是非空闭凸的. 因此 P_Fx 有意义. 下面我们证明对所有的 $n\in\mathbf{N}$, $F\subset C_n$.

显然 $F\subset C_1=C$. 假设对某个 $n\in\mathbf{N}$ 有 $F\subset C_n$, 则 $\forall w\in F\subset C_n$, 有

$$\|y_n - w\| = \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)S_n x_n - \alpha_n w - (1-\alpha_n)w\| \leqslant$$
$$\alpha_n\|x_n - w\| + (1-\alpha_n)\|S_n x_n - S_n w\| \leqslant \|x_n - w\|,$$

从而 $w \in C_{n+1}$. 由数学归纳法可得对所有的 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $F \subset C_n$, 因此 $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

再证明 $\{x_n\}$ 是柯西列. 因为 F 非空, 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 非空. 从 (i) ⇒ (ii) 可得 $\{x_n\}$ 有界, 再从 (ii) ⇒ (iii) 的证明可得 $\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|$ 存在. 由 $x_n = P_{C_n}x$ 可知

$$\langle x - x_n, x_n - y\rangle \geqslant 0, \ \forall y \in C_n. \tag{6}$$

因为 $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, 所以

$$\langle x - x_n, x_n - w\rangle \geqslant 0, \ \forall w \in F. \tag{7}$$

根据 C_n 的构造可得: 对任意正整数 $l \geqslant 1$, 有 $C_{n+l} \subset C_n$, 于是 $x_{n+l} = P_{C_{n+l}}x \in C_n$. 从 (6) 式知

$$\langle x - x_n, x_n - x_{n+l}\rangle \geqslant 0, \tag{8}$$

于是

$$\|x_n - x_{n+l}\|^2 = \|x_n - x + x - x_{n+l}\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - x_{n+l}\|^2 - 2\langle x - x_n, x - x_{n+l}\rangle \leqslant$$
$$\|x - x_{n+l}\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2\langle x - x_n, x_n - x_{n+l} 4 \ [\ + x - x_{n+l} +^2 - + x_n - x +^2, \tag{9}$$

所以 $\lim_{ny\ ]} + x_n - x_{n+l} + = 0, P\ l\ I\ \mathbf{N}$, 因此 $\{x_n\}$ 是柯西列. 由于 H 是 Hilbert 空间且 C 是闭凸的, 我们能够假设 $x_n \ y \ q\ I\ C(n\ y\ ]\ )$.

最后证明 $q = P_F x$. 因为 $\{x_n\}$ 有界且 $\{S_n\}$ 满足 NST – 条件 ( ), 利用 ( )] ( ) 的证明方法可得 (5) 式成立, 从而对所有的 $m\ I\ \mathbf{N}$, 有 $\lim_{ny\ ]} S_m x_n = q$. 根据非扩张映像 S_m 的连续性可得 $q\ I\ F(S_m)$, $P\ m\ I\ \mathbf{N}$, 从而 $q\ I\ F$. 对 (7) 式两边取极限可得

$$3x - q, q - w\ 4 \setminus 0, P\ w\ I\ F,$$

由引理 1 可知 $q = P_F x$.

( )] ( ). 因为 $x_n \ y \ P_F x$, 所以 $P_F x$ 有意义, 因此 F 非空. 从 $F < C_n$ 可得 $\mathrm{H}_{n=1}^{]} C_n$ 非空.

由定理 1 和定理 2 可直接得到以下推论:

推论 1 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $S: C\ y\ H$ 是非扩张映像, $\{A_n\} < [0, 1)$. 设 $x\ I\ H$, $C_1 = C$, 定义如下迭代序列

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x), \\ y_n = A_n x_n + (1 - A_n)Sx_n, \\ C_{n+1} = \{z\ I\ C_n: + z - y_n + \ [\ + z - x_n + \}, \quad n\ I\ \mathbf{N}, \end{cases} \tag{10}$$

则序列 $\{x_n\}$ 有意义.

推论 2 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $S: C\ y\ H$ 是非扩张映像, $\{A_n\} < [0, 1)$ 满足 $\sup_{nI\ \mathbf{N}} A_n < 1$. 设序列 $\{x_n\}$ 由 (10) 式所生成, 则下列结论等价:

( ) $\mathrm{H}_{n=1}^{]} C_n$ 非空;

( ) $\{x_n\}$ 有界;

( ) $F(S)$ 非空;

( ) $x_n \ y \ P_{F(S)}x(n\ y\ ]\ )$.

在 (2) 式和 (10) 式中, 如果 $A_n \ s \ 0$, 则由定理 2 和推论 2 分别得到以下推论:

推论 3 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $\{S_n\}$ 是 C 到 H 的非扩张映像族. 假设 $\{S_n\}$ 满足 NST – 条件 ( ). 设 $x\ I\ H$, $C_1 = C$, 定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x), \\ C_{n+1} = \{z\ I\ C_n: + z - S_n x_n + \ [\ + z - x_n + \}, \quad n\ I\ \mathbf{N}, \end{cases} \tag{11}$$

则序列$\{x_n\}$有意义且下列结论等价:

( ) $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 非空;

( ) $\{x_n\}$有界;

( ) $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ 非空;

( ) $x_n \to P_F x\ (n \to \infty)$.

推论 4　设 C是H的非空闭凸子集, $S: C \to H$是非扩张映像, 设 $x \in H$, $C_1 = C$, 定义序列$\{x_n\}$如下:

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n: \|z - Sx_n\| \le \|z - x_n\|\}, \quad n \in \mathbf{N}, \end{cases} \tag{12}$$

则序列$\{x_n\}$有意义且下列结论等价:

( ) $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 非空;

( ) $\{x_n\}$有界;

( ) $F(S)$非空;

( ) $x_n \to P_{F(S)} x\ (n \to \infty)$.

注 1　本文的结果改进和推广了文献[2~3]的相关结果.

参考文献:

[1] NAKAJO K, TAKAHASHI W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups[J]. J Math Anal Appl, 2003, 279: 372-379.

[2] MATSUSHITA S, TAKAHASHI W. The sequences by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbert space[C]. Proceedings of the 8th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, 2007: 109-113.

[3] AOYAMA K, KOHSAKA F, TAKAHASHI W. Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 1 626-1 632.

[4] MARINO G, XU H K. Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, 329: 336-346.

[5] TAKAHASHI W. Viscosity approximation methods for countable families of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 719-734.

[6] 高兴慧, 崔艳兰, 马乐荣. Banach空间中广义隐拟变分包含解的迭代逼近[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(2): 98-102.

[7] 高兴慧, 马乐荣, 周海云. Banach空间中拟φ-渐近非扩展映像不动点的迭代算法[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(9): 220-224.

[8] ZHOU Hai-yun, GAO Xing-hui. A strong convergence theorem for a family of quasi-φ-nonexpansive mappings in a Banach space[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2009, 2009, 12 pages, doi: 10.1155/2009/351265.

[9] ZHOU Hai-yun. Demiclosedness principle with applications for asymptotically pseudo-contractions in Hilbert spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(9): 3 140-3 145.

[10] TAKAHASHI W, Nonlinear Functional Analysis[M]. Yokohama: Yokohama Publishers, 2000.

(下转第 257页)

Circulant homogenous factorisations of complete graphs

ZHANG Xiao2hui, LU Jian2yue, LI Gen2liang, WU Hui2hong, PAN Jiang2min

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract A necessary and sufficient condition for complete graphs having circulant homogenous factori2 sations has been obtained, which generalizes a necessary and sufficient condition, given by praeger and Li, for complete graphs having (M, G) circulant homogenous factorisation under the condition that G/M is a cyclic group.

Key words complete graph; homogeneous factorisation; circulant homogeneous factorisation; Cayley homog2 enous factorisation

* *

(上接第 253页)

The existence of common fixed points for a family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces

GAO Xing2hui[1], MA Le2rong[1], ZHOU Hai2yun[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China;

2. Department of Mathematics, Shijiazhuang Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract It is proved that the sequence generated by Aoyama, Kohsaka and Takahashi's shrinking projec2 tion method for a family of nonexpansive mappings is well defined by using metric projection operator technique, and then many necessary and sufficient conditions are obtained for the family of nonexpansive mappings having a common fixed point in a Hilbert space.

Key words family of nonexpansive mappings; common fixed points; existence; shrinking projection method