云南大学学报（自然科学版），2010，32（2）：130～135　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

分数次非线性 Schrodinger 方程的整体吸引子及维数估计*1

王　磊，党金宝，林国广
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明　650091）

摘要：讨论一类分数次非线性 Schrodinger 方程解的长时间行为，证明了此类方程整体吸引子存在及该吸引子的 Hausdorff 维数和 fractal 维数有限.

关键词：分数次非线性 Schrodinger 方程；整体吸引子；Hausdorff 维数；fractal 维数
中图分类号：O 175.29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2010)02－0130－06

非线性动力系统的长时间性态长期以来备受人们的关注[1-5]，其中文献[2～4]对于整数次非线性 Schrodinger 方程的整体吸引子的存在性及维数估计进行了深入的研究. 文献[6]研究了一类分数次非线性 Schrodinger 方程的柯西问题.

本文主要讨论带弱阻尼的分数次非线性 Schrodinger 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + (-\Delta)^{\alpha}u + \beta|u|^p u + \mathrm{i}\delta u = f(x), x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \\ u(x+L\mathrm{e}_i, t) = u(x,t), x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

的整体吸引子的存在性及该吸引子 Hausdorff 维数和 fractal 维数的有限性.

在(1)中 $\Omega = (0,L)^n$，$e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是标准正交基，i 是虚数单位，$a > \frac{n}{2}$，$\beta > 0$，$p > 0$，$\delta > 0$.

1　预备引理

为获得初边值问题(1)的整体吸引子，首先给出引理 1～3.

引理 1　设 $u_0(x) \in L^2(\Omega)$，$f(x) \in L^2(\Omega)$，则初边值问题(1)的解 $u(x,t)$ 满足

$$\|u(x,t)\|^2 \leqslant \|u_0(x)\|^2 \mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{\|f(x)\|^2}{\delta^2}. \tag{2}$$

证明　在方程(1)两边与 $\bar{u}_t$ 取内积，并取虚部，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 + \delta\|u\|^2 = \mathrm{Im}\,(f,\bar{u}) \leqslant \|f\|\,\|u\| \leqslant \frac{\delta}{2}\|u\|^2 + \frac{\|f\|^2}{2\delta}, \tag{3}$$

对(3)式应用 Gronwall 不等式，得

$$\|u(x,t)\|^2 \leqslant \|u_0(x)\|^2 \mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{\|f(x)\|^2}{\delta^2}.$$

证毕.

引理 2　设 $u_0(x) \in H^{\alpha}(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$，$f(x) \in H^{\alpha}(\Omega)$，$u(x,t)$ 是问题(1)的解，则 $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|$，

* 收稿日期：2009－04－30
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10861014).
作者简介：王　磊(1983－)，男，山东人，硕士生，主要从事偏微分方程方面的研究.
通讯作者：林国广(1964－)，男，云南人，副教授，博士，主要从事偏微分方程方面的研究.

$\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}$,一致有界.

证明　在方程(1)两边与 $\bar{u}_t$ 取内积,并取实部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\frac{\beta}{\rho+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}-\mathrm{Im}(\delta u,\bar{u}_t)=\mathrm{Re}(f(x),\bar{u}_t),$$

其中由(1)式知 $\bar{u}_t=-\mathrm{i}((-\Delta)^{\alpha}\bar{u}+\beta|u|^{\rho}\bar{u}-\mathrm{i}\delta\bar{u}-f(x))$,则

$$-\mathrm{Im}(\delta u,\bar{u}_t)=\delta\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\beta\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}-\mathrm{Re}(\delta u,f(x)),$$

$$\mathrm{Re}(f(x),\bar{u}_t)=\mathrm{Im}(f(x),(-\Delta)^{\alpha}\bar{u}+\beta|u|^{\rho}\bar{u})-\mathrm{Re}(f(x),\delta\bar{u}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\frac{\beta}{\rho+2}\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right)+\delta\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\beta\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}=$$

$$\mathrm{Im}(f(x),(-\Delta)^{\alpha}\bar{u}+\beta|u|^{\rho}\bar{u})\leqslant$$

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f(x)\|\;\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|+\beta\|f(x)\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))}\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}.$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\frac{\beta}{\rho+2}\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right)\leqslant k\left(\frac{1}{2}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|^2+\frac{\beta}{\rho+2}\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right)+c.$$

由 Gronwall 不等式知 $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|$, $\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}$ 一致有界. 证毕.

引理 3　设 $u_0(x)\in H^{2\alpha}(\Omega)$, $f(x)\in L^2(\Omega)$, $u(x,t)$ 是问题(1)的解,则 $\|(-\Delta)^{\alpha}u\|$ 一致有界.

证明　(1)式对 t 求导并与 $\bar{u}_t$ 取内积,再取虚部,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2+\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta|u|^{\rho}u),\bar{u}_t\right)+\delta\|u_t\|^2=0,$$

其中 $\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta|u|^{\rho}u),\bar{u}_t\right)=\mathrm{Im}\int_{\Omega}\frac{\rho\beta}{2}|u|^{\rho-2}u^2\bar{u}_t^2\mathrm{d}x$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2+2\delta\|u_t\|^2=-\mathrm{Im}\int_{\Omega}\rho\beta|u|^{\rho-2}u^2\bar{u}_t^2\mathrm{d}x\leqslant c\int_{\Omega}|u|^{\rho}|u_t|^2\mathrm{d}x\leqslant c\|u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\rho}(\Omega))}^{\rho}\|u_t\|^2.\quad(4)$$

由引理 2 及 Young 不等式,(4)式可变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2+2\delta\|u_t\|^2\leqslant c+\delta\|u_t\|^2,$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u_t\|^2\leqslant\|u_t(x,0)\|^2\mathrm{e}^{-\delta t}+\frac{c}{\delta}.$$

因为

$$\|u_t(x,0)\|\leqslant c(\|(-\Delta)^{\alpha}u_0\|+\beta\||u_0|^{\rho}u_0\|+\delta\|u_0\|\leqslant c\|u_0\|_{H^{2\alpha}(\Omega)},$$

$$\|(-\Delta)^{\alpha}u\|\leqslant\|u_t\|+\beta\||u|^{\rho}u\|+\delta\|u\|\leqslant\|u_t\|+\beta c\|u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\rho}(\Omega))}^{\rho}\|u\|^2+\delta\|u\|,$$

所以 $\|u_t\|$, $\|(-\Delta)^{\alpha}u\|$ 都一致有界. 证毕.

为对问题(1)的整体吸引子进行维数估计,给出引理 4 ~6.

引理 4[8]　R^m 上 2 个对称双线性形式 ψ 和 ψ_1,其中 ψ 为正定,记

$$\gamma_l=\max_{F\subset R_m,\dim F=l}\min_{x\in F,x\neq0}\frac{\psi_1(x,x)}{\psi(x,x)},i=1,2,\cdots,m.$$

则对任何 $w^1,w^2,\cdots,w^m\in R^m$,有

$$\sum_{l=1}^{m}\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}[(1-\sigma_{jl})\psi(w^i,w^j)+\delta_{jl}\psi_1(w^i,w^j)]=\left(\sum_{l=1}^{m}\gamma_l\right)\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(w^i,w^j).$$

引理 5[9]　设 R_1,R_2 和 T 是 3 个常数,则存在常数 $c=c(R_1,R_2,T)$,使得对任何 u_0,v_0,t,当 $\|u_0\|_{H^{\alpha}(\Omega)}\leqslant R_1$, $\|v_0\|_{H^{\alpha}(\Omega)}\leqslant R_2$, $|t|\leqslant T$ 时,有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0<\|v_0\|_{H^\alpha(\Omega)}<\varepsilon}\frac{\|s(t)(u_0+v_0)-s(t)u_0-(Ds(t)u_0)v_0\|^2_{H^\alpha(\Omega)}}{\|v_0\|^2_{H^\alpha(\Omega)}}=0, \tag{5}$$

$$\sup|Ds(t)u_0|_{\theta(H^\alpha(\Omega))}<\infty, \tag{6}$$

其中 $s(t)$ 为定义在 Hilbert 空间 $H^\alpha(\Omega)$ 的紧子集 X 上的非线性映射,且满足

$$s(t)X=X. \tag{7}$$

以 $\omega_m(L)$ 表示 $\wedge^m H^\alpha(\Omega)$ 上 L 的第 m 个外积的模

$$\omega_m(L)=\sup(\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(L\xi^i,L\xi^j)_{H^\alpha(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

其中上确界 sup 是对一切 $\{\xi^i\}_{i=1}^m$ 取的,$\det(L\xi^i,L\xi^j)\leqslant 1$. 令 $\bar{\omega}_m=\sup\limits_{u\in X}\omega_m(L(u))$.

定义在 X 上的一致李雅普诺夫指数为 $\mu_1=\log\bar{\omega}_1$, $\mu_j=\log\bar{\omega}_j-\log\bar{\omega}_{j-1}$, $j\geqslant 2$. 根据文献[9],有

引理6 在(5)~(7)式的假设下,如存在 $m\geqslant 0$,使得

$$\mu_1+\cdots+\mu_m<0, \tag{9}$$

则

$$d_H(X)\leqslant m+1,\ d_F(X)\leqslant(m+1)\max_{1\leqslant l\leqslant m}\left(1+\frac{|\mu_1+\cdots+\mu_l|}{|\mu_1+\cdots+\mu_{m+l}|}\right). \tag{10}$$

2 问题(1)整体吸引子的存在性

有了引理1~3,下面给出问题(1)整体吸引子的存在性定理.

定理1 设 $u_0(x)\in H^{2\alpha}(\Omega)$, $f(x)\in L^2(\Omega)$, $\alpha>\frac{n}{2}$, $\beta>0$, $\rho>0$,则周期初边值问题(1)存在整体吸引子 $A=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}s(t)B_0}$.

证明 定义算子半群 $s(t)$: $H^\alpha(\Omega)\to H^\alpha(\Omega)$,由引理1~3知问题(1)的解 $u(t)=s(t)u_0$.

(1)当 $\|u_0\|_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant R$ 时,由引理2知 $\|s(t)u_0\|_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant c\|u_0\|_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant cR$,故 $s(t)$ 在 $H^\alpha(\Omega)$ 中一致有界.

(2)$u(t)=s(t)u_0$ 有 $H^\alpha(\Omega)$ 中的有界吸收集 $B_0=\{u\in H^\alpha(\Omega):\ \|u\|_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant R\}$,由引理3知当 $\|u_0\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}\leqslant R$ 时, $\|(-\Delta)^\alpha u\|=\|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}\leqslant c\|u_0\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}\leqslant cR$,且 $H^{2\alpha}(\Omega)$ 紧嵌入 $H^\alpha(\Omega)$ 中,所以 B_0 是 $s(t)$ 在 $H^\alpha(\Omega)$ 中的紧的吸收集.

(3)仿文献[7]中的方法可证 $s(t)$ 为连续算子.

综合(1)~(3)可知半群 $s(t)$ 具有紧的整体吸引子 $A=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}s(t)B_0}$. 证毕.

3 问题(1)整体吸引子的维数估计

方程(1)的线性化方程为

$$\begin{cases}\mathrm{i}U_t+(-\Delta)^\alpha U+\beta[|u|^\rho U+\rho|u|^{\rho-2}u\mathrm{Re}(\bar{u}U)]+\mathrm{i}\delta U=0,\\ \text{设 } U(0)=U_0.\end{cases} \tag{11}$$

设 $U_0\in H^\alpha(\Omega)$, $U(t)$ 为问题(11)的解,已知 $u\in L^\infty(0,T;H^\alpha(\Omega))$,容易证明问题(11)具有唯一解 $U\in L^\infty(0,T;H^\alpha(\Omega))$.

方程(11)是方程(1)的线性化方程,把(1)看作 u 的虚部和实部的方程组,映射 $Ds(t)u_0$ 定义为 $(Ds(t)u_0)U_0=U(t)$,其中 $u(t)=s(t)u_0$.

定理2 问题(1)的整体吸引子 A 在 $H^\alpha(\Omega)$ 上的分形维数和豪斯多夫维数有限.

证明 在方程(11)中令 $U=\mathrm{e}^{-\delta t}\omega$,则有

$$|U^1(t)\wedge U^2(t)\wedge\cdots\wedge U^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}=\mathrm{e}^{-2\delta mt}|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}, \tag{12}$$

其中 $\omega^j(t)(1\leqslant j\leqslant m)$ 满足

$$i\omega_t+(-\Delta)^\alpha\omega+\beta[|u|^\rho\omega+\rho|u|^{\rho-2}u\mathrm{Re}(\bar{u}\omega)]=0. \tag{13}$$

下面估计 $|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|_{H^\alpha(\Omega)}$.

将方程(13)与 $\bar{\omega}_t$ 取内积,并取实部,得

$$\frac{d}{dt}\phi(t,\omega)=V(t,\omega), \tag{14}$$

其中

$$\phi(t,\omega)=\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\|^2+2\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\int_\Omega|u|^\rho|\omega|^2dx+\frac{\beta\rho}{2}\mathrm{Re}\int_\Omega|u|^{\rho-2}u^2\bar{\omega}^2dx,$$

$$V(t,\omega)=\rho\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\int_\Omega|\omega|^2|u|^{\rho-2}(u_t,\bar{u}+u\bar{u}_t)dx+$$

$$\frac{\rho\beta}{2}\mathrm{Re}\int_\Omega\left[\left(\frac{\rho-2}{2}+2\right)|u|^{\rho-2}uu_t+\frac{\rho-2}{2}|u|^{\rho-4}u^3\bar{u}_t\right]\bar{\omega}^2dx.$$

由引理 1 ~ 3 关于 $\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}$, $\|u_t\|$, $\|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}$ 的先验估计知

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\|^2-c\|\omega\|^2\leqslant\phi(t,\omega)\leqslant\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\|^2+c\|\omega\|^2,V(t,\omega)\leqslant c\|\omega\|^2.$$

将方程(13)与 $\bar{\omega}$ 取内积,并取虚部,得

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|^2=-\beta\rho\mathrm{Im}\int_\Omega|u|^{\rho-2}u^2\bar{\omega}^2dx. \tag{15}$$

记

$$\varphi_1(t,\omega)=\phi(t,\omega)+\mu\|\omega\|^2,\varphi_2(t,\omega)=V(t,\omega)-\mu\beta\rho\mathrm{Im}\int_\Omega|u|^{\rho-2}u^2\bar{\omega}^2dx. \tag{16}$$

则由(14) ~ (16) 式可得

$$\frac{d}{dt}\|\varphi_1(t,\omega)=\varphi_2(t,\omega).$$

取 $\mu=c+1$,得

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\|^2+\|\omega\|^2\leqslant\varphi_1(t,\omega)\leqslant c(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\omega\|^2+\|\omega\|^2\|), \tag{17}$$

$$|\varphi_2(t,\omega)|\leqslant c\|\omega\|^2+c\int_\Omega|\omega|^2dx\leqslant c\|\omega\|^2. \tag{18}$$

令

$$\varphi(t,\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int_\Omega[(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\xi(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\bar{\eta}+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\bar{\xi}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\eta+\mu\xi\bar{\eta}+\mu\bar{\xi}\eta]dx.$$

$\varphi(t,\xi,\eta)$ 是一个关于 ξ,η 的正定对称双线性形式,且满足 $\varphi(t,\zeta,\zeta)=\varphi_1(t,\zeta,\zeta)$,所以它定义了 H^α 上的一个内积.

设 $\lambda_l=\max\limits_{F\subset R^m,\mathrm{dimF}=l}\ \min\limits_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}\left(\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\right)_{H^\alpha(\Omega)}$,即矩阵 $((\omega^i,\omega^j))_{i,j=1}^m$ 的第 l 个特征值,引入 Gram 行列式 $H(t)=\mathrm{det}_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)$.

由(17) 式可得

$$|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}=\prod_{i=1}^m\lambda_1=$$

$$\prod_{i=1}^m\max_{F\subset R^m,\mathrm{dimF}=l}\ \min_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}\left(\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\right)_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant$$

$$\prod_{i=1}^m\max_{F\subset R^m,\mathrm{dimF}=l}\ \min_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}\varphi\left(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\right)=\mathrm{det}_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)=H(t). \tag{19}$$

由(17)式类似可得

$$H(t)=\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)=\prod_{i=1}^m\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}\varphi\Big(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\Big)\leqslant$$

$$\prod_{i=1}^m\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}c\Big(\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\Big)_{H^\alpha(\Omega)}=$$

$$c^m\prod_{i=1}^m\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{x\in F,\sum_{i=1}^m|x_i|^2=1}\Big(\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\Big)_{H^\alpha(\Omega)}=$$

$$c^m|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}.\tag{20}$$

于是从(19),(20)式可得

$$|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant H(t)\leqslant c^m|\omega^1(t)\wedge\omega^2(t)\wedge\cdots\wedge\omega^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}.\tag{21}$$

由 $H(t)$ 的定义知

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\Big[(1-\sigma_{jl})\varphi(t,\omega^i,\omega^j)+\sigma_{jl}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)\Big],$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi_1(t,\omega^i,\omega^j)-\varphi_1(t,\omega^i-\omega^j)]=\frac{1}{4}[\varphi_2(t,\omega^i+\omega^j)-\varphi_2(t,\omega^i-\omega^j)]\stackrel{\Delta}{=}$$

$$\theta(t,\omega^i,\omega^j).$$

令

$$\psi(x,y)=\varphi\Big(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m y_j\omega^j\Big),\psi_1(x,y)=\theta\Big(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j,\sum_{j=1}^m y_j\omega^j\Big),$$

根据引理4及(21)式有

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^m\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}[(1-\sigma_{jl})\varphi(t,\omega^i,\omega^j)+\sigma_{jl}\theta(t,\omega^i,\omega^j)]=\Big(\sum_{j=1}^m\gamma_l\Big)\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}\varphi(t,\omega^i,\omega^j)=$$

$$H(t)\sum_{j=1}^m\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{x\in F,x\neq0}\frac{\varphi_2\Big(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\Big)}{\varphi_1\Big(t,\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\Big)}\leqslant\sum_{j=1}^m\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{x\in F,x\neq0}c\frac{\|\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\|^2}{\|\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\|^2_{H^\alpha(\Omega)}}H(t).$$

而 $\sum_{j=1}^m x_j\omega^j$ 为 $H^\alpha(\Omega)$ 的某一个 l 维子空间的元素,所以

$$\min_{x\in F,x\neq0}\frac{\|\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\|^2}{\|\sum_{j=1}^m x_j\omega^j\|^2_{H^\alpha(\Omega)}}\leqslant\max_{F\subset R^m,\dim F=l}\min_{\xi\in F,\xi\neq0}\frac{\|\xi\|^2}{\|\xi\|^2_{H^\alpha(\Omega)}}\leqslant\frac{1}{\lambda_l^2},$$

其中 λ_1 为$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 满足周期边界条件的特征值,$\lambda_1=\lambda_1 l^{\frac{2\times\frac{\alpha}{2}}{n}}=\lambda_1 l^{\frac{\alpha}{n}}$. 因为 $\alpha>\frac{n}{2}$,所以$\frac{n}{2}>\frac{1}{2}$,因而 $\sum_{j=1}^m\frac{1}{\lambda_1^2}<\infty$. 故存在常数 c,使得

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant cH(t),$$

于是对任意的 $t\geqslant0$,有

$$H(t)\leqslant \mathrm{e}^{ct}H(0).\tag{22}$$

根据(12),(21)和(22)式有

$$|U^1(t)\wedge U^2(t)\wedge\cdots\wedge U^m(t)|^2_{H^\alpha(\Omega)}\leqslant \mathrm{e}^{-2\sigma mt}H(t)\leqslant$$

$$e^{(c-2\sigma m)t}c^m\left|\omega^1(0)\wedge\omega^2(0)\wedge\cdots\wedge\omega^m(0)\right|^2_{H^\alpha(\Omega)}=$$
$$e^{(c-2\sigma m)t}c^m\left|U^1(0)\wedge U^2(0)\wedge\cdots\wedge U^m(0)\right|^2_{H^\alpha(\Omega)}. \tag{23}$$

固定某正数 $t_0>0$,考虑映射 $s=s(nt_0),n\geqslant 1$. 取 $X=A$,A 在 $H^\alpha(\Omega)$ 中紧,$H^{2\alpha}(\Omega)\to H^\alpha(\Omega)$ 是紧映射,依引理 5,$L(u_0)=Ds(nt_0)u_0$ 满足(5),(6) 式,由(8),(23) 式有 $\omega_m(L(u_0))\leqslant c^m e^{(c-2\delta m)nt_0}$,因右端与 $u_0\in A$ 无关,有 $\bar{\omega}_m\leqslant c_m e^{(c-2\delta m)nt_0}$. 固定 $m\in N,\delta m>c$,则存在 n_0,使 $s=s(n_0t_0)$,$\bar{\omega}_m<1$,即(9) 式成立,因而(10) 式成立. 证毕.

参考文献:

[1] TEMAM R. Infinite dimensional dynamical systemsin mechanics and physics[M]. New York:Spinger Velag,1988.

[2] 向新民,顾绍泉. 带五次项的 NLS 方程及其谱逼近的整体吸引子的维数估计[J]. 应用数学学报,2003,26(4):664-673.

[3] 王学锋,杨德生. 无界域上 Schrodinger 型方程的整体吸引子[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,1997(4):34-43.

[4] ZHU Chao - sheng. An estimate of the dimensions of the global attractor for the nonlinear Schrodinger equation with harmonic potential[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2005,30(5):788-791.

[5] 林国广. 非局部二维 Swift - Hohenberg 方程的惯性流形[J]. 云南大学学报:自然科学版,2009,31(4):334-340.

[6] GUO Bo-ling,HAN Yong-qian,XIN Jie. Existence of the global smooth solution to the period boundary of fractional nonlinear Schrodinger equation[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,204:468-477.

[7] LIN Guo-guang,GAO Hong-jun. Asymptotic dynamical difference between the nonlocal and Local Swift - Hohenberg models [J]. Journal of Mathematical Physics,2000,41(4):2 077-2 089.

[8] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 上海:上海科技教育出版社,1995.

[9] GLIDAGLIA J M. Finite dimensional behavior for weahly damped driven Schrodinger equation[J]. Annales de Institnt Henri Poincare Anal non Lineaire,1988,5(4):365-405.

The global attractor of the fractional nonlinear Schrodinger equation and the estimate of its dimension

WANG Lei, DANG Jin-bao, LIN Guo-guang

(School of Mathematics and Statistics,Yunnan University,Kunming 650091, China)

Abstract: It is discussed for that the long - time behavior of solution of the fractional nonlinear Schrodinger equation. It is proved for that the existence of global attractor and Hausdorff dimension and fractal dimension of the attractor is limited for such equation.

Key words: fractional non - linear Schrodinger equation;Global attractor;Hausdorff dimension;fractal dimension.