云南大学学报（自然科学版），2011，33（6）：634～638　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

# 不含4圈的平面图的无圈边色数的新上界[*1]

张　埂[1,2]，苗连英[1]，丁　伟[1]，陈晓杰[1]
（1.中国矿业大学 理学院，江苏 徐州　221008；2.四川文理学院 编辑部，四川 达州　635000）

**摘要**：为了研究平面图的无圈边染色，利用差值转移方法并结合平面图的结构性质，证明了不含4圈的平面图的无圈边色数不超过 $\Delta(G)+6$.

**关键词**：边染色；无圈边染色；平面图；差值转移法
**中图分类号**：O 157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2011)06－0634－05

设图 $G=(V(G),E(G))$ 是一个简单图（即没有多重边和环）. $V(G)$ 表示 $G$ 的顶点集，$E(G)$ 表示 $G$ 的边集. 我们记 $\Delta(G)$，$\delta(G)$ 分别为图 $G$ 的最大顶点度和最小顶点度. 图 $G$ 中的1个 $k$ 圈是指图 $G$ 中的1条封闭路且该路包含 $k$ 条边.

图 $G$ 的一个 $k-$无圈边染色是用 $k$ 种颜色对图 $G$ 的边进行染色，使得相邻的边染不同的颜色，同时染任意2种颜色的边的导出子图是无圈的（亦即染任意2种颜色的边的导出子图是一个森林）. 我们记图 $G$ 的无圈边色数为 $\chi'_a(G)$，它表示图 $G$ 的无圈边染色所需的最小颜色数. 图 $G$ 的无圈边染色的概念最早由 Alon 等[1] 提出，并且他们利用概率的方法证明了 $\chi'_a(G)\leqslant 64\Delta(G)$. 1998年，Molloy 和 Reed[2] 采用同样的方法证得了 $\chi'_a(G)\leqslant 16\Delta(G)$. 2001年，Alon，Sudakov 和 Zaks[3] 猜想 $\chi'_a(G)\leqslant\Delta(G)+2$ 对任意简单图 $G$ 都成立. 文献[4] 证明了立方子图满足此猜想. 文献[5] 证明了围长不小于5的平面图 $G$ 的无圈边色数不超过 $\Delta(G)+2$. 文献[6] 给出了一个一般平面图 $G$ 的无圈边色数的上界为 $2\Delta(G)+29$，并且证明了当 $g(G)\geqslant 4$ 时，$\chi'_a(G)\leqslant\Delta(G)+6$. 文献[7] 证明了不包含三角形的平面图 $G$，如果其最大度不小于8，则其无圈边色数不超过 $\Delta(G)+3$. 文献[8] 证明了不包含4圈、6圈、8圈和9圈的平面图满足上述猜想而且还给出了一个不包含4圈的平面图 $G$ 的无圈边色数的上界为 $\Delta(G)+15$. 文献[9] 则研究了基于遗传机制的图着色分配算法. 本文中，我们在文献[8] 的基础上进一步研究了不包含4圈的平面图 $G$ 的无圈边染色，证明了不含4圈的平面图的无圈边色数不超过 $\Delta(G)+6$.

首先我们给出一些本文中用到的记号.

**定义1**[6]　设 $\pi$ 是图 $G$ 的1个 $k-$无圈边染色，$\forall uv\in E(G)$，$\pi(uv)$ 表示边 $uv$ 所染的颜色. $\forall v\in V(G)$，$\pi(v)$ 表示全体与顶点 $v$ 关联的边所染的颜色. 如果存在1种颜色 $\alpha\in\pi(v)$，则我们称该颜色在顶点 $v$ 表现. $\forall W\subset V(G)$，$\pi(W)=\bigcup\limits_{v\in W}\pi(v)$. 设 $u,v$ 是图 $G$ 的2个不同的顶点，记 $W_G(u,v)$ 表示图 $G$ 中顶点 $u$ 的全体邻点 $s$ 满足 $\pi(us)\in\pi(v)$.

**定义2**[7]　设 $\pi$ 是图 $G$ 的1个 $k-$无圈边染色，如果图 $G$ 中的1条路的边的染色依次为颜色 $\alpha$ 和颜色 $\beta$，则我们称这条路为图 $G$ 的1条 $(\alpha,\beta)-$路.

**定义3**[8]　设 $v\in V(G)$，记 $N(v)$ 为顶点 $v$ 的邻集，它表示与顶点 $v$ 邻接的全体顶点构成的集合，记 $d(v)=|N(v)|$，它表示顶点 $v$ 的度数. 如果 $d(v)=k$，则我们称它为一个 $k-$点，如果 $d(v)\geqslant k$（或 $d(v)$

* **收稿日期**：2011－04－30
**基金项目**：中央高校基本科研业务费专项基金资助项目（LK0103）.
**作者简介**：张　埂（1986－），男，四川人，硕士，主要从事图论染色方面的研究.
**通迅作者**：苗连英（1964－），女，山东人，教授，博士生导师，主要从事图论及其应用方面的研究.

$\leq k$),我们称它为一个 $k^+$ - 点(或 $k^-$ - 点). 记 $N_k(v) = \{u \in N(v) \mid d(u) = k\}$, $n_k(v) = |N_k(v)|$. 为表述方便,我们用 $F(G)$ 表示平面图 $G$ 的面集. $\forall f \in F(G)$,记 $d(f)$ 为面 $f$ 的度数,它表示与面 $f$ 相关联的边的数目(其中割边算 2 次). 如果一个面 $f$ 的度数为 $k$,我们称其为一个 $k$ - 面. 我们记 $n_t(v)$ 表示与顶点 $v$ 相关联的 3 - 面的个数.

## 1　主要结论

本文研究的平面图 $G$ 不包含 4 圈,从而对图 $G$ 中任意一个 $k$ - 点 $v$,图 $G$ 中与 $v$ 相关联的 3 - 面的个数不超过$\left[\frac{k}{2}\right]$(其中$\left[\frac{k}{2}\right]$表示不大于$\frac{k}{2}$ 的最大整数),从而有以下引理:

**引理 1**[8]　设 $G$ 是一个不包含 4 圈的平面图,$v$ 是图 $G$ 的一个 $d$ - 点,则图 $G$ 中与 $v$ 相关联的 3 - 面的个数不超过$\left[\frac{d}{2}\right]$.

**引理 2**[6]　设 $G$ 是一个简单图,$uv \in E(G)$,$\pi$ 是 $G\backslash uv$ 的一个 $k$ - 无圈边染色. 如果 $|\pi(u) \cup \pi(v) \cup \pi(W_{G\backslash uv}(u,v))| < k$,则染色 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的一个 $k$ - 无圈边染色.

**引理 3**　设图 $G$ 是 1 个 2 - 连通的简单平面图且不包含 4 圈,则下列情形之一成立:

**情形 1**:图 $G$ 包含 1 个 3 - 面关联至少 2 个 $3^-$ - 点,

**情形 2**:图 $G$ 包含 1 个 2 - 点邻接至少 1 个 $7^-$ - 点,

**情形 3**:图 $G$ 包含 1 个 3 - 点邻接至少 1 个 $6^-$ - 点和 1 个 $7^-$ - 点,

**情形 4**:图 $G$ 包含 1 个 4 - 点邻接至少 3 个 $5^-$ - 点,

**情形 5**:图 $G$ 包含 1 个 $d$ - 点邻接至少$(d-5)$ 个 $4^-$ - 点而且其中至少有 1 个 2 - 点.

**证明**　反设引理 3 结论不成立,则由欧拉公式 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ 变形可得

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = -8.$$

对 $V(G) \cup F(G)$ 中的任意元素 $x$,我们定义一个初始权函数 $\omega(x)$:$\omega(x) = d(x) - 4$. 则

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = -8 < 0.$$

下面利用差值转移方法构造 $V(G) \cup F(G)$ 中任意元素 $x$ 的新的权值 $\omega'(x)$,其中差值转移规则如下:

(R1):$4^+$ - 点向其关联的 3 - 面转移$\frac{1}{5}$;

(R2):$6^+$ - 点向其邻接的 4 - 点转移$\frac{1}{5}$;

(R3):7 - 点向其邻接的 3 - 点转移$\frac{1}{3}$;

(R4):$8^+$ - 点向其邻接的 2 - 点转移 1,向其邻接的 3 - 点转移$\frac{1}{2}$;

(R5):$5^+$ - 面 $f$ 向其邻接的 3 - 面 $s$ 转移$\frac{1}{5}n(f,s)$,其中 $n(f,s)$ 表示面 $f$ 与面 $s$ 所包含的公共边数.

下证 $\forall x \in V(G) \cup F(G)$,都有 $\omega'(x) \geq 0$,从而出现矛盾.

$\forall f \in F(G)$,当 $d(f) = 3$ 时,由情形 1 不成立可知 $f$ 关联至少 2 个 $4^+$ - 点,同时由图 $G$ 不包含 4 圈可知面 $f$ 邻接的面都是 $5^+$ - 面. 由(R1)和(R5)可得 $\omega'(f) = \omega(f) + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 0$. 当 $d(f) = 4$ 时,$\omega'(f) = \omega(f) \geq 0$. 当 $d(f) \geq 5$ 时,$\omega'(f) \geq \omega(f) - d(f) \times \frac{1}{5} \geq 0$.

$\forall v \in V(G)$,当 $d(v) = 2$ 时,由情形 2 不成立可知 $v$ 的 2 个邻点都是 $8^+$ - 点,从而由(R4)可得 $\omega'(v) = \omega(v) + 2 \times 1 = 0$. 当 $d(v) = 3$ 时,由情形 3 不成立可知如果 $v$ 邻接 1 个 $6^-$ - 点,则它的其余 2 个

邻点都是 $8^+$ - 点,由(R4)可得 $\omega'(v) = \omega(v) + 2 \times \frac{1}{2} = 0$. 否则 $v$ 的3个邻点都是 $7^+$ - 点,从而由(R3)可得 $\omega'(v) = \omega(v) + 3 \times \frac{1}{3} = 0$. 当 $d(v) = 4$ 时,由引理1可知 $v$ 至多关联2个3 - 面,由情形4不成立可知 $v$ 邻接至少2个 $6^+$ - 点,再由(R1)和(R2)可得 $\omega'(v) \geqslant \omega(v) + 2 \times \frac{1}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = 0$. 当 $d(v) = 5$ 时,由引理1可知 $v$ 亦至多关联2个3 - 面,从而 $\omega'(v) \geqslant \omega(v) - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} > 0$. 当 $d(v) = 6$ 时,由引理1知 $v$ 至多关联3个3 - 面并邻接至多6个4 - 点,从而 $\omega'(v) \geqslant \omega(v) - 3 \times \frac{1}{5} - 6 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} > 0$. 当 $d(v) = 7$ 时,$\omega'(v) = \omega(v) - n_3(v) \times \frac{1}{3} - n_4(v) \times \frac{1}{5} - n_t(v) \times \frac{1}{5} \geqslant 7 - 4 - 7 \times \frac{1}{3} - 3 \times \frac{1}{5} > 0$. 当 $d(v) \geqslant 8$ 时,$\omega'(v) = \omega(v) - n_2(v) \times 1 - n_3(v) \times \frac{1}{2} - n_4(v) \times \frac{1}{5} - n_t(v) \times \frac{1}{5}$,如果 $n_2(v) = 0$,则 $\omega'(v) = d(v) - 4 - n_3(v) \times \frac{1}{2} - n_4(v) \times \frac{1}{5} - n_t(v) \times \frac{1}{5}$,首先我们有 $n_4(v) \leqslant d(v) - n_3(v)$. 从而当 $n_3(v) \leqslant \left[\frac{d}{2}\right]$ 时,$\omega'(v) \leqslant d(v) - 4 - n_3(v) \times \frac{1}{2} - (d(v) - n_3(v)) \times \frac{1}{5} - \left[\frac{d(v)}{2}\right] \times \frac{1}{5} \geqslant d(v) - 4 - \frac{3}{10} \times n_3(v) - \frac{1}{5} \times d(v) - \frac{1}{10} \times d(v) \geqslant \frac{7}{10} \times d(v) - \frac{3}{10} \times n_3(v) - 4 \geqslant \frac{7}{10} \times d(v) - \frac{3}{10} \times \frac{d(v)}{2} - 4 > 0$. 当 $n_3(v) > \left[\frac{d}{2}\right]$ 时,$\omega'(v) \geqslant d(v) - 4 - n_3(v) \times \frac{1}{2} - (d(v) - n_3(v)) \times \frac{1}{5} - (d(v) - n_3(v)) \times \frac{1}{5} \geqslant \frac{3}{5} \times d(v) - 4 - \frac{1}{10} \times n_3(v) \geqslant \frac{3}{5} \times d(v) - \frac{1}{10} \times d(v) - 4 = \frac{1}{2} \times d(v) - 4 > 0$.

从而 $n_2(v) > 0$,再由情形1不成立可知每一个关联于顶点 $v$ 的3 - 面 $f$ 至多关联一个 $3^-$ - 点,从而 $n_2(v) + n_3(v) \leqslant d(v) - n_t(v)$,如果 $n_t(v) \geqslant \frac{1}{4} \times n_4(v) + 5$,则 $\omega'(v) = d(v) - 4 - n_2(v) - \frac{1}{2} \times n_3(v) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - \frac{1}{5} \times n_t(v) \geqslant d(v) - 4 - (n_2(v) + n_3(v)) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - \frac{1}{5} \times n_t(v) \geqslant d(v) - 4 - (d - n_t(v)) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - \frac{1}{5} \times n_t(v) \geqslant \frac{4}{5} n_t(v) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - 4 > 0$. 当 $n_t(v) < \frac{1}{4} \times n_4(v) + 5$,则 $\omega'(v) = d(v) - 4 - n_2(v) - \frac{1}{2} \times n_3(v) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - \frac{1}{5} \times n_t(v) \geqslant d(v) - 4 - n_2(v) - \frac{1}{2} \times n_3(v) - \frac{1}{5} \times n_4(v) - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times n_4(v) + 5\right) = d(v) - 5 - n_2(v) - \frac{1}{2} \times n_3(v) - \frac{1}{4} \times n_4(v) \geqslant d(v) - 5 - (n_2(v) + n_3(v) + n_4(v)) > 0$. 这时因为情形5不成立,从而 $(n_2(v) + n_3(v) + n_4(v)) \leqslant d(v) - 6$. 证毕.

**定理1** 设图 $G$ 是一个简单平面图且不包含4圈,则 $\chi'_\alpha(G) \leqslant \Delta(G) + 6$.

**证明** 设图 $G$ 是满足定理1条件的最小反例,则 $G$ 是2 - 连通的. 令 $k = \Delta(G) + 6$,$C$ 表示颜色集 $\{1, 2, \cdots, k\}$,根据引理3,只需证明如下情形:

**情形1** 图 $G$ 包含1个3 - 面关联至少2个 $3^-$ - 点.

设 $f$ 为图 $G$ 中满足条件的1个3 - 面,它关联的3个顶点为 $v_1, v_2, v_3$,其中 $d(v_1) \leqslant 3$,$d(v_2) \leqslant 3$. 设 $v_1$ 异于 $v_2$ 和 $v_3$ 的邻点为 $y_1$,$v_2$ 异于 $v_1$ 和 $v_3$ 的邻点为 $y_2$. 令 $G' = G \backslash v_1v_2$,由图 $G$ 的最小性知 $G'$ 存在1个 $k$ - 无圈边染色 $\pi$. 则当 $|\pi(v_1) \cap \pi(v_2)| = 0$ 时,可以从 $C \backslash \{\pi(v_1), \pi(v_2)\}$ 中选取1种颜色染边 $v_1v_2$ 而得到图 $G$ 的1个 $k$ - 无圈边染色. 当 $|\pi(v_1) \cap \pi(v_2)| = 1$ 时,有 $|\pi(v_1) \cup \pi(v_2) \cup \pi(W_G(v_1, v_2))| \leqslant \Delta(G) + 2 < k$,由引理2可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的一个 $k$ - 无圈边染色. 否则 $|\pi(v_1) \cap \pi(v_2)| = 2$. 此时 $\pi(v_1y_1) = \pi(v_2v_3)$,$\pi(v_1v_3) = \pi(v_2vy_2)$. 由于 $|\pi(v_1) \cup \pi(v_2) \cup \pi(v_3)| \leqslant \Delta(G) < k$,从而存在1种颜

色 $\alpha \in C\backslash\{\pi(v_1) \cup \pi(v_2) \cup \pi(v_3)\}$ 使得边 $v_1v_2$ 染上颜色 $\alpha$ 后构成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

**情形 2**　图 $G$ 包含 1 个 2 - 点邻接至少 1 个 $7^-$ - 点.

设图 $G$ 中的 1 个 2 - 点 $u$ 邻接 1 个 $7^-$ - 点 $v$,令 $G' = G\backslash uv$. 由图 $G$ 的最小性知 $G'$ 存在 1 个 $k$ - 无圈边染色 $\pi$. 容易验证 $|\pi(u) \cup \pi(v) \cup \pi(W_{G'}(u,v))| \leqslant \Delta(G) + 5 < 4$,从而由引理 2 可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

**情形 3**　图 $G$ 包含 1 个 3 - 点邻接至少 1 个 $6^-$ - 点和 1 个 $7^-$ - 点.

设图 $G$ 中的 1 个 3 - 点邻接 1 个 $6^-$ - 点 $u$ 和 1 个 $7^-$ - 点 $v$,其余下的 1 个邻点为 $y$,进而可设 $d(u) = 6, d(v) = 7, d(y) = \Delta(G)$(否则证明会更简单). 令 $G' = G\backslash xu$. 由图 $G$ 的最小性知 $G'$ 存在 1 个 $k$ - 无圈边染色 $\pi$. 不妨设 $\pi(xv) = 1, \pi(xy) = 2$,则:

(1) 如果 $|\pi(x) \cap \pi(u)| = 0$,则 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(W_{G'}(x,u))| \leqslant 7 < k$. 由引理 2 可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

(2) 如果 $|\pi(x) \cap \pi(u)| = 1$,则 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(W_{G'}(x,u))| \leqslant \Delta(G) + 5 < k$. 由引理 2 可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

(3) 如果 $|\pi(x) \cap \pi(u)| = 2$, 此时 $\pi(x) \cap \pi(u) = \{1,2\}$. 如果 $\pi(xy) \notin \pi(v)$, 则 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(v)| \leqslant 11 < k$. 从而存在 1 种颜色 $\alpha \in C\backslash\{\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(v)\}$,令边 $xv$ 染颜色 $\alpha$ 可得到 $G'$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色,此时问题转化为情形 3(2). 否则 $\pi(xy) \in \pi(v)$,此时若 $\pi(xv) \notin \pi(y)$,有 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(y)| \leqslant \Delta(G) + 4 < k$. 从而存在 1 种颜色 $\beta \in C\backslash\{\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(y)\}$ 使得 $xy$ 染上颜色 $\beta$ 后仍是 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色,此时问题转化为情形 3(2). 从而 $\{1,2\} \subseteq \pi(u) \cap \pi(v) \cap \pi(y)$. 不妨设 $\pi(u) = \{1,2,3,4,5\}$,如果 $\{3,4,5\}$ 都不在顶点 $v$ 表现,则可设 $\pi(v) = \{1,2,6,7,8,9,10\}$,从而 $\{3,4,\cdots,10\}$ 中恰有 2 种颜色在顶点 $y$ 表现. 否则,如果 $\{3,4,\cdots,10\}$ 在顶点 $y$ 表现的颜色数小于 2,则与图 $G'$ 是 $k$ - 无圈边染色的矛盾;如果 $\{3,4,\cdots,10\}$ 在顶点 $y$ 表现的颜色数多于 2,则 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(W_{G'}(x,u))| \leqslant \Delta(G) + 5 < k$,由引理 2 可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色. 从而不妨设颜色 3,4(当任意选取其它 2 种颜色时证明类似)恰在顶点 $y$ 表现,此时可设 $\pi(v) = \{1,2,3,4,11,\cdots,k\}$,我们令边 $xv$ 重新染色颜色 11,边 $xy$ 重新染色颜色 5 可得到图 $G'$ 的 1 个新的 $k$ - 无圈边染色,此时问题即转化为情形 3(2). 同理可证当颜色集 $\{3,4,5\}$ 中恰有 1 种或 2 种颜色在顶点 $v$ 表现时,都可通过对边 $xv$ 和 $xy$ 重新染色而将问题转化为情形 3(2). 而当颜色集 $\{3,4,5\}$ 在顶点 $v$ 表现的颜色数多于 2 时,则由 $|\pi(x) \cup \pi(u) \cup \pi(W_{G'}(x,u))| \leqslant \Delta(G) + 5 < k$ 和引理 2 可将 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

**情形 4**　图 $G$ 包含 1 个 4 - 点邻接至少 3 个 $5^-$ - 点.

设 $v$ 是图 $G$ 中的 1 个 4 - 点,它邻接的 3 个 $5^-$ - 点分别为 $v_1, v_2, v_3$,其余下的 1 个邻点为 $v_4$. 令 $G' = G\backslash vv_1$,由图 $G$ 的最小性知 $G'$ 存在 1 个 $k$ - 无圈边染色 $\pi$,不妨设 $\pi(vv_2) = 1, \pi(vv_3) = 2, \pi(vv_4) = 3$,则:

(1) 当 $|\pi(v) \cap \pi(v_1)| = 0$ 时,可以从 $C\backslash\{\pi(v) \cup \pi(v_1)\}$ 中选取 1 种颜色染边 $vv_1$ 而得到图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

(2) 当 $|\pi(v) \cap \pi(v_1)| = 1$ 时,则 $|\pi(v) \cup \pi(v_1) \cup \pi(W_{G'}(v,v_1))| \leqslant \Delta(G) + 5 < k$,由引理 2 可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色.

(3) 当 $|\pi(v) \cap \pi(v_1)| = 2$ 时,不妨设 $\pi(v) \cap \pi(v_1) = \{1,3\}$(同理可证当 $\pi(v) \cap \pi(v_1) = \{1,2\}$ 或 $\{2,3\}$ 时结论亦成立),则如果颜色 2,3 都不在顶点 $v_2$ 表现,则 $|\pi(v) \cup \pi(v_1) \cup \pi(v_2)| \leqslant 9 \leqslant \Delta(G) + 4 < k$, 从而存在 1 种颜色 $\alpha \in C\backslash\{\pi(v) \cup \pi(v_1) \cup \pi(v_2)\}$,令边 $vv_2$ 重新染上颜色 $\alpha$ 可得到 $G'$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色,此时问题转化为情形 4(2). 从而颜色 2,3 至少有 1 种在顶点 $v_2$ 表现. 同理可证颜色 1,2 至少有 1 种在顶点 $v_4$ 表现. 不妨设 $\pi(v_1) = \{1,3,4,5\}$,从而对任意颜色 $i \in \{6,7,\cdots,\Delta(G) + 6\}$ 一定存在 1 条由 $v$ 出发经 $v_2$ 到达 $v_1$ 的 $(1,i)$ - 路或 1 条由 $v$ 出发经 $v_4$ 到达 $v_1$ 的 $(3,i)$ - 路,否则可从 $\{6,7,\cdots,\Delta(G) + 6\}$ 中选取 1 种颜色染边 $vv_1$ 而得到图 $G$ 的 1 个 $k$ - 无圈边染色. 令 $r =$

$|\{6,7,\cdots,\Delta(G)+6\}|$,则 $r=\Delta(G)+1$,从而 $d(v_2)=5$,$d(v_4)=\Delta(G)$. 不妨设$\{6,7,8\}\subseteq\pi(v_2)$,$\{9,10,\cdots,\Delta(G)+6\}\subseteq\pi(v_2)$,$\forall i\in\{6,7,8\}$,因为存在1条由 $v$ 出发经 $v_2$ 到达 $v_1$ 的$(1,i)$-路,从而不存在由 $v$ 出发经 $v_2$ 到达 $v_4$ 的$(1,i)$-路. 如果颜色 $1\in\pi(v_4)$,则令边 $vv_4$ 染颜色6可得到 $G'$ 的1个新的 $k$-无圈边染色,此时问题转化为情形4(2). 否则 $2\in\pi(v_4)$,如果颜色集$\{6,7,8\}$中有1种颜色 $\alpha$ 不在顶点 $v_3$ 表现,则经边 $vv_4$ 染上颜色 $\alpha$ 亦可得到 $G'$ 的1个新的 $k$-无圈边染色,此时问题转化为情形4(2). 否则颜色集$\{6,7,8\}$中的颜色都在顶点 $v_3$ 表现,又因为 $d(v_3)\leqslant 5$,从而顶点 $v_3$ 至多表现颜色集$\{1,3,4,5,9,10,\cdots,\Delta(G)+6\}$中的1种颜色. 当顶点 $v_3$ 不表现颜色集$\{1,3,4,5,9,10,\cdots,\Delta(G)+6\}$中的颜色时,令边 $vv_4$ 染颜色6,边 $vv_3$ 染颜色4,边 $vv_1$ 染颜色9可得到图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色;当顶点 $v_3$ 表现颜色集$\{1,3\}$中的1种颜色时,亦可令边 $vv_4$ 染颜色6,边 $vv_3$ 染颜色4,边 $vv_1$ 染颜色9可得到图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色;当顶点 $v_3$ 表现颜色集$\{4,5\}$中的1种颜色(不妨设为颜色4)时,令边 $vv_4$ 染颜色6,边 $vv_3$ 染颜色5,边 $vv_1$ 染颜色9可得到图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色;当顶点 $v_3$ 表现颜色集$\{9,10,\cdots,\Delta(G)+6\}$中的1种颜色(不妨设为颜色9)时,令边 $vv_4$ 染颜色6,边 $vv_3$ 染颜色4,边 $vv_1$ 染颜色10可得到图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色.

(4) 当 $|\pi(v)\cap\pi(v_1)|=3$ 时,则有 $\pi(v)\cap\pi(v_1)=\{1,2,3\}$. 如果颜色2,3都不在顶点 $v_2$ 表现,则由 $|\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(v_2)|\leqslant\Delta(G)+3<k$,从而存在1种颜色 $\alpha\in C\backslash\{\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(v_2)\}$ 使得边 $vv_2$ 重新染上颜色 $\alpha$ 可得到 $G'$ 的1个 $k$-无圈边染色,此时问题转化为情形4(3). 从而颜色2,3至少有1种在顶点 $v_2$ 表现,同理可证颜色1,3至少有1种在顶点 $v_3$ 表现,颜色1,2至少有1种在顶点 $v_4$ 表现. 现考虑颜色2,3仅有1种在顶点 $v_2$ 表现(不妨设为3),此时 $|\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(v_2)\cup\pi(v_4)|\leqslant\Delta(G)+5<k$,从而存在1种颜色 $\beta\in C\backslash\{\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(v_2)\cup\pi(v_4)\}$,使得边 $vv_2$ 重新染上颜色 $\beta$ 可得到 $G'$ 的1个 $k$-无圈边染色,此时问题转化为情形4(3). 从而颜色2,3都在顶点 $v_2$ 表现. 同理可证颜色1,3都在顶点 $v_3$ 表现,颜色1,2都在顶点 $v_4$ 表现. 从而 $|\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(W_{G'}(v,v_1))|\leqslant\Delta(G)+5<k$,由引理2可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色.

**情形5** 图 $G$ 包含1个 $d$-点邻接至少$(d-5)$个 $4^-$-点而且其中至少有1个2-点.

设 $v$ 图 $G$ 的一个满足条件的 $d$-点,其邻点分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_d$,其中 $2=d(v_1)$,$2\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_{d-5})\leqslant 4$. 设 $v_1$ 异于 $v$ 的邻点为 $y$. 设 $G'=G\backslash vv_1$,由图 $G$ 的最小性知 $G'$ 存在1个 $k$-无圈边染色 $\pi$. 不妨设 $\pi(xv_l)=i$(其中 $2\leqslant i\leqslant d$). 则:如果 $\pi(v_1y)\notin\pi(v)$,则可以从 $C\backslash\{2,3,\cdots,d,\pi(v_1y)\}$ 中选取1种颜色染边 $vv_1$. 从而得到图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色. 若 $\pi(v_1y)\in\{2,3,\cdots,d-5\}$,则 $|\pi(v)\cup\pi(v_1)\cup\pi(W_{G'}(v,v_1))|\leqslant\Delta(G)+2<k$,由引理2可知 $\pi$ 可扩展成图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色. 否则 $\pi(v_1y)\in\{d-4,d-3,d-2,d-1,d\}$. 又因为 $d(y)\leqslant\Delta(G)$,从而存在一种颜色 $\alpha$,使得 $\alpha\in C/\{\pi(y),\pi(vv_{d-4}),\pi(vv_{d-3}),\pi(vv_{d-2}),\pi(vv_{d-1}),\pi(vv_d)\}$ 且当边 $v_1y$ 重新染上颜色 $\alpha$ 可得到 $G'$ 的1个 $k$-无圈边染色,此时问题转化为前2种情况.

综上可知,对图 $G$ 的任意一种情形都可由图 $G'$ 的1个 $k$-无圈边染色扩展成图 $G$ 的1个 $k$-无圈边染色,这与图 $G$ 是一个反例矛盾. 证毕.

## 参考文献:

[1] ALON N,MCDIARMID C J H,REED B. Acyclic coloring of graphs[J]. Random Structures & Algorithms,1991,2(3):277-288.

[2] MOLLY M,REED B. Further algorithmic aspects of the local lemma[C]. Jeffrey Vitter. Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York:ACM,1998,524-529.

[3] ALON N,SUDAKOV B,ZAKS A. Acyclic edge colorings of graphs[J]. Journal of Graph Theory,2001,37(3):157-167.

[4] SKULRATTANKULCHAI S. Acyclic colorings of subcubic graphs[J]. Information Processing Letters,2004,92(4):161-167.

(下转第644页)