云南大学学报（自然科学版），2011，33（4）：378～382　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

# 锥度量空间中两对非相容映象的一个新的公共不动点定理*[1]

张军贺，谷　峰
（杭州师范大学 应用数学研究所，数学系，杭州 浙江　310036）

**摘要**：自锥度量空间的概念被提出以来，已经有数位学者对其结构和性质进行了探讨. 研究了锥度量空间中非相容映象对，并利用非相容映象对的性质和压缩条件得到一类映象的公共不动点定理，其结果推广了相关文献的结果.

**关键词**：锥度量空间；非相容映象对；(Ag)型 $R$－弱交换映象；公共不动点
**中图分类号**：O 177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2011)04－0378－05

自 HUANG. L. G 和 ZHANG. X[1] 在 2007 年引入锥度量空间的概念以来，锥度量空间的理论已经有了较大的发展，特别是在锥度量空间中的不动点理论方面，已经取得了许多重要的研究成果[1－18]. 最近，朱奋秀和胡新启[9] 在度量空间中给出了非相容映象的公共不动点定理，本文的目的是将其推广到锥度量空间中. 我们在锥度量空间中引进了(Ag)型 $R$－弱交换映象的概念，在不要求空间是完备的和锥是正规锥的条件下利用自映象对的非相容性和(Ag)型 $R$－弱交换条件，给出了锥度量空间中的一个新的压缩型映象的公共不动点定理.

## 1　预备知识

在本文中，设 $E$ 为 Banach 空间，$P$ 是 $E$ 的子集且 $\mathrm{int}P \neq \emptyset$（$\mathrm{int}P$ 是 $P$ 的内部）.

**定义 1**[1]　$P$ 称为锥，如果：

(1) $P$ 是非空闭集，且 $P \neq \{0\}$；

(2) 若 $a, b \in R, a, b \geqslant 0, x, y \in P$，则 $ax + by \in P$；

(3) 若 $x \in P$ 且 $-x \in P$，则 $x = 0$.

**定义 2**[1]　给定一个 $P$ 后，引入半序“$\leqslant$”为：$x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$. 记 $x < y$ 当且仅当 $x \leqslant y$ 而 $x \neq y$；$x \ll y$ 当且仅当 $y - x \in \mathrm{int}P$.

**定义 3**[1]　设 $X$ 是一个非空集合，如果映象 $\mathrm{d}: X \times X \to E$ 满足如下条件：

(1) 对任意 $x, y \in X$ 有 $0 \preceq \mathrm{d}(x, y)$，并且 $\mathrm{d}(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(2) 对任意 $x, y \in X$ 有 $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$；

(3) 对任意 $x, y, z \in X$ 有 $\mathrm{d}(x, y) \preceq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(y, z)$.

则 d 称为 $X$ 上的锥度量，$(X, \mathrm{d})$ 称为一个锥度量空间.

**定义 4**[13] 锥度量空间$(X, \mathrm{d})$ 上的自映象对$(f, g)$ 称为是相容的，如果 $\forall \{x_n\} \subset X$，当 $fx_n \to x, gx_n \to x, x \in X$ 时，有 $\mathrm{d}(fgx_n, gfx_n) \to 0 (n \to \infty)$.

---

* **收稿日期**：2010－11－24
**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(11071169)；浙江省自然科学基金资助项目(Y6110287)；杭州师范大学研究生教改基金资助项目.

**作者简介**：张军贺(1986－ )，女，吉林人，硕士生，主要从事非线性泛函分析方面的研究.
**通迅作者**：谷　峰(1960－ )，男，辽宁人，教授，主要从事非线性泛函分析及应用方面的研究.

**注 1**　由定义 1 知,如果映象对$(f,g)$是非相容的,则必存在序列$\{x_n\} \subset X$和$t \in X$,满足

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t \in X,$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n)$或不存在,或存在但不等于 0.

**定义 5**　锥度量空间$(X,d)$上的自映象对$(f,g)$称为是(Ag)型$R$-弱交换的,如果存在$R > 0$,使$\forall x \in X$,有$d(ffx, gfx) \leqslant Rd(fx, gx)$.

定义 6　称函数$\phi$满足条件$(\phi)$,如果函数$\phi: E \to E$是单调不减和右连续的,且$\phi(t) < t, \forall t > 0$.

**引理 1**　设函数$\phi$满足条件$(\phi)$,对任一实数$t \in E$,如果$t \leqslant \phi(t)$,则$t = 0$.

**引理 2**　设$(X,d)$是锥度量空间,$P$是一个锥且$\mathrm{int}P \neq \varnothing$,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$是$X$中的序列,$x_n \to x$,$y_n \to y(n \to \infty)$,则$d(x_n, y_n) \to d(x,y)(n \to \infty)$.

**证明**　$\forall c \in E, 0 \ll c$. 由于$x_n \to x, y_n \to y(n \to \infty)$,则存在$N$,当$n > N$时有$d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}, d(y_n, y) \ll \frac{c}{2}$. 由于$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$,故

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c,$$

又由于$d(x,y) \leqslant d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$,

$$d(x,y) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c,$$

因此对于任意的$m > 1$,有

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \ll \frac{c}{m}, d(x,y) - d(x_n, y_n) \ll \frac{c}{m}.$$

所以$\frac{c}{m} - (d(x_n, y_n) - d(x,y)) \in P, \frac{c}{m} - (d(x,y) - d(x_n, y_n)) \in P$,由于$P$是闭的,当$m \to \infty$时,$\frac{c}{m} \to 0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) - d(x,y) \in P, d(x,y) - \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \in P,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$. 证毕.

## 2　主要结果

**定理 1**　设$S,T,A,B$是锥度量空间$X$上的 4 个自映象,$P$是一个锥,$\mathrm{int}P \neq \varnothing$且满足以下条件:

(i) $(S,A)$,$(T,B)$是 2 对(Ag)型$R$-弱交换非相容映象对;

(ii) $\overline{SX} \subset BX$,$\overline{TX} \subset AX$;

(iii) $\forall x, y \in X$,有

$$d(Sx, Ty) \leqslant \phi\left(\max\left\{d(Ax, By), d(Ax, Sx) + d(By, Ty), \frac{d(Sx, By) + d(Ax, Ty)}{2}\right\}\right),$$

其中函数$\phi$满足条件$(\phi)$.

则$S,T,A,B$在$X$中有唯一的公共不动点$x^*$,并且此公共不动点$x^*$是映象$S,T,A,B$的不连续点.

**证明**　因为$(S,A)$,$(T,B)$是$X$上的非相容映象对,故存在序列$\{x_n\}$,$\{y_n\} \subset X$,使得

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = t_1 \in \overline{SX}, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} Ty_n = \lim_{n\to\infty} By_n = t_2 \in \overline{TX}. \tag{2}$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n, ASx_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} d(TBy_n, BTy_n)$或者不存在,或者存在但不等于 0. 由于$t_1 \in \overline{SX} \subset BX$,$t_2 \in \overline{TX} \subset AX$,所以存在$u, v \in X$,使得

$$t_1 = Bu, t_2 = Av. \tag{3}$$

下面证明$Sv$是$S$与$A$的公共不动点,即$Sv = SSv = ASv$. 事实上,由条件(iii)知,有

$$d(Sv,Ty_n)\leqslant\phi\left(\max\left\{d(Av,By_n),d(Av,Sv)+d(By_n,Ty_n),\frac{d(Sv,By_n)+d(Av,Ty_n)}{2}\right\}\right).$$

利用引理2于上式2边,令 $n\to\infty$,并注意到(2),(3)式和函数 $\phi$ 的不减性,得

$$d(Sv,Av)\leqslant\phi(d(Sv,Av)).$$

从而由引理1可知 $d(Sv,Av)=0$,即

$$Sv=Av. \tag{4}$$

又由于 $(S,A)$ 是(Ag)型 $R-$ 弱交换映象对,因此有 $d(SSv,ASv)\leqslant Rd(Sv,Av)=0$,即

$$SSv=ASv. \tag{5}$$

由条件(iii)和(5)式可知,有

$$d(SSv,Ty_n)\leqslant\phi\left(\max\left\{d(ASv,By_n),d(ASv,SSv)+d(By_n,Ty_n),\frac{d(SSv,By_n)+d(ASv,Ty_n)}{2}\right\}\right).$$

利用引理2于上式2边,令 $n\to\infty$,并注意到(2)~(5)式得 $d(SSv,Av)\leqslant\phi(d(SSv,Av))$,从而由引理1可知 $d(SSv,Av)=0$,即

$$SSv=Av. \tag{6}$$

所以从(4)~(6)式得

$$SSv=ASv=Av=Sv, \tag{7}$$

即 $Sv$ 是 $S$ 与 $A$ 的公共不动点.

下证 $Sv$ 是 $T,B$ 的公共不动点. 事实上,利用条件(iii),有

$$d(Sx_n,Ty_n)\leqslant\phi\left(\max\left\{d(Ax_n,By_n),d(Ax_n,Sx_n)+d(By_n,Ty_n),\frac{d(Sx_n,By_n)+d(Ax_n,Ty_n)}{2}\right\}\right).$$

利用引理2于上式2边,令 $n\to\infty$,并注意到(1),(3)式,得 $d(Bu,Av)\leqslant\phi(d(Bu,Av))$,从而由引理1可知 $d(Bu,Av)=0$,即

$$Bu=Av. \tag{8}$$

又由条件(iii)知,有

$$d(Sv,Tu)\leqslant\phi\left(\max\left\{d(Av,Bu),d(Av,Sv)+d(Bu,Tu),\frac{d(Sv,Bu)+d(Av,Tu)}{2}\right\}\right).$$

从(4),(8)式和函数 $\phi$ 的不减性,得 $d(Sv,Tu)\leqslant\phi(d(Sv,Tu))$,再由引理1得 $d(Sv,Tu)=0$,即

$$Sv=Tu. \tag{9}$$

由(4),(8)和(9)式可得 $Bu=Tu$,于是由 $(T,B)$ 是(Ag)型 $R-$ 弱交换映象对,有 $d(TTu,BTu)\leqslant Rd(Tu,Bu)=0$,进而 $TTu=BTu$,从而由(9)式可得

$$TSv=BSv. \tag{10}$$

由条件(iii),有

$$d(Sv,TSv)\leqslant\phi\left(\max\left\{d(Av,BSv),d(Av,Sv)+d(BSv,TSv),\frac{d(Sv,BSv)+d(Av,TSv)}{2}\right\}\right).$$

由(4),(10)式和上式可得 $d(Sv,TSv)\leqslant\phi(d(Sv,TSv))$,从而由引理1得 $d(Sv,TSv)=0$,故

$$Sv=TSv=BSv. \tag{11}$$

故 $Sv$ 也是 $T,B$ 的公共不动点. 因此令 $x^*=Sv(=Av=Bu=Tu=t_1=t_2)$,则 $x^*$ 就是映象 $S,T,A,B$ 的公共不动点.

下面证明 $S,T,A,B$ 的公共不动点唯一. 事实上,假设 $y^*$ 也是 $S,T,A,B$ 的公共不动点,利用条件(iii),有

$$d(x^*,y^*)=d(Sx^*,Ty^*)\leqslant$$
$$\phi\left(\max\left\{d(Ax^*,By^*),d(Ax^*,Sx^*)+d(By^*,Ty^*),\frac{d(Sx^*,By^*)+d(Ax^*,Ty^*)}{2}\right\}\right)=$$
$$\phi(d(Sx^*,Ty^*))=\phi(d(x^*,y^*)),$$

从而由引理1得 $d(x^*,y^*)=0$,即 $x^*=y^*$,唯一性得证.

最后证明 $x^*$ 是 $S,T,A,B$ 的不连续点. 事实上,由(1),(3) 式,得

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = t_1 = Bu = x^*. \tag{12}$$

(1) 假设 $S$ 在 $x^*$ 处连续,则有

$$\lim_{n\to\infty} SAx_n = \lim_{n\to\infty} SSx_n = Sx^* = x^*.$$

再由$(S,A)$是(Ag) 型 $R$ - 弱交换映象,因此

$$d(SSx_n,ASx_n) \leqslant Rd(Sx_n,Ax_n), \tag{13}$$

于上式 2 边,令 $n\to\infty$,得

$$\lim_{n\to\infty} ASx_n = \lim_{n\to\infty} SSx_n = x^*,$$

从而有$\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n,ASx_n) = 0$,这与$\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n,ASx_n)$或不存在,或存在但不等于 0 矛盾,故 $S$ 在 $x^*$ 处不连续.

(2) 假设 $A$ 在 $x^*$ 处连续,则

$$\lim_{n\to\infty} ASx_n = Ax^* = x^*,$$

因此由(12),(13) 式,得

$$\lim_{n\to\infty} SSx_n = \lim_{n\to\infty} ASx_n = Ax^* = x^*,$$

这与(1) 中所证 $S$ 在 $x^*$ 处不连续矛盾,故 $A$ 在 $x^*$ 处不连续.

利用(2) 式所给出的序列$\{y_n\}$以及$(T,B)$是(Ag) 型 $R$ - 弱交换映象的条件同理可证 $T,B$ 在 $x^*$ 处不连续. 证毕.

**注 2**　① 本定理把度量空间的不动点定理相应地推广到锥度量空间中,从而扩大了定理的应用范围;② 大多数不动点定理都要求空间是完备的,而本定理并不要求空间 $X$ 的完备性;③ 锥度量空间中的不动点定理大多数要求锥是正规的,而本定理不要求锥是正规的;④ 很多不动点定理都要求涉及到的映象具有某种连续性(或者要求至少有 1 个映象是连续的),而本定理中的映象 $S,T,A,B$ 都是不连续的. 可见,本定理本质地改进和发展了前人的已有结果.

**注 3**　在定理 1 中分别取:① $A = B$;② $A = B = I$($I$ 是恒等映象);③ $A = B, S = T$;④ $A = B = I, S = T$ 等均可得到新的结果.

**定理 2**　设$(X,d)$是锥度量空间,$P$ 是一个锥且 $\operatorname{int}P \neq \emptyset$,$A,B,\{T_i\}_{i\in I}$($I$ 是指标集,$I$ 的势不小于 2) 分别是 $X$ 上的自映象和自映象族,若 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 满足以下条件:

(i) $\forall\ i \in I$,$(T_i,A)$,$(T_i,B)$ 都是(Ag) 型 $R$ - 弱交换非相容映象对;

(ii) $\overline{T_iX} \subset BX$,$\overline{T_iX} \subset AX$,$\forall i \in I$;

(iii) $\forall x,y \in X$,有

$$d(T_ix,T_jy) \leqslant \phi\left(\max\left\{d(Ax,By),d(Ax,T_ix) + d(By,T_jy),\frac{d(T_ix,By) + d(Ax,T_jy)}{2}\right\}\right),$$

其中 $i,j \in I$,函数 $\phi$ 满足条件$(\phi)$.

则 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 在 $X$ 中有唯一的公共不动点,并且此公共不动点是映象 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 的不连续点.

**证明**　对 $i,j,m \in I, i\neq j, i\neq m$,由定理 1 知 $A,B,T_i,T_j$ 和 $A,B,T_i,T_m$ 分别存在唯一的公共不动点 $x_{ij}$ 和 $x_{im}$,并且它们分别是映象 $A,B,T_i,T_j$ 和 $A,B,T_i,T_m$ 的不连续点. 现在证明 $x_{ij} = x_{im}$. 事实上,根据条件(iii),有

$$d(x_{ij},x_{im}) = d(T_ix_{ij},T_mx_{im}) \leqslant$$

$$\phi\left(\max\left\{d(Ax_{ij},Bx_{im}),d(Ax_{ij},T_ix_{ij}) + d(Bx_{im},T_mx_{im}),\frac{d(T_ix_{ij},Bx_{im}) + d(Ax_{ij},T_mx_{im})}{2}\right\}\right) =$$

$$\phi(d(x_{ij},x_{im})).$$

因此 $d(x_{ij},x_{im}) \leqslant \phi(d(x_{ij},x_{im}))$,即 $d(x_{ij},x_{im}) = 0$,从而 $x_{ij} = x_{im}$. 再根据 $i,j,m$ 的任意性可知,$A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 在 $X$ 中有唯一的公共不动点,且此公共不动点是 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 的不连续点. 证毕.

## 参考文献:


[1] HUANG L G, ZHANG X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings[J]. Math Anal Appl, 2007, 322(2): 1 468-1 476.

[2] WANG Y J, ZHU J. Common fixed piont theorems for two mappings in cone metric spaces[J]. 徐州师范大学学报:自然科学版, 2010, 28(3): 40-43.

[3] 袁清,高建军,王延伟. 锥度量空间中广义压缩映象及映象对的不动点定理[J]. 山东大学学报:理学版, 2008, 43(5): 82-86.

[4] ABBAS M, JUNGCK G. Common fixed piont results of nonmmuting mappings without continuity in cone metric spaces[J]. Math Anal Appl, 2008, 341(1): 416-420.

[5] RADENOVIC S. Common fixed points under contractive conditions in cone metric spaces[ J]. Comput Math Appl, 2009, 58 (6): 1 273-1 278.

[6] REZAPOUR Sh, HAMLARANI R. Some notes on the paper" Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"[ J] . Math Anal Appl, 2008, 345(2): 719-724.

[7] KADELBURG Z, RADENOVIC S, RADENOVIC V. Remarks on quasi – contraction on a cone metric space[ J]. Appl Math Lett, 2009, 22(11): 1 674-1 679.

[8] CHEN Chi-ming, CHANG Tong-hui. Common fixed piont theorems for a weaker Meir – Keeler type function in cone metric spaces[J]. Appl Math Lett, 2010, 23(11): 1 336-1 341.

[9] 朱奋秀,胡新启. 非相容映象的公共不动点定理[J]. 数学杂志, 2010, 30(3): 533-536.

[10] ILIC D, RADENOVIC V. Common fixed points for maps on cone metric space[J]. Math Anal Appl, 2008, 341(2): 876-882.

[11] ILIC D, RAKOCEVIC V. Quasi – contraction on cone metric space[J]. Appl Math Lett, 2009, 22(5): 728-731.

[12] ALTUNA I, DAMJANOVICB B, DJORIC D. Fixed point and common fixed point theorems on ordered conemetric spaces[J]. Appl Math Lett, 2010, 23(3): 310-316.

[13] JANKOVIC S, GOLUBOVIC Z, RADENOVIC S. Compatible and weakly compatible mappings in cone metric spaces[J]. Math and Computer Modelling, 2010, 52(9 – 10): 1 728-1 738.

[14] ABBAS M, ALI K M, RADENOVIC S. Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w – compatible mappings[J]. Appl Math Comput, 2010, 217(1): 195-202.

[15] 杜荣川. 多值伪压缩映射公共不动点的迭代逼近[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2004, 26(S1): 39-42.

[16] 王林,徐裕光. 广义 Lipschitz 伪压缩映射不动点的 Mann 迭代逼近[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2004, 26(S1): 35-38.

[17] ABBAS M, RHOADES B E. Fixed and periodic point results in cone metric spaces[J]. Appl Math Lett, 2009, 22(4): 511-515.

[18] ABBAS M, RHOADES B E, NAZIR T. Common fixed points for four maps in cone metric spaces[J]. Appl Math Comput, 2010, 216(1): 80-86.


# A new common fixed point theorem for two pairs of noncompatible mappings in cone metric spaces


ZHANG Jun-he, GU Feng

(Institute of Applied Mathematics, Department of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China)



**Abstract**: Since the notation of cone metric spaces was taised, several authors have studied its constructions and properties. The non compatible conditions of mapping was studies in the cone metric spaces. By making use of the noncompatible and contractive conditions, we establish common fixed piont theorems and extend the corresponding results in other references.



**Key words**: cone metric spaces; noncompatible mapping pairs; (Ag) type $R$ – weak commutativity mapping; common fixed point