云南大学学报（自然科学版），2011，33（3）：294～296　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性和特殊守恒量*1

贾利群[1]，孙现亭[2]，王肖肖[1]，张美玲[1]，解银丽[1]，田燕宁[1]
（1. 江南大学 理学院，江苏 无锡　214122；2. 平顶山学院 电气信息工程学院，河南 平顶山　467002）

摘要：在时间 t 不变群的特殊无限小变换下，研究 Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性以及由特殊 Noether－Lie 对称性导致的特殊 Noether 守恒量和特殊 Hojman 守恒量. 最后，举例说明结果的应用.

关键词：特殊无限小变换；Lagrange 系统；特殊 Noether－Lie 对称性；特殊守恒量
中图分类号：O 316　**文献标识码**：A　**文章编号**：0258－7971(2011)03－0294－03

约束力学系统的对称性主要有 Noether 对称性[1]、Lie 对称性[2]和 Mei 对称性[3]. Noether 对称性通过 Noether 等式可以直接找到 Noether 守恒量，时间 t 不变的特殊 Lie 对称可以直接找到 Hojman 守恒量，Mei 对称性可以直接找到 Mei 守恒量. 对称性和守恒量的研究在数学、物理和力学上有着重要的理论和实际意义，从 20 世纪末开始，对称性和守恒量的研究日趋活跃[4－12]. 目前，约束力学的对称性和守恒量理论仍是分析力学领域的一个研究热点[13－20].

在这些对称性和守恒量理论中，除了 Hojman 守恒量外，都是在时间 t 变化群的无限小变换下的对称性和守恒量理论. 本文将在时间 t 不变群的特殊无限小变换下，研究 Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性以及由特殊 Noether－Lie 对称性导致的特殊 Noether 守恒量和特殊 Hojman 守恒量. 首先给出 Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性的定义和判据，其次给出 Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性直接导致的特殊 Noether 守恒量的形式，最后给出 Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性直接导致的特殊 Hojman 守恒量的条件以及特殊 Hojman 守恒量的形式. 我们的创新点是，由给出的特殊 Noether－Lie 对称性，可一次性直接找到特殊 Noether 守恒量和特殊 Hojman 守恒量.

1　Lagrange 系统的特殊 Noether－Lie 对称性和特殊守恒量

引进时间 t 不变群的特殊无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{1}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_s 为无限小生成元. 引进变换(1) 的无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{2}$$

以及它的一次扩展和二次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{3}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{4}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t} = \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\dot{q}_s}. \tag{5}$$

考虑一个非奇异 Lagrange 系统

$$E_s(L) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{6}$$

其中 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数，$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$ 为 Euler 算子. 由方程(6) 可解得所有的广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

特殊的 Noether 对称性是 Hamilton 作用量在

---

* 收稿日期：2010－10－12
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10572021)；中央高校基本科研业务费专项基金资助(JUSRP31102)；江南大学预研基金资助项目(2008LYY011).
作者简介：贾利群(1953－)，男，河北人，教授，主要从事一般力学和应用数学方面的研究. E－mail：jlq0000@163.com.

特殊的无限小变换(1) 下的一种不变性.

命题 1　如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_s 满足如下特殊 Noether 等式

$$X^{(1)}(L) + \dot{G}_{\mathrm{N}} = 0. \tag{8}$$

那么, 这种不变性称为 Lagrange 系统的特殊 Noether 对称性,特殊 Noether 对称性导致如下的特殊 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\xi_s + G_{\mathrm{N}}. \tag{9}$$

证明　(9) 式两端对时间 t 求导, 利用特殊 Noether 等式(8) 和方程(6) 可得, $\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t}$ 即命题 1 成立.

特殊的 Lie 对称性是微分方程在时间 t 不变的群的特殊无限小变换(1) 下的一种不变性. 由定义可知,Lagrange 方程(6) 的特殊 Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}[E_s(L)] = 0. \tag{10}$$

命题 2　如果 Lagrange 方程(6) 在特殊无限小变换(1) 下的生成元 ξ_s 满足特殊 Lie 对称性的确定方程(10),且存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0 \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

成立,则系统的特殊 Lie 对称性将导致特殊 Hojman 守恒量[21]

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \text{const.} \tag{12}$$

2　Lagrange 系统的特殊 Noether – Lie 对称性及其导出的特殊守恒量

定义　如果 Lagrange 系统方程(6) 的对称性同时为特殊 Noether 对称性和特殊 Lie 对称性,这样的对称性称为 Lagrange 系统方程(6) 的特殊 Noether – Lie 对称性.

判据　对于 Lagrange 系统方程(6) ,如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t, \boldsymbol{q}_s, \dot{\boldsymbol{q}}_s)$ 满足如下方程

$$[X^{(1)}(L) + \dot{G}_{\mathrm{N}}]^2 + \{X^{(2)}[E_s(L)]\}^2 = 0, \tag{13}$$

则相应的对称性为 Lagrange 系统方程(6) 的特殊 Noether – Lie 对称性.

命题 3　对于 Lagrange 系统方程(6),特殊的 Noether – Lie 对称性可导致形如(9) 式的特殊 Noether 守恒量.

命题 4　对于 Lagrange 系统方程(6),如果存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足(11) 式, 则特殊的 Noether – Lie 对称性可导致形如(12) 式的特殊 Hojman 守恒量.

3　算　例

一粒子的动能 $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_2^2)$, 势能 $V = \text{const.}$ 试研究 Lagrange 系统的特殊 Noether – Lie 对称性导致的特殊守恒量.

显然,系统的 Lagrange 函数 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_2^2) - V$. 取生成元

$$\xi_1 = \xi_2 = t. \tag{14}$$

当

$$G_{\mathrm{N}} = -(q_1 + q_2) \tag{15}$$

时, 可验证生成元(14) 满足方程(13), 即该 Lagrange 系统具有特殊 Noether – Lie 对称性. 由(9) 式可得特殊 Noether – Lie 对称性导致的特殊 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)t - q_1 - q_2 = \text{const.} \tag{16}$$

由(11) 式可知,当

$$\mu = \dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{17}$$

时,(11) 式成立. 故有(12) 式可知, 系统的特殊 Lie 对称性导致的特殊 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{\dot{q}_1\dot{q}_2} = \text{const.} \tag{18}$$

通过这个简单的说明性例子可看到:相对分析力学理论得到的守恒量而言,对称性理论可得到新的守恒量,但其物理意义却从明显到不明显了[21]. 要阐明对称性理论得到的守恒量的意义,那将是一个艰巨的任务.

参考文献:

[1]　NOETHER A E. Invariante variationsproblems [J]. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys,1918,KI II 235-257.

[2]　LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. Journal of Physics A:Mathematical General, 1979,12(7):973-981.

[3]　MEI Feng-xiang. Form invariance of Lagrange system[J]. Beijing Inst Technol,2000,9(2):120-124.

[4]　梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京:科学出版社,1999.

[5] MEI Feng-xiang. Form invariance of appell equations [J]. Chin Phys,2001,10(3):177-180.

[6] 李仁杰,乔永芬,孟军. 变质量完整系统 Gibbs – Appell 方程的形式不变性[J]. 物理学报,2002,51(1):1-5.

[7] 罗绍凯. 转动相对论系统的 Appell 方程及其形式不变性[J]. 物理学报,2002,51(4):712-717.

[8] ZHANG Hong-bin, GU Shu-long. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoff systems with unilateral constraints[J]. Chinese Physics B,2002,11(8) 765-770.

[9] XU Xue-jun, MEI Feng-xiang, QIN Mao-chang. Non – Noether conserved quantity constructed by using form invariance for Birkhoffian system [J]. Chin Phys B, 2004,13(12):1 999-2 002.

[10] CHEN Xiang-wei, LI Yan-min, ZHAO Yong-hong. Lie symmetries, Perturbation to symmetries and adiabatic invariants of Lagrange system [J]. Physics Letters A, 2005,337:274-278.

[11] 张毅,葛伟宽. 相对论性力学系统的 Mei 对称性导致的新守恒律[J]. 物理学报,2005,54(4):1 464-1 467.

[12] 贾利群,郑世旺. 带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性[J]. 物理学报,2006,55(8):3 829-3 832.

[13] 罗绍凯,张永发,等. 约束力学系统动力学研究进展[M]. 北京:科学出版社,2008.

[14] JIA Li-qun, XIE Jia-fang, LUO Shao-kai. Mei symmetry and Mei conserved quantity of nonholonomic systems with unilateral Chetaev's Type in Nielsen style [J]. Chin Phys B,2008,17(5):1 560-1 564.

[15] JIA Li-qun, XIE Jia-fang, ZHENG Shi-wang. Structure equation and Mei conserved quantity for Mei symmetry of Appell equation [J]. Chin Phys B,2008,17(1):17-22.

[16] JIA Li-qun, CUI Jin-chao, LUO Shao-kai, et al. Special Lie symmetry and Hojman conserved quantity of Appell equations for a holonomic system[J]. Chinese Physics Letters,2009,26(3):030303 – 1-030303 – 3.

[17] 蔡建乐. 一般完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量[J]. 物理学报,2009,58(1):22-27.

[18] JIA Li-qun, ZHANG Yao-yu, CUI Jin-chao, et al. Structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in holonomic systems with unilateral constraints[J]. Communications in Theoretical Physics,2009,52(4):572-576.

[19] 方建会. Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的一种守恒量[J]. 物理学报,2009,58(6):3 617-3 619.

[20] 贾利群,张耀宇,杨新芳,等. Lagrange 系统 Mei 对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型守恒量[J]. 物理学报,2010,59(5):2 939-2 941.

[21] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京:北京理工大学出版社,2004.

Special Noether – Lie symmetry and special conserved quantity of Lagrange system

JIA Li-qun[1], SUN Xian-ting[2], WANG Xiao-xiao[1], ZHANG Mei-ling[1], XIE Yin-li[1], TIAN Yan-ning[1]

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2. Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China)

Abstract: Given that the special infinitesimal transformation of groups in which the time is invariable, special Noether – Lie symmetry, special Noether conserved quantity, and special Hojman conserved quantity of special Noether – Lie symmetry of Lagrange system have been investigated. Finally, an example is drawn to illustrate the application of the results.

Key words: special infinitesimal transformations; Lagrange system; special Noether – Lie symmetry; special conserved quantity