云南大学学报 (自然科学版), 2011, 33 (3): 249~252 CN 53-1045/N ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

广义向量平衡问题的对偶*

孙祥凯[1], 程 莹[2]
(1. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331; 2. 苏州大学 数学科学学院, 江苏 苏州 215006)

摘要: 首先利用 Fenchel共轭函数的方法引入了广义向量平衡问题的对偶问题, 然后在稳定性条件的假设下, 讨论了广义向量平衡问题的解与其对偶问题的解之间的关系.
关键词: 广义向量平衡问题; 次微分; 对偶向量平衡问题; 共轭函数
中图分类号: O 221.6; O 224 文献标识码: A 文章编号: 0258-7971(2011)03-0249-04

平衡问题作为非线性分析的一个重要内容, 它的研究不仅具有理论意义, 而且更有实际应用价值. 文献 [1]中, Blum 和 Oettli首先引入了标量平衡问题的基本模型, 即: 设 K 是 R 的一个非空子集, $f: K \times K \to R$ 为实值函数, 满足 $f(x, x) \geq 0, \forall x \in X$, 找 $x^* \in K$, 使得 $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in K$. 随后, 平衡问题被诸多学者推广至向量平衡问题并进行了深入的研究[2-5].

随着平衡问题的深入研究, 平衡问题的对偶理论 (DEP) 的研究也得到了快速的发展. 在文献 [6] 中, Belenkii提出了平衡问题及其对偶模型. 通过交换变量的顺序, 同时改变不等式左边的符号得到了经典的对偶模型和基本的对偶理论, 即: 对偶问题的对偶问题是原问题. 在文献 [7] 中, Konno和 Schaible根据不同模型的平衡问题定义了各种各样的对偶问题, 并证明了这些不同对偶模型对应的单调性平衡问题解的存在性. 同时在各种各样的广义单调性和广义凸假设下, 研究了文献 [1] 提出的平衡问题的解与对偶问题的解之间的关系. 在文献 [8] 中, Ansari和 Siddiqi把这种对偶模式推广到广义向量平衡问题的情况, 定义了几种广义向量平衡问题的对偶模型, 并且在广义伪单调性的条件下证明了这几种对偶模型解的存在性, 同样也得到了一些关于广义向量平衡问题的解与对偶问题的解之间的关系以及经典的对偶理论.

受文献 [8-12] 的启发, 在本文中, 我们首先引入了广义向量平衡问题的对偶问题. 然后讨论了广义向量平衡问题的解与其对偶问题的解之间的关系.

1 预备知识

在本文中, 我们设 Y为由尖闭凸锥 K 确定的偏序实拓扑向量空间且 $\mathrm{int}K \neq \varnothing$ 对任意的 $y_1, y_2 \in Y$, 我们利用下面的序关系:

$$y_1 > y_2 \Leftrightarrow y_1 - y_2 \in \mathrm{int}K,\quad y_1 \not> y_2 \Leftrightarrow y_1 - y_2 \notin \mathrm{int}K.$$

我们在 Y中增加 2个虚点 $+\infty$和 $-\infty$ 并定义为扩充空间 $\overline{Y}$. 这 2个点满足下面条件: 对任意的 $y \in Y$,

$$-\infty < y < +\infty,\ (\pm\infty) + y = y + (\pm\infty) = \pm\infty \text{ 和 } (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty.$$

假定 $-(\pm\infty) = \mp\infty$. 由于 $+\infty - \infty$ 这种形式可以避免, 所以本文中不作考虑.

给定集合 $D \subset \overline{Y}$, 我们称所有位于 D 之上的点组成的集合为 $A(D)$, 而所有位于 D 之下的点组成的集合为 $B(D)$, 分别定义如下:

$$A(D) = \{y \in \overline{Y} | \text{存在 } y' \in D, \text{使得 } y > y'\} \text{ 和 } B(D) = \{y \in \overline{Y} | \text{存在 } y' \in D, \text{使得 } y < y'\}.$$

---

* 收稿日期: 2010-12-22
基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目 (CDJXS10100011).
作者简介: 孙祥凯 (1984-), 男, 山东人, 博士, 助教, 主要从事最优化理论及其应用方面的研究.

显然 $A(D)\subset Y\cup\{+\infty\}$, $B(D)\subset Y\cup\{-\infty\}$, $B(D)=-A(-D)$.

定义 1[9] 如果 $\hat{y}\in D$ 且 $\hat{y}\notin A(D)$, 则称点 $\hat{y}\in\overline{Y}$为集合 $D\subset\overline{Y}$的极小值点. 即: $\hat{y}\in D$ 且不存在点 $y'\in D$, 使得 $\hat{y}>y'$. 集合 D 的所有极小值点组成的集合称为 D 的最小值, 记为 $\mathrm{Min}D$. 类似的可以定义集合 D 的最大值 $\mathrm{Max}D$.

定义 2[9] 如果 $\hat{y}\notin A(D)$ 且 $A(\{\hat{y}\})\subset A(D)$, 则称点 $\hat{y}\in\overline{Y}$是集合 $D\subset\overline{Y}$的下确界点. 即: 不存在 $y\in D$, 使得 $\hat{y}>y$, 且若 $y'>\hat{y}$, 则存在某个 $y\in D$, 使得 $y'>y$. 集合 D 的所有下确界点组成的集合称为集合 D 的下确界, 记为 $\mathrm{Inf}D$. 类似的可以定义集合 D 的上确界记为 $\mathrm{Sup}D$.

命题 1[9] 若 F_1 和 F_2 是从空间 X 到 $\overline{Y}$的 2个集值映射, 则有

$$\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[F_1(x)+F_2(x)]=\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}[F_1(x)+\mathrm{Inf}F_2(x)].$$

假定 $+\infty-\infty$这种情况不会发生.

命题 2 [9] 若 F 是从 X 到 $\overline{Y}$的集值映射, 则

$$\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}F(x)=\mathrm{Inf}\bigcup_{x\in X}\mathrm{Inf}F(x).$$

注 1 最大值和上确界也可以得到类似的结论.

令 X 是另一个实拓扑向量空间, $L(X,Y)$ 是所有从 X 到 Y的线性连续算子, 对 $x\in X$ 和 $T\in L(X,Y)$, Tx 是 Y中的一个元素.

定义 3[10] 令 F 是从 X 到 $\overline{Y}$的一个集值映射.

(1) 若集值映射 $F^*: L(X,Y)\to 2^{\overline{Y}}$ 满足

$$F^*(T)=\mathrm{Sup}\bigcup_{x\in X}[Tx-F(x)],\ \text{其中}\ T\in L(X,Y),$$

则称 F^* 为 F 的共轭映射.

(2) 若集值映射 $F^{**}: X\to 2^{\overline{Y}}$ 满足

$$F^{**}(x)=\mathrm{Sup}\bigcup_{T\in L(X,Y)}[Tx-F^*(T)],\ \text{其中}\ x\in X,$$

则称 F^{**} 为 F 的双共轭映射.

定义 4[10] 令 $\hat{x}\in X$, $\hat{y}\in F(\hat{x})$. 算子 $T\in L(X,Y)$ 称为 F 在点 $(\hat{x},\hat{y})$ 的次梯度, 若

$$T\hat{x}-\hat{y}\in\mathrm{Max}\bigcup_{x\in X}[Tx-F(x)].$$

F 在点 $(\hat{x},\hat{y})$ 的所有次梯度组成的集合称为 F 在点 $(\hat{x},\hat{y})$ 的次微分, 记为 $\partial F(\hat{x},\hat{y})$. 若对任意的 $\hat{y}\in F(\hat{x})$ 有 $\partial F(\hat{x},\hat{y})\neq\varnothing$则称 F 在点 $\hat{x}$是次可微的.

2 广义向量平衡问题的对偶问题

在本节中, 考虑下面的广义向量平衡问题 (GVEP):

对于任意的 $y\in C$, 找 $\bar{x}\in C$ 满足 $h(\bar{x})+\varphi(\bar{x},\bar{x})\notin f(\bar{x},y)+h(y)+\varphi(\bar{x},y)+\mathrm{int}K$, 其中 $f,\varphi: X\times X\to Y\cup\{+\infty\}$, $h: X\to Y\cup\{+\infty\}$, 并且 h 是凸的向量值映射且对任意的 $x\in C$满足 $f(x,x)=0$

下面我们总假定非空集 S 是广义向量平衡问题的可行解集, 并且记: $f_x(y)=f(x,y)$, $\varphi_x(y)=\varphi(x,y)$. 对给定的 $x\in C$, 考虑下面的参数向量优化问题:

$$(P_x)\qquad \mathrm{Min}_{y\in C}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y)\}.$$

本文中, 问题 (P_x) 的解集记作 $\mathrm{Min}(P_x)$. 显然若 $\bar{x}\in C$是 (GVEP) 的解当且仅当 $\bar{x}\in C$是 (P_x) 的解. 因此, 我们把广义向量平衡问题 (GVEP) 转化为与之等价的向量优化问题 (P_x). 下面我们通过研究 (P_x) 的对偶问题来研究 (GVEP) 的对偶问题.

首先, 我们定义含参函数 $\Phi_x(y,u): X\times X\to Y\cup\{+\infty\}$ 如下:

$$\Phi_x(y,u)=\begin{cases}f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y+u), & \text{若}\ y\in C,\\ +\infty, & \text{其它}.\end{cases}$$

显然, 对于任意的 $y\in C$, 都有 $\Phi_x(y,0)=f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y)$.

考虑 Φ_x 的共轭映射:

$$\Phi_x^*(T,\Lambda)=\mathrm{Sup}\{Ty+\Lambda u-\Phi_x(y,u)\mid y\in X,\ u\in X\}=$$
$$\mathrm{Sup}\{Ty+\Lambda u-f_x(y)-\varphi_x(y)-h(y+u)\mid y\in C,\ u\in X\},$$

其中 $T\in L(X,Y)$, $\Lambda\in L(X,Y)$.

令 $q=y+u\in X$. 由命题 1和命题 2, 我们有

$$-\Phi_x^*(0,\Lambda)=-\mathrm{Sup}\{\Lambda u-f_x(y)-\varphi_x(y)-h(y+u)\mid y\in C,\ q\in X\}=$$
$$-\mathrm{Sup}\{\Lambda(q-y)-f_x(y)-\varphi_x(y)-h(q)\mid y\in C,\ q\in X\}=$$
$$\mathrm{Inf}\{\Lambda y-\Lambda q+f_x(y)+\varphi_x(y)+h(q)\mid y\in C,\ q\in X\}=$$
$$\mathrm{Inf}\bigcup_{y\in C}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+\Lambda y-\Lambda q+h(q)\mid q\in X\}=$$
$$\mathrm{Inf}\bigcup_{y\in C}\mathrm{Inf}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+\Lambda y-\Lambda q+h(q)\mid q\in X\}=$$
$$\mathrm{Inf}\bigcup_{y\in C}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+\Lambda y+\mathrm{Inf}\{-\Lambda q+h(q)\mid q\in X\}\}=$$
$$\mathrm{Inf}\bigcup_{y\in C}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+\Lambda y-h^*(\Lambda)\}.$$

由上面的推导, 基于 f 的共轭函数是 f^*, 我们给出 $(GVEP)$ 的对偶问题为:

$$(DGVEP)\ \underset{\Lambda\in L(Z,Y)}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Inf}\bigcup_{y\in C}\{f_x(y)+\varphi_x(y)+\Lambda y-h^*(\Lambda)\},$$

同样记 $(DGVEP)$ 的解集为 $\mathrm{Max}(DGVEP)$.

定理 1(弱对偶)　对任意给定的 $x\in S$, $y\in C$ 及 $\Lambda\in L(X,Y)$, 有

$$f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y)\notin B(-\Phi_x^*(0,\Lambda)).$$

证明　因为对任意的 $y\in C$, 有 $\Phi_x(y,0)=f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y)$. 由文献 [10] 的命题 5.1, 有 $f_x(y)+\varphi_x(y)+h(y)\notin B(-\Phi_x^*(0,\Lambda))$. 证毕.

定义 5　若集值映射 $W_x(u)=\mathrm{Inf}\{\Phi_x(y,u)\mid y\in X\}$ 在点 0_x 是次可微的, 则称问题 (P_x) 相对于 Φ_x 是稳定的.

定理 2[10] (强对偶)　若问题 (P_x) 相对于 Φ_x 是稳定的, 则有

$$\mathrm{Min}(P_x)=\mathrm{InF}(P_x)=\mathrm{Sup}(DGVEP)=\mathrm{Max}(DGVEP).$$

若 $\bar{x}\in C$ 满足 $h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\in\mathrm{Min}(P_{\bar{x}})$, 则称 $\bar{x}\in C$ 为 $(GVEP)$ 的解. 若 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 满足 $-\Phi_x^*(0,\bar{\Lambda})\cap\mathrm{Max}(DGVEP)\neq\varnothing$, 则称 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 为 $(DGVEP)$ 的解.

下面定理 3给出了广义向量平衡问题 $(GVEP)$ 的解与其对偶问题 $(DGVEP)$ 的解之间的关系.

定理 3　假定问题 (P_x) 相对于 Φ_x 是稳定的. 如果 $\bar{x}\in C$ 是 $(GVEP)$ 的解, 则一定存在 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 是 $(DGVEP)$ 的解, 且满足 $h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\in-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\bar{\Lambda})$.

证明　因为 $\bar{x}\in C$ 是 $(GVEP)$ 的解, 所以 $\bar{x}\in C$ 也是 $(P_{\bar{x}})$ 的解. 又因为问题 (P_x) 相对于 Φ_x 是稳定的, 所以由定理 2可得

$$h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\in\mathrm{Min}(P_{\bar{x}})\subset\mathrm{max}(DGVEP)=\underset{\Lambda\in L(X,Y)}{\mathrm{Max}}[-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\Lambda)].$$

从而一定存在 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$, 满足 $h(\bar{x})+\varphi_x(\bar{x})\in-\Phi_x^*(0,\bar{\Lambda})$.

下面我们证明 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 是 $(DGVEP)$ 的解. 假设 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 不是 $(DGVEP)$ 的解. 因为 $h(\bar{x})+\varphi_x(\bar{x})\in-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\bar{\Lambda})$, 所以

$$h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\notin\underset{\Lambda\in L(X,Y)}{\mathrm{Max}}[-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\Lambda)].$$

因此一定存在 $\Lambda_1\in L(X,Y)$ 及 $y_1\in-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\Lambda)$, 满足 $h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})<y_1$, 由于 $f_{\bar{x}}(\bar{x})=0$, 所以

$$f_{\bar{x}}(\bar{x})+h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\in B(-\Phi_x^*(0,\Lambda_1)),$$

这与定理 1矛盾. 因此一定存在 $\bar{\Lambda}\in L(X,Y)$ 是 $(DMVEP)$ 的解. 证毕.

下面定理 4说明了条件 $h(\bar{x})+\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\in-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\bar{\Lambda})$ 在本文中具有非常重要的作用.

定理 4　若 $(\bar{x},\bar{\Lambda})\in C\times L(X,Y)$ 满足 $h(\bar{x})+\varphi_x(\bar{x})\in-\Phi_{\bar{x}}^*(0,\bar{\Lambda})$, 则 $\bar{x}\in C$ 是 $(GVEP)$ 的解, $\bar{\Lambda}\in$

$L(X, Y)$ 是 $(DGVEP)$ 的解.

证明　假设 $\bar{x} \in C$ 不是 $(GVEP)$ 的解, 因此 $\bar{x} \in C$ 也不是 $(P_{\bar{x}})$ 的解, 即

$$h(\bar{x}) + \varphi_{\bar{x}}(\bar{x}) \notin \mathrm{Min} \bigcup_{y \in C} \{f_x(y) + \varphi_x(y) + h(y)\}.$$

因此存在 $y_1 \in C$, 使得

$$f_{\bar{x}}(y_1) + \varphi_{\bar{x}}(y_1) + h(y_1) < h(\bar{x}) + \varphi_{\bar{x}}(\bar{x}).$$

又因为 $h(\bar{x}) + \varphi_{\bar{x}}(\bar{x}) \in -\Phi_{\bar{x}}^{*}(0, \bar{\Lambda})$, 所以 $f_{\bar{x}}(y_1) + \varphi_{\bar{x}}(y_1) + h(y_1) \in B(-\Phi_{\bar{x}}^{*}(0, \bar{\Lambda}))$. 这与定理 1矛盾, 因此 $\bar{x} \in C$ 是 $(GVEP)$ 的解.

假设 $\bar{\Lambda} \in L(X, Y)$ 不是 $(DGVEP)$ 的解. 因为 $h(\bar{x}) + \varphi_{\bar{x}}(\bar{x}) \in - 5_x^{*}(0, +)$, 所以 $h(x) + U_x(x)$ I $\underset{+ \in L(X,Y)}{\mathrm{Max}} [-5_x^{*}(0, +)]$. 从而存在 $+_1$ I $L(X, Y)$ 及 y_1 I $-5_x^{*}(0, +_1)$, 满足 $h(x) + U_x(x) < y_1$, 这就证明了

$$h(x) + U_x(x) \ I \ B(-5_x^{*}(0, +_1)),$$

即 $f_x(x) + h(x) + U_x(x)$ I $B(-5_x^{*}(0, +_1))$, 其中 $f_x(x) = 0$ 这再次与定理 1矛盾. 因此 $+$ I $L(X, Y)$ 是 $(DGVEP)$ 的解. 证毕.

注 1　由定理 4可知: 若 $h(x) + U_x(x)$ I $-5_x^{*}(0, +)$, 则 x I C 是 $(GVEP)$ 的解, $+$ I $L(X, Y)$ 是 $(DGVEP)$ 的解. 因此, 为了得到 $(GVEP)$ 和 $(DGVEP)$ 的解, 我们只需找到满足 $h(x) + U_x(x)$ I $-5_x^{*}(0, +)$ 的 $(x, +)$ 即可.

参考文献:

[1] BLUM E, OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems [J]. Mathematics Students, 1994, 63: 123-145.

[2] CHADLI O, RIAHI H. On generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2001, 16: 33-41.

[3] CHADLI O, CHIANG Y, HUANG S. Topological pseudomonotonicity and vector equilibrium problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 270: 435-450.

[4] ANSARI Q H, YAO J C. An existence result for generalized vector equilibrium problems[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12: 53-56.

[5] FU Jun-ying. Generalized vector quasi- equilibrium problems[J]. Mathematical Methods and Operational Research, 2000, 52: 57-64.

[6] BALENKII V Z, VOLKONSKII V A. Iterative methods in game theory and programming[M]. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

[7] KONNOV I V, SACHAIBLE S. Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 104: 395-408.

[8] ANSARI Q H, SIDDIQI A H. Existence and duality of generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256: 115-126.

[9] TANINO T. On supremum of a set in a multi- dimensional space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 130: 386-397.

[10] TANINO T. Conjugate duality in vector optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 167: 84-97.

[11] LI Sheng-jie, ZHAO Pei. A method of duality for a mixed vector equilibrium problem[J]. Optimization Letters, 2010, 4: 85-96.

[12] 邵远夫, 李成林. Hilbert空间中函数和的次微分规则及应用 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(6): 475-479.

(下转第 256页)

$$A\ I\ \ \mathbf{I}Z\ v_1(A) = aZ\ A\ I\ \ \mathbf{I}_{v_1},$$
$$v(A) = aZ\ A\ I\ \ \mathbf{I}_v z\ \ v_{\mathbf{I}_v}(A) = a,$$

即 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{v_1}$, $v = v_{\mathbf{I}_v}$. 证毕.

参考文献:

[1] 张理想,詹小四,张修如.基于信息熵的指纹图像二值化算法[J].计算机系统应用,2010,19(6):1482152.

[2] 郑旭,曹益平.基于二值化调制度层析的快速在线三维测量算法[J].光子学报,2010,39(8):1 44321 449.

[3] 吴佳鹏,杨兆选,韩东,等.基于小波和Gtsu法的二维条码图像二值化[J].计算机工程,2010,36(10):1902192.

[4] 陈开志,胡爱群.基于二值化图像的指纹细节点精确提取方法[J].东南大学学报:自然科学版,2010,40(3):4712475.

[5] CARTEN H. 微分学[M].余家荣,译.北京:高等教育出版社,2009.

[6] 马春晖,李生刚,史艳维.自由理想空间范畴[J].西北大学学报:自然科学版,2010,40(2):1992202.

[7] 马春晖,李生刚,伏文清.真理想族的上、下确界及其性质[J].云南大学学报:自然科学版,2009,31(4):3292333.

[8] 史艳维,陈东立,马春晖.理想收敛理论的非标准刻画[J].西安建筑科技大学学报,2005,37(2): 2942296.

[9] 王国俊.L-fuzzy拓扑空间理论[M].西安:陕西师范大学出版社,1988.

[10] THOMAS J. Set theory[M].北京:世界图书出版公司,2007.

Ultraideals and two-valued finitely additive measures

MA Chun2hui[1,2], SHI Yan2wei[3], LI Sheng2gang[2]

(1. School of Science, Xi′an University of Architecture and Technology, Xi′an 710055, China;

2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi′an 710062, China;

3. Department of Basic Courses, Xi′an Peihua University, Xi′an 710125, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to show a kind of relation between ultraideals and two-valued finitely additive measures. Firstly, the properties of ultraideals are researched, and some equivalent conditions, that a ideal is ultraideals, are obtained. On the one hand, two-valued finitely additive measure is constructed with ul2 traideals; on the other hand, ultraideal is gotten with two-valued finitely additive measure. Furthermore, the con2 sistence between them is proved.

Key words: ideals; ultraideals; two-valued finitely additive measure

* *

(上接第252页)

Duality for generalized vector equilibrium problem

SUN Xiang2kai[1], CHENG Ying[2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;

2. College of Mathematical Sciences, Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Abstract: A dual scheme for a generalized vector equilibrium problem is introduced by using the method of Fenchel conjugate function. Under the stabilization condition, the relationships between the solutions of genera2 ized vector equilibrium problem (GVEP) and dual generalized vector equilibrium problem (DGVEP) are dis2 cussed.

Key words: generalized vector equilibrium problem; subdifferential; dual generalized vector equilibrium problem; conjugate function