云南大学学报（自然科学版），2011，33（2）：125～130　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

块 H－矩阵的判定及其逆的无穷大范数的上界*

赵仁庆，熊昌明，李耀堂
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘要：给出了块 H－矩阵 A 的一个判定条件，并利用其获得了 A 的逆矩阵的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界的一个新的估计式，数值算例表明所得结论是有效的.

关键词：块对角占优矩阵；块 H－矩阵；矩阵无穷大范数
中图分类号：O 151.21　　文献标识码：A　　文章编号：0258－7971（2011）02－0125－06

矩阵分块在计算数学、矩阵理论等领域有着广泛的应用，自从 Feingold 和 Varga [1] 提出块对角占优矩阵以来，许多学者对其进行了研究并对块对角占优性概念进行了推广，如块拟对角占优矩阵、块 α－对角占优矩阵、块 H－矩阵等概念被相继提出和研究，其中块 H－矩阵的性质和判定等问题，由于其很强的应用背景而被许多学者研究[2-10]．本文研究了块 H－矩阵的判定问题，给出了块 H－矩阵的一个新的判定条件，并利用其对 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界进行了估计.

1　预备知识

令 $C^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 阶复矩阵所成之集合，$R^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 阶实矩阵所成之集合.

设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，将 A 分块为

$$A=(A_{ij})_{k\times k},\tag{1}$$

其中 A_{ii} 为 r_i 阶非奇异方阵，$1\leqslant i\leqslant k$，$\sum_{i=1}^{k} r_i=n$. 记 $K=\{1,2,\cdots,k\}$，$R_i(A)=\sum_{j\in K,j\neq i}\|A_{ij}\|$，$i\in K$.

定义 1 [2]　设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$ 有形如（1）的分块形式，若 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant R_i(A)$，则称 A 为块对角占优矩阵，记为 $A\in G_0$；如果上式中的不等号均为严格的，则称 A 为严格块对角占优矩阵，记为 $A\in G$；若存在正对角矩阵 D，使得 $B=AD$ 为严格块对角占优矩阵，则称 A 为块 H－矩阵，记为 $A\in G^*$.

定义 2 [3]　设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$A$ 的比较矩阵定义为 $\mu(A)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|, i=j,\\ -|a_{ij}|, i\neq j.\end{cases}$$

设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，记 $r_i(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，$i=1,\cdots,m$.

求解线性方程组 $Ax=b$ 是矩阵计算领域的主要问题之一. 在应用迭代法求解此问题时，通常要用下面的估计式来给出迭代法的停止条件

$$\frac{\|x-x^*\|}{\|x^*\|}\leqslant \operatorname{cond}(A)\ \frac{\|r\|}{\|b\|},$$

---

* 收稿日期：2010－10－02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10961027）.
作者简介：赵仁庆（1985－），女，云南人，硕士生，主要从事矩阵理论及其应用方面的研究.
通迅作者：李耀堂（1958－），男，陕西人，教授，博士生导师，主要从事数值计算及其应用方面的研究.

其中 x 是方程组的近似解,x^* 是方程组的精确解,$r = b - Ax$,$\mathrm{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$,$\|\cdot\|_\infty$ 表示矩阵无穷大范数. 由此不难看出,对于 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的估计是一个重要的课题.

在本文中,我们约定所涉及的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 均指矩阵的无穷大范数 $\|\cdot\|_\infty$.

文献[3]和[4]研究了块 H - 矩阵 A 的逆的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的估计问题,得到如下结果.

定理 1[3] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$ 具有形如(1)的分块形式,$A \in G^*$(按 $\|\cdot\|_\infty$),则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{(\tilde{B}u)_i : u \in U_B\}}, \forall u \in U_B,$$

其中 $B = (b_{ij})_{k\times k}$,这里 $b_{ii} = \|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}$,$b_{ij} = \|A_{ij}\|_\infty$,$i \neq j$,$U_B = \{u > 0 : \tilde{B}u > 0, \|u\|_\infty = 1\} \subset R_+^k$($k$ 维正向量集).

定理 2[4] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 具有形如(1)的分块形式,$A \in G^*$(按 $\|\cdot\|_\infty$),则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\cdots,i_k} \|(\mu(A)^{(i_1,\cdots,i_k)})^{-1}\|_\infty,$$

其中

$$A^{(i_1,\cdots,i_k)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & \cdots & r_{i_1}(A_{1k}) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{i_k}(A_{k1}) & \cdots & r_{i_k}(A_{kk}) \end{bmatrix}.$$

2 块 H - 矩阵的判定定理

本节讨论块 H - 矩阵的判定问题,为此先给出 1 个引理.

引理 1[5] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 具有形如(1)的分块形式,如果 $A \in G^*$,则至少存在 1 个 i,$1 \leqslant i \leqslant k$,使得 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i(A)$.

记 $K_1 = \{i \in K : 0 < \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} = R_i(A)\}$,$K_2 = \{i \in K : 0 < \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} < R_i(A)\}$,$K_3 = \{i \in K : \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i(A)\}$,则 $K_1 \cap K_2 = \phi$,$K_1 \cap K_3 = \phi$,$K_2 \cap K_3 = \phi$,且 $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$. 由定义和引理 1 容易看出当 $K_1 \cup K_2 = \phi$ 时,$A \in G$,因而 $A \in G^*$;若 $A \in G^*$,则 $K_3 \neq \phi$,因而我们总可以假设 $K_1 \cup K_2$ 和 K_3 均为非空集. 此外当 K_j 为单点集时规定 $\sum\limits_{t\in K_j, t\neq i} \cdot = 0$,$i \in K_j$,$j = 1,2,3$.

定理 3 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 具有形如(1)的分块形式,则如下结论成立.

(i) 若 $K_1 \cup K_2 = \phi$,则 $A \in G$,因而 $A \in G^*$.

(ii) 若 $K_1 \cup K_2 \neq \phi$,且

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{t\in K_1, t\neq i} \|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2} \frac{R_t(A)}{R_t(A) + \|A_{tt}^{-1}\|^{-1}} \|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3} R_t(A)\,\|A_{tt}^{-1}\|\,\|A_{it}\|, \forall i \in K_1, \tag{2}$$

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > \frac{R_t(A) + \|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}{R_t(A)} \cdot \left[\sum_{t\in K_1, \neq i} \|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2} \frac{R_t(A)}{R_t(A) + \|A_{tt}^{-1}\|^{-1}} \|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3} R_t(A)\,\|A_{tt}^{-1}\|\,\|A_{it}\|\right], \forall i \in K_2, \tag{3}$$

则 $A \in G^*$.

证明 (i)是显然的,下面证明(ii). 令

$$Q_i = \frac{1}{\sum\limits_{t\in K_3} \|A_{it}\|} \cdot \left[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in K_1, t\neq i} \|A_{it}\| - \sum_{t\in K_2} \frac{R_t(A)}{R_t(A) + \|A_{tt}^{-1}\|^{-1}} \|A_{it}\| - \sum_{t\in K_3} R_t(A)\,\|A_{tt}^{-1}\|\,\|A_{it}\|\right] > 0, \forall i \in K_1,$$

$$Q_j = \frac{1}{\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{jt}\|}\Big[\frac{R_j(A)}{R_j(A)+\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jj}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in K_1}\|A_{jt}\| - \sum_{t\in K_2,t\neq j}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jt}\| - \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{jt}\|\Big] > 0, \forall j\in K_2.$$

当$\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{it}\|=0$时,记 $Q_i=+\infty$. 由条件(2) 和(3) 式知 $\forall i\in K_1\cup K_2, Q_i>0$,因此存在充分小的 $\varepsilon>0$,满足$0<\varepsilon<\min\limits_{i\in K_1\cup K_2}Q_i\leqslant+\infty$. 构造$D=\mathrm{diag}(d_1I_{r_1},\cdots,d_kI_{r_k})$,其中 $d_i=1, i\in K_1$; $d_i=\frac{R_i(A)}{R_i(A)+\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}}$, $i\in K_2$; $d_i=\varepsilon+R_i(A)\|A_{ii}^{-1}\|, i\in K_3$. 记 $B=AD$,则对任何 $i\in K_1$,当$\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{it}\|=0$,即$\|A_{it}\|=0$时,

$$R_i(B) = \sum_{t\in K_1,t\neq i}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| < \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} = \|B_{ii}^{-1}\|^{-1};$$

当$\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{it}\|\neq 0$时,

$$\begin{aligned}R_i(B) &= \sum_{t\in K_1,t\neq i}d_t\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}d_t\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3}d_t\|A_{it}\| < \\ &\sum_{t\in K_1,t\neq i}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| + Q_i\sum_{t\in K_3}\|A_{it}\| = \\ &\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} = \|B_{ii}^{-1}\|^{-1}.\end{aligned}$$

对任意 $j\in K_2$,当$\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{it}\|=0$,即$\|A_{jt}\|=0$时,

$$R_j(B) = \sum_{t\in K_1}\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_2,t\neq j}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jt}\| < \frac{R_j(A)}{R_j(A)+\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}}\|B_{jj}^{-1}\|^{-1};$$

当$\sum\limits_{t\in K_3}\|A_{jt}\|\neq 0$时,

$$\begin{aligned}R_j(B) &= \sum_{t\in K_1}d_t\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_2,t\neq j}d_t\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_3}d_t\|A_{jt}\| = \\ &\sum_{t\in K_1}\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_2,t\neq j}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{jt}\| + \varepsilon\sum_{t\in K_3}\|A_{jt}\| < \\ &\sum_{t\in K_1}\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_2,t\neq j}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jt}\| + \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{jt}\| + Q_j\sum_{t\in K_3}\|A_{jt}\| = \\ &\frac{R_j(A)}{R_j(A)+\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}}\|A_{jj}^{-1}\|^{-1} = \|B_{jj}^{-1}\|^{-1}.\end{aligned}$$

对任何 $i\in K_3$,令

$$P_i = \frac{1}{\|A_{ii}^{-1}\|-\sum\limits_{t\in K_3,t\neq j}\|A_{it}\|}\Big[\sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3,t\neq i}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| - R_i(A)\Big].$$

因为$0<\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}<1, \forall t\in K_2$; $0<R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|<1, \forall t\in K_3$,所以

$$\sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3,t\neq i}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| - R_i(A) \leqslant 0,$$

故 $P_i\leqslant 0$. 因为 $\varepsilon>0$,所以 $\varepsilon>P_i$. 于是对任意 $i\in K_3$,有

$$\begin{aligned}\|B_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(B) &= d_i\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in K_1}d_t\|A_{it}\| - \sum_{t\in K_2}d_t\|A_{it}\| - \sum_{t\in K_3,t\neq i}d_t\|A_{it}\| > \\ &(\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{t\in K_3,t\neq i}\|A_{it}\|)P_i + R_i(A) - \sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| - \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| -\end{aligned}$$

$$\sum_{t\in K_3,t\neq i} R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| = \frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum\limits_{t\in K_3,t\neq i}\|A_{it}\|}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum\limits_{t\in K_3,t\neq i}\|A_{it}\|}\cdot$$

$$\left[\sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3,t\neq i}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| - R_i(A)\right] +$$

$$R_i(A) - \sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| - \sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| - \sum_{t\in K_3,t\neq i}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\| = 0.$$

综上可知，$\forall i\in K$，$\|B_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i(B)$，即 $B = AD\in G$，因而 $A\in G^*$. 证毕.

3 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界的一个估计式

本节我们讨论 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界的估计问题.

引理 2 [6] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 具有形如(1) 的分块形式，$A\in G$(按 $\|\cdot\|_\infty$)，则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1} - \sum\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|_\infty\right\}}.$$

定理 4 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 具有分块形如(1)，若 $K_1\cup K_2\neq\phi$，且满足

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{t\in K_1,t\neq i}\|A_{it}\|\sum_{t\in K_2}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\|,\ \forall i\in K_1,$$

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > \frac{R_i(A)+\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}}{R_i(A)}\cdot$$

$$\left[\sum_{t\in K_1}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_2,t\neq i}\frac{R_t(A)}{R_t(A)+\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\| + \sum_{t\in K_3}R_t(A)\|A_{tt}^{-1}\|\|A_{it}\|\right],\ \forall i\in K_2,$$

则 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3,i\in K_j}(Q_{ij})}$，其中

$$Q_{i1} = \left\{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1} - \sum_{t\in K_1,t\neq i}\|A_{it}\|_\infty - \sum_{t\in K_2}\|A_{it}\|_\infty\frac{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty}{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty + \|A_{tt}^{-1}\|_\infty^{-1}} -\right.$$

$$\left.\sum_{t\in K_3}\|A_{it}\|_\infty\|A_{tt}^{-1}\|_\infty\sum_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty\right\},\ \forall i\in K_1,$$

$$Q_{i2} = \left\{\frac{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{ir}\|_\infty}{\sum\limits_{r\in K,r\neq i}\|A_{it}\|_\infty + \|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}}\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1} - \sum_{t\in K_1}\|A_{it}\|_\infty -\right.$$

$$\left.\sum_{t\in K_2,t\neq i}\|A_{it}\|_\infty\frac{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty}{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty + \|A_{tt}^{-1}\|_\infty^{-1}} - \sum_{t\in K_3}\|A_{it}\|_\infty\|A_{tt}^{-1}\|_\infty\sum_{r\in K,r\neq t}\|A\|_{tr}\right\},\ \forall i\in K_2,$$

$$Q_{i3} = \left\{\sum_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty - \sum_{t\in K_1}\|A_{it}\|_\infty - \sum_{t\in K_2}\|A_{it}\|_\infty\frac{\sum\limits_{r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty}{\sum\limits_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty + \|A_{tt}^{-1}\|_\infty^{-1}} -\right.$$

$$\left.\sum_{t\in K_3,t\neq i}\|A_{it}\|_\infty\|A_{tt}^{-1}\|_\infty^{-1}\sum_{r\in K,r\neq t}\|A_{tr}\|_\infty\right\},\ \forall i\in K_3.$$

证明 构造正对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1I_{r_1},\cdots,d_nI_{r_n})$，其中 $d_i=1$，$i\in K_1$；$d_i=\dfrac{R_i(A)}{R_i(A)+\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}}$，$i\in K_2$；

$d_i = \varepsilon + R_i(A)\|A_{tt}^{-1}\|, i \in K_3$. 记 $B = AD$，由定理 1 的证明知，B 为严格块对角占优矩阵，即 A 为块 H – 阵. 因为 $A^{-1} = DB^{-1}$，$\|A^{-1}\|_\infty = \|DB^{-1}\|_\infty \leqslant \|D\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$，由 D 的构造知 $\|D\|_\infty = 1$，故 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|D\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = \|B^{-1}\|_\infty$，再由引理 2 得

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\|B_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1} - \sum\limits_{j \neq i}\|B_{ij}\|_\infty\}},$$

即 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3, i \in K_j}}(Q_{ij})$. 证毕.

当分块形式(1) 中的 $r_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$，即 A 为 H – 矩阵时，由定理 4 可得如下推论.

推论 1　设 $A \in C^{n \times n}$ 满足下列条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{t \in K_1, t \neq i}|a_{it}| + \sum_{t \in K_2}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}| + |a_{tt}|} + \sum_{t \in K_3}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{rt}|}{|a_{tt}|}, \forall i \in K_1,$$

$$|a_{ii}| > \frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq i}|a_{ir}| + |a_{ii}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq i}|a_{ir}|}\left[\sum_{t \in K_1}|a_{it}| + \sum_{t \in K_2, t \neq i}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}| + |a_{tt}|} + \sum_{t \in K_3}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|}{|a_{tt}|}\right], \forall i \in K_2,$$

则 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3, i \in K_j}}(Q'_{ij})$，其中

$$Q'_{i1} = \left\{|a_{ii}| - \sum_{t \in K_1, t \neq i}|a_{it}| - \sum_{r \in K_2}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{it}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{it}| + |a_{tt}|} - \sum_{t \in K_3}|a_{it}||a_{tt}|^{-1}\sum_{t \in K, t \neq t}|a_{tr}|\right\}, \forall i \in K_1,$$

$$Q'_{i2} = \left\{\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq i}|a_{ir}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{ir}| + |a_{ii}|}|a_{it}| - \sum_{t \in K_1}|a_{it}| - \right.$$
$$\left.\sum_{r \in K_2, r \neq i}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}| + |a_{tt}|} - \sum_{t \in K_3}|a_{it}||a_{tt}|^{-1}\sum_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|\right\}, \forall i \in K_2,$$

$$Q'_{i3} = \left\{\sum_{r \in K, r \neq i}|a_{ir}| - \sum_{t \in K_1}|a_{it}| - \sum_{t \in K_2}|a_{it}|\frac{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|}{\sum\limits_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}| + |a_{tt}|} - \sum_{t \in K_3, t \neq i}|a_{it}||a_{tt}|^{-1}\sum_{r \in K, r \neq t}|a_{tr}|\right\}, \forall i \in K_3.$$

4　数值例子

下面给出 2 个数值算例来说明本文结果的有效性.

例 1　设

$$A = \begin{bmatrix} 20 & \vdots & 2 & 2 & \vdots & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & \vdots & 20 & 0 & \vdots & 4 & 2 & \vdots & 3 \\ 4 & \vdots & 0 & 20 & \vdots & 1 & 5 & \vdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & \vdots & 1 & 3 & \vdots & 20 & 0 & \vdots & 2 \\ 5 & \vdots & 2 & 2 & \vdots & 0 & 20 & \vdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & \vdots & 3 & 2 & \vdots & 5 & 6 & \vdots & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}.$$

容易验证,A 不是严格块对角占优矩阵,因而不能用引理 2 对 $\|A^{-1}\|_\infty$ 进行估计. 另一方面,计算知 $K_1 = \{4\}$, $K_2 = \phi$, $K_3 = \{1,2,3\}$. 故 $K_1 \cup K_2 \neq \phi$,且当 $i = 4 \in K_1$ 时,有

$$\|A_{44}^{-1}\|_\infty^{-1} = 20 > \|A_{11}^{-1}\|_\infty \sum_{t\in K, t\neq 1} \|A_{1t}\|\|A_{41}\| + \|A_{22}^{-1}\|_\infty \sum_{t\in K, t\neq 2} \|A_{2t}\|\|A_{42}\| + \|A_{33}^{-1}\| \sum_{t\in K, t\neq 3} \|A_{3t}\|\|A_{43}\| = 13.2,$$

因此 A 满足定理 4 的条件,于是由定理 4 得 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant 0.333$(事实上 $\|A^{-1}\|_\infty = 0.0931$).

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$. 容易验证,$A$ 不是严格块对角占优矩阵,不能用引理 2 对 $\|A^{-1}\|_\infty$ 进行估计. 计算得 $K_1 = \{2\}$, $K_2 = \{3\}$, $K_3 = \{1,4\}$,且当 $i = 2 \in K_1$ 时,有

$$|a_{22}| = 10 > |a_{23}| \frac{\sum_{r\in K, r\neq 3} |a_{3r}|}{\sum_{r\in K, r\neq 3} |a_{3r}| + |a_{33}|} + \frac{\sum_{r\in K, r\neq 1} |a_{1r}|}{|a_{11}|} |a_{21}| + \frac{\sum_{r\in K, r\neq 4} |a_{4r}|}{|a_{44}|} |a_{24}| = 4.1364.$$

当 $i = 3 \in K_2$ 时,

$$|a_{33}| = 10 > \frac{\sum_{r\in K, r\neq 3} |a_{3r}| + |a_{33}|}{\sum_{r\in K, r\neq 3} |a_{3r}|} \left[|a_{32}| + \frac{\sum_{r\in K, r\neq 1} |a_{1r}|}{|a_{11}|} |a_{31}| + \frac{\sum_{r\in K, r\neq 4} |a_{4r}|}{|a_{44}|} |a_{34}| \right] = 7.5167.$$

A 满足推论 1 的条件,由推论 1 得 $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant 0.9483$(事实上 $\|A^{-1}\|_\infty = 0.2450$).

参考文献:

[1] FEINGOLD D G, VARGA R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem [J]. Paci J Math, 1962, 4: 1 241-1 250.

[2] 黄廷祝. 块 H-矩阵的简捷判据 [J]. 工程数学学报, 2004, 21(3): 340-344.

[3] 黄廷祝. H-阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界和最小奇异值的下界 [J]. 电子科技大学学报, 1996, 25(4): 441-444.

[4] YU L. Kolotilina*. Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M-and H-matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430: 692-702.

[5] PANG M X, MAO G P. Generalizations of diagonal dominance for matrices and its applications [J]. J of Math Research Exposition, 1991, 11(4): 507-509.

[6] VARAH J M. An upper for $\|A^{-1}\|_\infty$ [J]. Linear Algebra Appl, 1975, 11: 3-5.

[7] 刘建州, 黄泽军. 关于"块 H-矩阵与块矩阵的谱"一文的注记 [J]. 应用数学和力学, 2008, 29(7): 864-870.

[8] HUANG Ting-zhu, RAN Rui-sheng. A simple estimation for the spectral radius of (block) H-matrices [J]. J Comput Appl Math, 2005, 177: 455-459.

[9] 李耀堂, 王转德. 置换相似 α-下(上)半强对角占优矩阵与 H-矩阵的判定 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2001, 23(2): 81-83.

[10] 李艳艳, 李耀堂. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2010, 32(2): 125-129.

(下转第 135 页)

[10] LI Cai-heng. Symmetrical graph theory [M]. Western Australia: The University of Western Australia, 2006.
[11] LIEBECK M, PRAEGER C E, SAXL J. Transitive subgroups of primitive permutation groups [J]. J Algebra, 2000, 234(2): 291-361.
[12] 潘江敏. 有限交换群的自同构群 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2003, 25(2): 88-90.
[13] PAN Jiang-min. Orders of periodic elements of general linear group over any field [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2005, 27(5): 269-271.

Suborbits of a quasiprimitive permutation group of SD type with socle A_5^3

ZHOU An-yong, YU Xiao-fen, JI Hai-xia, WANG Xiao-fu, PAN Jiang-min
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: We firs analyze the actions of quasiprimitive permutation groups of SD type, then for such group G with socle A_5^3, work out its all suborbits and the valencies of G – arc – transitive graphs.

Key words: quasi primitive permutation group; suborbit; length of orbit; orbital graph

* *

(上接第 130 页)

Criteria of block H – matrix and upper bounds of the infinity norms of its inverses

ZHAO Ren-qing, XIONG Chang-ming, LI Yao-tang
(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: Firstly, a new sufficient condition is given for a block H – matrix and we obtain a new estimation formula of the infinity norms of inverses by using the condition. Finally, the efficiency of the results is shown by numerical examples.

Key words: block diagonal dominance; block H – matrix; infinity norms