云南大学学报（自然科学版），2012，34（1）：1~4　　CN 53－1045/N　ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University　　http://www.yndxxb.ynu.edu.cn

W－空间上自映射族的唯一公共不动点*1

朴勇杰，金光植
（延边大学 理学院数学系，吉林 延吉　133002）

摘要：首先引进一个新的空间，然后在该空间上讨论了具有反交换的映射族的唯一公共不动点的存在问题.所得结论推广和改进了一些相应结果.

关键词：W－空间；反交换映射；交换点；条件(Φ)；公共不动点
中图分类号：O 177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0258－7971(2012)01－0001－04

近年来，很多作者在度量空间、对称空间及其它空间上讨论了不动点问题或公共不动点问题并取得了很多成果，可参看文献[1－5].特别是文献[6－8]通过在度量空间或对称空间上引入反交换映射的概念，讨论了公共不动点的唯一存在性问题，而文献[9]给出了对称空间上2个自映射存在唯一公共不动点的充分必要条件.在本文中，首先引进W－空间的定义，该空间改进和简化了度量空间和对称空间的定义，然后在该空间上给出具有反交换性的自映射族存在唯一公共不动点的定理.我们的结果推广和改进了文献中的相应结果.

1　基本概念

定义1　设X是非空集合，如果映射$d:X\times X\to \mathbf{R}_+$满足$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$，则称$(X,d)$为$W$－空间.

如果d又满足$d(x,y)=d(y,x)$，$\forall x,y\in X$，则称(X,d)为对称空间[6-7,9]；进一步，如果d满足三角不等式，则(X,d)是大家所熟悉的度量空间.因此可知W－空间是比度量空间和对称空间更弱的一种空间.

定义2　设f和g是W－空间(X,d)上的2个自映射，称f和g是反交换自映射，如果存在$x\in X$使得$fgx=gfx$，则$fx=gx$.

定义3　称$x\in X$为W－空间(X,d)上的2个自映射f和g的交换点，如果满足$fgx=gfx$.

注1　文献[6－8]在对称空间或度量空间上分别引进了定义2和定义3.

定义4[8]　称函数$\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$满足条件($\Phi$)，若对任意的$t>0$，有$0<\varphi(t)<t$.

2　唯一公共不动点定理

定理1　设(X,d)是W－空间，$f,g:X\to X$是2个反交换自映射且具有交换点.如果当$x,y\in X$且$\max\{d(fy,fx),d(gy,fx),d(gy,fy)\}>0$时

$$d(gx,gy)\leqslant\varphi(\max\{d(fy,fx),d(gy,fx),d(gy,fy)\}),\tag{1}$$

其中φ满足条件(Φ).则f和g存在唯一的公共不动点.

* **收稿日期**：2011－05－18
基金项目：吉林省教育厅科研基金资助项目(吉教科合字[2011]第434).
作者简介：朴勇杰(1962－)，男，朝鲜族，吉林人，博士，教授，主要从事非线性分析和泛函分析方面的研究.

证明 设 u 是 f 和 g 的交换点,即 $fgu = gfu$. 因为 f 和 g 是反交换映射,因此 $fu = gu$,从而 $ffu = fgu = gfu = ggu$.

下面证明 gu 是 g 的不动点. 事实上,若相反,即 $ggu \neq gu$,则 $d(gu,ggu) > 0$ 且 $d(ggu,gu) > 0$. 因为

$$\max\{d(fgu,fu),d(ggu,fu),d(ggu,fgu)\} = d(ggu,gu) > 0,$$

$$\max\{d(fu,fgu),d(gu,fgu),d(gu,fu)\} = d(gu,ggu) > 0,$$

因此根据(1)式得到下面2个互为矛盾的结果:

$$d(gu,ggu) \leqslant \varphi(\max\{d(fgu,fu),d(ggu,fu),d(ggu,fgu)\}) = \varphi(d(ggu,gu)) < d(ggu,gu),$$

$$d(ggu,gu) \leqslant \varphi(\max\{d(fu,fgu),d(gu,fgu),d(gu,fu)\}) = \varphi(d(gu,ggu)) < d(gu,ggu).$$

于是 $gu = ggu$,即 gu 是 g 的不动点.

又因为 $fgu = ggu = gu$,于是 gu 是 f 的不动点,从而 gu 是 f 和 g 的公共不动点.

下证唯一性,若 f 和 g 存在2个不同的公共不动点 $u,v \in X$,则 $d(u,v) > 0$ 且 $d(v,u) > 0$,于是根据(1)式得到下面2个互为矛盾的结果:

$$d(u,v) = d(gu,gv) \leqslant \varphi(\max\{d(fv,fu),d(gv,fu),d(gv,fv)\}) = \varphi(d(v,u)) < d(v,u),$$

$$d(v,u) = d(gv,gu) \leqslant \varphi(\max\{d(fu,fv),d(gu,fv),d(gu,fu)\}) = \varphi(d(u,v)) < d(u,v).$$

因此 $u = v$,这证明了 f 和 g 存在唯一的公共不动点.

证毕.

注2 文献[8]在对称空间中在条件(1)的假设下证明了定理1,而定理1说明不需要 d 的对称性,因此定理1简化和改进了文献[8]中的定理1.

定理2 设 (X,d) 是 W－空间,$f,g:X \to X$ 是具有交换点的2个自映射. 如果当 $x,y \in X$ 且 $\max\{d(fy,fx),d(fy,gx),d(gx,gy)\} > 0$ 时,

$$d(fx,gy) \leqslant \varphi(\max\{d(fy,fx),d(fy,gx),d(gx,gy)\}), \tag{2}$$

其中 φ 满足条件(Φ),则 f 和 g 存在唯一的公共不动点.

证明 设 u 是 f 和 g 的交换点,即 $fgu = gfu$. 如果 $fu \neq gu$,则 $d(fu,gu) \neq 0$. 因为

$$\max\{d(fu,fu),d(fu,gu),d(gu,gu)\} = d(fu,gu) > 0,$$

因此根据条件(2)得

$$d(fu,gu) \leqslant \varphi(\max\{d(fu,fu),d(fu,gu),d(gu,gu)\}) = \varphi(d(fu,gu)) < d(fu,gu),$$

这是一个矛盾,于是 $fu = gu$,从而得到 $fgu = ffu = gfu = ggu$.

如果 $ffu \neq fu$,则 $d(fu,ffu) > 0$ 且 $d(ffu,fu) > 0$. 因为

$$\max\{d(ffu,fu),d(ffu,gu),d(gu,gfu)\} = \max\{d(ffu,fu),d(fu,ffu)\} > 0,$$

$$\max\{d(fu,ffu),d(gu,gfu),d(gfu,gu)\} = \max\{d(fu,ffu),d(ffu,fu)\} > 0,$$

因此根据条件(2)得到下面2个互为矛盾的结果:

$$d(fu,ffu) = d(fu,gfu) \leqslant \varphi(\max\{d(ffu,fu),d(ffu,gu),d(gu,gfu)\}) = \varphi(\max\{d(ffu,fu),d(fu,ffu)\}) = \varphi(d(ffu,fu)) < d(ffu,fu),$$

$$d(ffu,fu) = d(ffu,gu) \leqslant \varphi(\max\{d(fu,ffu),d(fu,gfu),d(gfu,gu)\}) = \varphi(\max\{d(fu,ffu),d(ffu,fu)\}) = \varphi(d(fu,ffu)) < d(fu,ffu).$$

于是 $ffu = fu$,即 fu 是 f 的不动点. 又 $gfu = ffu = fu$,于是 fu 是 g 的不动点,从而 $fu = gu$ 是 f,g 的公共不动点.

下证唯一性,若 f 和 g 存在2个不同的公共不动点 $u,v \in X$,则 $d(u,v) > 0$ 且 $d(v,u) > 0$,于是根据条件(2)得到下面2个互为矛盾的结果:

$$d(u,v) = d(fu,gv) \leqslant \varphi(\max\{d(fv,fu),d(fv,gu),d(gu,gv)\}) =$$

$$\varphi(\max\{d(v,u),d(u,v)\}) = \varphi(d(v,u)) < d(v,u),$$

$$d(v,u) = d(fv,gu) \leqslant \varphi(\max\{d(fu,fv),d(fu,gv),d(gv,gu)\}) = \varphi(\max\{d(u,v),d(v,u)\}) = \varphi(d(u,v)) < d(u,v).$$

因此 $u = v$,这证明了 f 和 g 存在唯一的公共不动点.

证毕.

注 3　定理 2 中的条件(2) 不同于定理 1 中的条件(1),而我们在定理 2 中去掉了 f 和 g 的反交换性条件限制.

定理 3　设 (X,d) 是 W - 空间, $f_1, f_2, g_1, g_2: X \to X$ 是 4 个自映射, (f_1, f_2) 和 (g_1, g_2) 分别是反交换映射对且均有交换点. 对任何 $x, y \in X$ 且 $\max\{d(g_1y,f_1x),d(g_2y,f_1x),d(g_1y,g_2y),d(f_1x,f_2x),d(g_1y,f_2x)\} > 0$ 时,

$$d(f_2x,g_2y) \leqslant \varphi(\max\{d(g_1y,f_1x),d(g_2y,f_1x),d(g_1y,g_2y),d(f_1x,f_2x),d(g_1y,f_2x)\}), \tag{3}$$

而 $x, y \in X$ 且 $\max\{d(f_2y,g_2x),d(f_2y,g_1x),d(g_1x,g_2x),d(f_1y,f_2y),d(f_1y,g_2x)\} > 0$ 时

$$d(g_1x,f_1y) \leqslant \varphi(\max\{d(f_2y,g_2x),d(f_2y,g_1x),d(g_1x,g_2x),d(f_1y,f_2y),d(f_1y,g_2x)\}). \tag{4}$$

其中 φ 满足条件(Φ). 则 f_1, f_2, g_1, g_2 存在唯一的公共不动点.

证明　设 u 和 v 分别是 (f_1, f_2) 和 (g_1, g_2) 的交换点,即 $f_1f_2u = f_2f_1u$, $g_1g_2v = g_2g_1v$. 由于 (f_1, f_2) 和 (g_1, g_2) 分别是反交换映射对,所以有 $f_1u = f_2u$, $g_1v = g_2v$, 从而有 $f_1f_2u = f_2f_1u = f_1f_1u = f_2f_2u$, $g_1g_2v = g_2g_1v = g_1g_1v = g_2g_2v$.

首先证明 $f_2u = g_2v$. 事实上,如果 $f_2u \neq g_2v$,则 $d(f_2u,g_2v) > 0$ 且 $d(g_2v,f_2u) > 0$. 因为

$$\max\{d(g_1v,f_1u),d(g_2v,f_1u),d(g_1v,g_2v),d(f_1u,f_2u),d(g_1v,f_2u)\} = d(g_2v,f_2u) > 0,$$

$$\max\{d(f_2u,g_2v),d(f_2u,g_1v),d(g_1v,g_2v),d(f_1u,f_2u),d(f_1u,g_2v)\} = d(f_2u,g_2v) > 0,$$

因此根据条件(3) 和(4) 得到 2 个相矛盾的结果:

$$d(f_2u,g_2v) \leqslant \varphi(\max\{d(g_1v,f_1u),d(g_2v,f_1u),d(g_1v,g_2v),d(f_1u,f_2u),d(g_1v,f_2u)\}) = \varphi(d(g_2v,f_2u)) < d(g_2v,f_2u),$$

$$d(g_2v,f_2u) = d(g_1v,f_1u) \leqslant \varphi(\max\{d(f_2u,g_2v),d(f_2u,g_1v),d(g_1v,g_2v),d(f_1u,f_2u),d(f_1u,g_2v)\}) = \varphi(d(f_2u,g_2v)) < d(f_2u,g_2v).$$

于是 $f_2u = g_2v$.

其次证明 $f_2f_2u = f_2u$,即 f_2u 是 f_2 的不动点,否则,成立下列结果 $d(f_2f_2u,f_2u) > 0$ 和 $d(f_2u,f_2f_2u) > 0$. 因为

$$\max\{d(g_1v,f_1f_2u),d(g_2v,f_1f_2u),d(g_1v,g_2v),d(f_1f_2u,f_2f_2u),d(g_1v,f_2f_2u)\} = d(g_2v,f_1f_2u) = d(g_2v,f_2f_2u) = d(f_2u,f_2f_2u) > 0,$$

$$\max\{d(f_2f_2u,g_2v),d(f_2f_2u,g_1v),d(g_1v,g_2v),d(f_1f_2u,f_2f_2u),d(f_1f_2u,g_2v)\} = d(f_2f_2u,g_2v) = d(f_2f_2u,f_2u) > 0,$$

于是根据条件(3) 和(4) 得到 2 个相矛盾的结果:

$$d(f_2f_2u,f_2u) = d(f_2f_2u,g_2v) \leqslant \varphi(\max\{d(g_1v,f_1f_2u),d(g_2v,f_1f_2u),d(g_1v,g_2v),d(f_1f_2u,f_2f_2u),d(g_1v,f_2f_2u)\}) = \varphi(d(g_2v,f_1f_2u)) = \varphi(d(f_2u,f_2f_2u)) < d(f_2u,f_2f_2u);$$

$$d(f_2u,f_2f_2u) = d(g_1v,f_1f_2u) \leqslant \varphi(\max\{d(f_2f_2u,g_2v),d(f_2f_2u,g_1v),d(g_1v,g_2v),d(f_1f_2u,f_2f_2u),d(f_1f_2u,g_2v)\}) = \varphi(d(f_2f_2u,g_2v)) = \varphi(d(f_2f_2u,f_2u)) < d(f_2f_2u,f_2u).$$

因此 $f_2f_2u = f_2u$,即 f_2u 是 f_2 的不动点.

同理可证 $g_2g_2v = g_2v$,即 g_2v 是 g_2 的不动点. 因为 $g_1g_2v = g_2g_2v = g_2v$,这说明 g_2v 是 g_1 的不动点,同理可证 f_2u 是 f_1 的不动点, 从而 $f_2u = g_2v$ 是 f_1, f_2, g_1, g_2 的公共不动点.

如果 u 和 v 是 f_1,f_2,g_1,g_2 的2个不同的公共不动点,则 $d(u,v)>0$ 同时 $d(v,u)>0$,因此利用条件(3)可得到2个互为矛盾的结果 $d(u,v)<d(v,u)$ 和 $d(v,u)<d(u,v)$. 于是得知 f_1,f_2,g_1,g_2 的公共不动点是唯一的. 证毕.

注4 如果 (X,d) 是对称空间,则定理3变成文献[8]中的结果,且只需要条件(3)或(4). 另外,从定理1 ~ 定理3的证明看出,条件(1) ~ (4)中的部分项可用其它条件代替,比如条件(1)中的项 $d(gx,gy)$ 可用 $d(fx,fy)$ 代替等. 在此不一一列举出来了.

参考文献:

[1] HICKS T L, RHOADES B E. Fixed point theory in symmetric spaces with applications to probabilistic spaces[J]. Nonlinear Analysis, 1993, 36: 331-334.

[2] PANT R P. Common fixed point theorems for contractive maps[J]. J Math Anal Appl, 1998, 226: 251-258.

[3] ASMRI M, MOUTAWAKIL D E. Common fixed points under contractive conditions in symmetric spaces[J]. Applied Mathematics E－notes, 2003, 3: 156-162.

[4] ASMRI M, MOUTAWAKIL D E. Some new common fixed points under strict contractive conditions[J]. J Math Anal Appl, 2002, 270: 181-188.

[5] 朴勇杰. 超凸空间上集值映射的 Fan 型最佳近似不动点定理[J]. 云南大学学报:自然科学版, 2009, 31(2): 120-123.

[6] 吕中学. 度量空间中反交换映射的公共不动点[J]. 应用泛函分析学报, 2002, 4(3): 226-228.

[7] 陆珏, 冀小明, 周武. Common fixed points for selfmaps without contractive conditions in symmetric spaces[J]. 西南民族大学学报:自然科学版, 2005, 31(1): 13-16.

[8] 胡新启, 刘启宽. 度量空间中反交换映射的公共不动点[J]. 数学杂志, 2007, 27(1): 19-22.

[9] 夏大峰, 符美芬, 江波. 具有对称的集合和完备度量空间上两个自映射的公共不动点[J]. 数学进展, 2007, 36(4): 415-420.

Unique common fixed points for self－maps on W－spaces

PIAO Yong-jie, JIN Guang-zhi

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: A new space was introduced, and then the existence problem of unique common fixed point for converse commuting maps on this space were discussed. The obtained results generalize and improve some corresponding conclusions.

Key words: W－space; converse commuting maps; commuting point; condition(Φ); common fixed point