文章编号: 1007-2985(2006)02-0016-03

可变脉冲时刻脉冲微分方程解的一致有界性

王兰芳, 曾繁富
(吉首大学数学与计算机科学学院, 湖南 吉首　416000)

摘　要: 运用比较原理研究了具有可变脉冲时刻的脉冲微分方程解的整体性质, 给出了解一致有界的充分条件. 在一定条件下, 推广了具有固定脉冲时刻的脉冲微分方程的相关结果.

关键词: 脉冲微分方程; 比较原理; 一致有界
中图分类号: O175.12　　　　文献标识码: A

1　问题的提出

Lakshmikantham V 等[1] 讨论了具有固定脉冲时刻的脉冲微分方程的解, 相对于集合的全局性态和一致有界. 此后, 不少研究者[2-4] 建立了关于具有可变脉冲时刻的脉冲微分方程的比较原理, 并用于稳定性的研究. 运用比较原理[2], 可将文献[1] 中的相关结果推广到下列具有可变脉冲时刻的脉冲方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) & t \quad {}_k(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t^+) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}(t)) & t = \quad {}_k(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0^+) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

满足假设(P): $\boldsymbol{f} \quad C[\mathbf{R}^+ \quad \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $\boldsymbol{I}_k \quad C^1[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}) < 0$, ${}_k \quad C^1[\mathbf{R}^n, (0, \quad)]$, 对于 $k = 1, 2 \quad$, ${}_k(\boldsymbol{x}) \quad {}_{k+1}(\boldsymbol{x})$, ${}_k(\boldsymbol{x})$ 有界.

与(1) 式对应的无脉冲的常微分方程初值问题为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. 因文中的主要思想是比较原理, 故引入方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}) & t \quad {}_k(\boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{u}(t^+) = \boldsymbol{u}(t) + \quad {}_k(\boldsymbol{u}(t)) & t = \quad {}_k(\boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{u}(t_0^+) = \boldsymbol{u}_0, \end{cases} \tag{2}$$

满足假设(A): $\boldsymbol{g} \quad C[\mathbf{R}^+ \quad \mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N]$, ${}_k \quad C[\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N]$, ${}_k(\boldsymbol{u}) < 0$, ${}_k \quad C^1[\mathbf{R}, (0, \quad)]$, 对于 $k = 1, 2 \quad$, ${}_k(\boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 递增, ${}_k(\boldsymbol{u}) \quad v_{k+1}(\boldsymbol{u})$, ${}_k(\boldsymbol{u})$ 有界.

与(2) 式对应的无脉冲的常微分方程初值问题为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3}$$

2　基本引理

首先, 引入辅助函数 $\boldsymbol{V}: \mathbf{R}^n \quad \mathbf{R}^N$, 满足下述条件: ($P_1$) 对任意 $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n$, 有 ${}_k(\boldsymbol{x}) = \quad {}_k[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]$; ($P_2$) 对

收稿日期: 2005-11-17
基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(03C328)
作者简介: 王兰芳(1964-), 女, 湖南省醴陵市人, 吉首大学数学与计算机科学学院教师, 主要从事应用数学研究.

任意 $\boldsymbol{u}$ 　$\mathbf{R}^N$, 若 $_k(\boldsymbol{u}) = t$, 则存在 $\boldsymbol{x}$ 　$\mathbf{R}^n$, 满足 $_k(\boldsymbol{x}) = t$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}$; ($\mathrm{P}_3$) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}))$ 　$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) +$ $_k(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}))$; ($\mathrm{P}_4$) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 　$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}))$. 这里, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h} \sup_{0+} \frac{1}{h}[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]$. 记 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (V_1(\boldsymbol{x}), V_2(\boldsymbol{x}), \quad, V_N(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + {}_k(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \quad, u_N(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_0 = (u_{10}, u_{20}, \quad, u_{N0})^{\mathrm{T}}$.

引理 1[2]　(比较定理) 假设 $\boldsymbol{V}$ 满足条件(P_1)　(P_4), 进一步假设下列条件满足: (C_1) $_{k+1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})) > {}_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}$ 　$\mathbf{R}^n$; (C_2) $\frac{_k(\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}) < 1$; ($\mathrm{C}_3$) $\frac{\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}) > \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{u}))$; ($\mathrm{C}_4$) 对于 t 　$\mathbf{R}^+$, $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 单调非减; (C_5) (3) 式有最大解 $\boldsymbol{r}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$ 定义于$[t_0, \quad)$. 那么, 对于(1) 式的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$, 下列结论成立: (D_1) (2) 式有最大解 $\boldsymbol{r}(t)$ 定义于$[t_0, \quad)$, 且 $\boldsymbol{r}(t)$ 与曲面 $_k: t = {}_k(\boldsymbol{u})$ 相交仅 1 次; (D_2) $\boldsymbol{x}(t)$ 与曲面 $S_k: t = {}_k(\boldsymbol{x})$ 相交仅 1 次; (D_3) $\boldsymbol{m}(t) = \boldsymbol{V}[\boldsymbol{x}(t)]$ 是(2) 式的下解, 且 $\boldsymbol{m}(t)$ 与曲面 $_k$ 相交仅 1 次; (D_4) $\boldsymbol{m}(t)$ 　$\boldsymbol{r}(t)$, t 　$[t_0, \quad)$.

3　定理及证明

对于集合 H, 用 　H, H^0, H 分别表示 H 的边界、内点集和闭包.

定理 1　假设下列条件满足: (　) E 　$\mathbf{R}^n$ 是开集, H 　$\mathbf{R}^n$, H 　E, 对任意 $\boldsymbol{x}$ 　H, 都有 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})$ 　E, G 　$E \setminus H^0$, 且 $G \setminus$ 　H 是开集; (　) 存在集合 A 　$\mathbf{R}^n$, B 　$\mathbf{R}^N$, A 　H 　, 且对任意 $\boldsymbol{x}$ 　H, 都有 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 　B; (　) 存在 a 　$\mathbf{R}$, 对任意 $\boldsymbol{x}$ 　G, 都有 $\sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{x})$ 　a; (　) $\boldsymbol{x}_0$ 　A 　H 且 $\sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{x}_0) < a$; (　) 只要 $\boldsymbol{u}_0$ 　B, $\sum_{i=1}^{N} u_{i0} < a$, (2) 式的解 $\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$ 就满足 $\sum_{i=1}^{N} u_i(t, t_0, \boldsymbol{u}_0) < a$, t 　t_0; (　) 引理 1 中的所有条件都满足. 那么, 不存在 $t^* > t_0$, 使下述结论成立: (　) $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　H, t 　$[t_0, t^*)$ 且 $\boldsymbol{x}(t^*, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　G; (　) $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　H, t 　$[t_0, t^*)$ 且 $\boldsymbol{x}(t^{*+}, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　G.

证明　若(　) 成立, 则存在 $t^* > t_0$, 满足 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　H, t 　$[t_0, t^*)$, $\boldsymbol{x}(t^*, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　G. 那么, 根据条件(　), 可得

$$\sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{x}(t^*, t_0, \boldsymbol{x}_0)) \quad a. \tag{4}$$

取 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_0)$, 由条件(　), 根据引理 1, 得

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, (t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) \quad \boldsymbol{r}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0) \qquad t \quad [t_0, t^*], \tag{5}$$

这里, $\boldsymbol{r}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$ 是(2) 式的最大解. 现在, 取 $\boldsymbol{x}_0$ 　A 　H 且满足不等式

$$\sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{x}_0) < a. \tag{6}$$

由 $\boldsymbol{x}_0$ 　A 及条件(　), 可得 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_0)$ 　B. 于是, 由(6) 式推出

$$\sum_{i=1}^{N} u_{i0} < a. \tag{7}$$

利用(7) 式及条件(　), 有 $\sum_{i=1}^{N} r_i(t, t_0, \boldsymbol{u}_0) < a$, 这里 $\boldsymbol{r}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0) = (r_1(t, t_0, \boldsymbol{u}_0), r_2(t, t_0, \boldsymbol{u}_0), \quad, r_N(t, t_0, \boldsymbol{u}_0))^{\mathrm{T}}$. 于是, 结合(5) 式, 得

$$\sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{x}(t^*, t_0, \boldsymbol{x}_0)) \quad r_i(t^*, t_0, \boldsymbol{u}_0) < a. \tag{8}$$

显然, (4) 式与(8) 式矛盾.

若(　) 成立, 则存在 $t^* > t_0$, 满足 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　H, t 　$[t_0, t^*)$, $\boldsymbol{x}(t^{*+}, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　G. 这里只要考虑 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　H^0, $\boldsymbol{x}(t^{*+}, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 　$G \setminus$ 　H. 显然, 存在 k 　1 使得 $t^* = t_k = {}_k(\boldsymbol{x}(t_k))$, 因为 $G \setminus$ 　H 是

开集,故存在 $t > t^{*}$ 满足 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ G. 于是,可用证明( ) 的方法进行证明,并导出矛盾.

下面,利用定理1研究方程(1) 的解的一致有界性. 引入集合 $S(\ ) = \{\boldsymbol{x}\ \ \mathbf{R}^n:\ \ \boldsymbol{x}\ \ <\ \ \}$, $Z = \{\boldsymbol{x}\ \ \mathbf{R}^n:\ \ \boldsymbol{x}\ \ >\ \ \}$. 以下仅考虑 $N = 1$ 的情形,即方程(2) 为数量方程. 由(2) 式再引入初值问题:

$$\begin{cases} u = \boldsymbol{g}(t, u) & t \quad {}_k(u), \\ u(t^{+}) = u(t) + \ {}_k(u(t)) & t = \ {}_k(u), \\ u(t^{+}) = u_0 & t \quad \mathbf{R}^{+}. \end{cases} \tag{9}$$

定理2 方程(1) 的解在$[t_0,\ \ )$ 上一致有界,若下列条件满足:( ) 引理1 中的所有条件都满足;( ) b $C[[\ ,\ \ ), \mathbf{R}]$, $b(r)$ 单调非减,使得 $b(\ \ \boldsymbol{x}\ \ )$ $V(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}$ Z;( ) 存在常数 >0, 使得 $\boldsymbol{I}_i(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}$ Z;( ) 对 $r >$, 存在 $(r) >\ \ + r$, 使得 $V(\boldsymbol{x}) < b(\ (r))$, $\boldsymbol{x}$ r;( ) 只要 $u_0 < b(\ (r))$, (9) 式的解 $u(t, t, u_0)$ 就满足 $u(t, t, u_0) < b(\ (r))$, $r >$.

证明 取 $>$, t_0 $\mathbf{R}^{+}$, 根据( ) 可知,只要 $\boldsymbol{x}$,就有 $V(\boldsymbol{x}_0) < b(\ (\ ))$. 再分别取定理2中的 $E = Z$, $H = S(\ ) \setminus S(\ )$, $G = Z$, $a = b(\ (\ ))$. 可断言:只要 $\boldsymbol{x}_0$,就有 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ $S(\ (\ ))$, t $[t_0,\ \ )$.

假设 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 穿过或跃过 $S(\ )$ 的边界进入 G, 那么有以下2种情况:( ) 存在 $t > t_0$, 使得 $\boldsymbol{x}_1 =$, 这里 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$;( ) 存在 $t > t_0$, k 1, $t = t_k = \ {}_k(\boldsymbol{x}(t_k))$, 使得 $\boldsymbol{x}_1 <$, $\boldsymbol{x}_1^{+} >$. 这里 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{x}_1^{+} = \boldsymbol{x}(t^{+}, t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

对于情形( ), $\boldsymbol{x}_1 =$, 根据( ), 有 $V(\boldsymbol{x}_1) < b(\ (\ ))$. 于是,可验证定理2中的所有假设. 对于情形( ), 根据( ), 有 $\boldsymbol{x}_1^{+} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_1) < \ + \ < \ (\ )$, 所以 $\boldsymbol{x}_1^{+}$ H. 再由( ) 及( ), 可得 $V(\boldsymbol{x}_1^{+}) = V(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_1))$ $V(\boldsymbol{x}_1) + \ (V(\boldsymbol{x}_1)) < V(\boldsymbol{x}_1) < b(\ (\ ))$. 于是,可验证定理2中的所有假设.

所以, $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 不可能穿过或跃过 $S(\ )$ 的边界进入 G, 即断言正确. 从而,脉冲微分方程(1) 的解在$[t_0,\ \ )$ 上一致有界.

参考文献:

[1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D, SIMEANOV P. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] KAUL S. Vector Lyapunov Functions in Impulsive Variable-Time Differential Systems [J]. Nonlinear Anal., 1997, 30(5): 2 695-2 698.

[3] KAUL S, LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S. Extremal Solutions, Comparison Principle and Stability Criteria for Impulsive Differential Equations with Variable Times [J]. Nonlinear Anal., 1994, 22(10): 1 263- 1 270.

[4] FU X L, QI J G, LIU Y S. General Comparison Principle for Impulsive Variable Time Differential Equations with Application [J]. Nonlinear Anal., 2000, 42(8): 1 421- 1 429.

Uniform Boundedness of Solutions of Impulsive Differential Equations with Variable Times

WANG Lan-fang, ZENG Fan-fu

(College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000, Hunan China)

Abstract: The authors investigate global properties and uniform boundedness of impulsive differential equations with variable times using comparison principle. Some sufficient conditions are established, which extend some known results about impulsive differential equations with fixed times.

Key words: impulsive differential equations; comparison principle; uniform boundedness

(责任编辑 向阳洁)