文章编号: 1007- 2985(2004)03- 0068- 04

非紧超凸空间的 Browder 不动点定理及其应用

文开庭

(毕节师范高等专科学校数学系, 贵州 毕节　551700)

摘　要: 在非紧超凸度量空间中的非紧允许集上, 改进并推广了 Browder 不动点定理, 讨论了 Ky Fan 极大极小不等式. 在应用中, 给出了 2 个新的非合作 n- 人对策的 Nash 平衡存在定理.

关键词: 超凸度量空间; Browder 不动点定理; 允许集; 非紧性测度; Ky Fan 极大极小不等式; Nash 平衡

中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

1956 年, Aronszajn 等[1]引入了超凸度量空间的概念; 1996 年, Khamsi[2]在超凸度量空间中引进了 KKM 映象; 1999 年, Yuan[3]研究了超凸空间中的广义度量 KKM 映射和 Browder- Fan 型不动点定理, Park[4]也对超凸空间的不动点性质进行了研究; 2000 年, Kirk 等[5]建立了超凸空间中的 KKM 理论, 研究了 Browder- Fan 不动点定理, Ky Fan 极大极小不等式及 Nash 平衡等.

笔者在非紧超凸空间的非紧允许集上, 建立新的 Browder 不动点定理和 Ky Fan 极大极小不等式, 并进一步研究 Nash 平衡存在定理的应用, 从而改进并推广了有关文献的结论.

1　预备知识

设 X 为拓扑空间, A X, 记 2^A 为 A 的子集族, $\mathscr{F}(A)$ 为 A 的非空有限子集族. 度量空间 (M, d) 称为超凸(度量)空间, 若对 $\{x_i\}_{i\ I}$ M 及 $\{r_i\}_{i\ I}$ $\mathbf{R}^+$, 满足 i, j I, 有 $d(x_i, x_j)$ $r_i + r_j$, 则 $_{i\ I}B(x_i, x_j)$, 闭球 $B(x, r) = \{y$ $M: d(x, y)$ $r\}$. 若 A 为度量空间 (M, d) 的非空有界子集, 则 A 的闭球包 $co(A) = \{$ $B: B$ 为 M 中的闭球且 A $B\}$. M 的允许集族 $\mathscr{A}(M) = \{A$ $M: A = co(A)\}$, A $\mathscr{A}(M)$ 称为 M 的允许集. 设 为 M 的非紧性测度, 则对 M 的任一非空有界集 A, $(A) = \inf\{$ > 0: 存在 n 使得 A $_{i=1}^{n} A_i$, 且 $d(A_i) <$, $i = 1, 2,$ $, n\}$. 其中 $d(A_i) = \sup_{x, y\ A_i} d(x, y)$, $i = 1, 2,$ $, n$.

设 X , (M, d) 为度量空间, 集值映射 $G: X$ $2^M \setminus \{\ \}$ 称为广义度量 KKM(简记为 GMKKM) 映射, 若 $\{x_1,$ $, x_n\}$ $\mathscr{F}(X)$, 存在 $\{y_1,$ $, y_n\}$ $\mathscr{F}(M)$, 使得 $\{y_{i_1},$ $, y_{i_k}\}$ $\{y_1,$ $, y_n\}$, 有 $co\{y_{i_1},$ $, y_{i_k}\}$ $_{j=1}^{k} G(x_{i_j})$. 特别地, 设 X M, $G: X$ $2^M \setminus \{\ \}$ 称为度量 KKM(简记为 MKKM) 映射, 若对 $\{x_1,$ $, x_n\}$ $\mathscr{F}(X)$, 有 $co\{x_1,$ $, x_n\}$ $_{i=1}^{n} G(x_i)$. 设 M 为超凸空间, X $\mathscr{A}(M)$, 函数 $f: X$ $R = (-$ $, +$ $]$ 称为超拟凸(超拟凹)的, 若对 $\mathbf{R}$, $\{x$ $X: f(x)$ $\}$ (相应地, $\{x$ $X: f(x)$ $\}$) $\mathscr{A}(M)$, 且可将 与 等价地分别换为 $<$ 与 $>$; 设 $\mathbf{R}$; $: M$ X $\mathbf{R}$ 称为关于 M 超 $-$ 广义拟凸(凹)的, 若 $\{x_1,$ $, x_n\}$ $\mathscr{F}(X)$, 存在 $\{y_1,$ $, y_n\}$ $\mathscr{F}(M)$, 使得 $\{y_{i_1},$ $, y_{i_k}\}$ $\{y_1,$ $, y_n\}$ 及 x_0 $co\{x_{i_1},$ $, x_{i_k}\}$, 有 $\max_{1\ j\ k}$ (x_0, y_{i_j}) (相应地, $\min_{1\ j\ k}$ (x_0, y_{i_j})).

收稿日期: 2004- 03- 08
作者简介: 文开庭(1962-), 男, 贵州省大方人, 毕节师范高等专科学校数学系副教授, 主要从事非线性分析研究.

设 $I=\{1,\cdots,n\}$ 为局中人集. 一个非合作 $n-$ 人对策为一个 $2n-$ 元序组 $\Gamma=(X_1,\cdots,X_n;f_1,\cdots,f_n)$. 对每个局中人 $i\in I$, $X_i\neq\emptyset$ 为其策略空间, $f_i:X=\prod_{i=1}^{n}X_i\to R$ 为其支付函数(或损失函数), X 称为结果空间. 对 $\forall i\in I$, 记 $X^i=\prod_{j\neq i}X_j$, $\pi_i:X\to X_i$ 及 $\pi^i:X\to X^i$ 为自然投射, 记 $x_i=\pi_i(x)$, $x^i=\pi^i(x)$, $\forall x\in X$. 对 $\forall x,y\in X$, 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 记 $(y_i,x^i)=(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\in\mathbf{R}^+$, 称 $\hat{x}$ 为非合作 $n-$ 人对策 Γ 的一个 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}-$ Nash 平衡点, 若对 $\forall i\in I$, 有 $f_i(\hat{x})\geq\sup_{x_i\in X_i}f_i(x_i,\hat{x}^i)-\varepsilon_i$. 特别地, 对策 Γ 的 $(0,\cdots,0)-$ Nash 平衡点简称为 Γ 的 Nash 平衡点, 此时, 对 $\forall i\in I$, 有 $f_i(\hat{x}=\sup_{x_i\in X_i}f(x_i,\hat{x}^i)$.

引理 1[5]　设 $X\neq\emptyset$, Y 为拓扑空间, $G:X\to 2^Y$, $F:Y\to 2^X$ 定义为

$$F(y)=X\setminus G^{-1}(y)\qquad\forall y\in Y,$$

则 G 为转移闭值集值映射当且仅当 F 有转移开下截口.

引理 2[5]　设 M 为超凸空间, $\emptyset\neq X\subset M$, $G:X\to 2^M\setminus\{\emptyset\}$ 为转移闭值集值映射, 且 $\inf_{x\in X}m(\ dG(x))=0$, 则 $\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\emptyset$ 当且仅当 clG 为 GMKKM 映射.

引理 3[5]　设 $X\neq\emptyset$, M 为超凸空间, $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}$, $\varphi:M\times X\to R$, 则下列条件等价:

(1) 映射 $G:X\to 2^M\setminus\{\emptyset\}$ 定义为: $G(x)=\{y\in M:\varphi(y,x)\leq\lambda\}$(相应地, $G(x)=\{y\in M:\varphi(y,x)\geq\lambda\}$), $\forall x\in X$, 为 GMKKM 映射.

(2) 函数 φ 为关于 M 超 $\lambda-$ 广义拟凹(相应地, 凸) 的.

引理 4[5]　设 $X\neq\emptyset$, M 为超凸空间, $G:X\to 2^M\setminus\{\emptyset\}$ 为有限度量闭值集值映射, 则族 $\{G(x)\}_{x\in X}$ 有有限交性质当且仅当 G 为 GMKKM 映射.

引理 5　(Ⅰ) 设 (M,d) 为度量空间, $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{A}(M)$, 则 $\bigcap_{i\in I}A_i=\emptyset$ 或 $\in\mathscr{A}(M)$. (Ⅱ) 若 $\{(M_i,d_i)\}$ 为超凸空间的有限族, 其中 $i=1,\cdots,n$. $M=\prod_{i=1}^{n}M_i$, 对 $\forall x,y\in M$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 令 $d(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}$, 则 (M,d) 为超凸空间.

证明　据允许集定义, (Ⅰ) 显然. 下证(Ⅱ). 首先, (M,d) 为度量空间. 若 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset M$, $x_\alpha=(x_{\alpha 1},\cdots,x_{\alpha n})$, $\{r_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\mathbf{R}^+$, 满足 $\forall\alpha,\beta\in I$, 有 $d(x_\alpha,x_\beta)\leq r_\alpha+r_\beta$, 则由 M_i 的超凸性及关系式: $d(x_{\alpha i},x_{\beta i})\leq d(x_\alpha,x_\beta)\leq r_\alpha+r_\beta$, 知 $\bigcap_{\alpha\in I}B_i(x_{\alpha i},r_\alpha)\neq\emptyset$, $i=1,\cdots,n$, 则

$$\bigcap_{\alpha\in I}B_i(x_\alpha,r_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}\Big(\prod_{i=1}^{n}B_i(x_{\alpha i},r_\alpha)\Big)=\prod_{i=1}^{n}\bigcap_{\alpha\in I}B_i(x_{\alpha i},r_\alpha)\neq\emptyset.$$

(M,d) 为超凸空间.

引理 6[2,3]　若 M 为超凸空间, 则 M 为完备度量空间.

引理 7[5]　设 (M,d) 为完备度量空间, $\{F_i\}_{i\in I}$ 为 M 中有有限交性质的非空闭子集族, 若 $\inf_{i\in I}\alpha(F_i)=0$, 则 $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$ 且为紧集.

2　主要结果

在 Kirk 等[5] 的定理 1、Yuan[3] 的定理 6 及 Park[4] 的定理 3 的基础上, 有如下的非紧超凸度量空间中集值映射的 Browder 不动点定理.

定理 1　设 M 为超凸空间, $\emptyset\neq X\in\mathscr{A}(M)$, $F:X\to 2^X\setminus\{\emptyset\}$ 满足: (1) $\inf_{x\in X}\alpha(cl(X\setminus F^{-1}(x)))=0$; (2) F 有转移开下截口; (3) $\forall x\in X$, $F(x)\in\mathscr{A}(X)$; 存在 $x_0\in X$, 使得 $x_0\in F(x_0)$.

证明　定义集值映射 $G:X\to 2^X$ 为:

$$G(x)=X\setminus F^{-1}(x)\qquad\forall x\in X,$$

由(2) 及引理 1 知, G 为转移闭值集值映射.

( ) 若存在 x_0 X, 使得 $G(x_0) =$, 则 $F^{-1}(x_0) = X$. 当 x X, 均有 x_0 $F(x)$, 而且, x_0 $F(x_0)$.

( ) 若 x X, $G(x)$, 因 $X = {}_{y}\ {}_{X}F^{-1}(y)$, 故 ${}_{x}\ {}_{X}G(x) =$. 由(1) 及引理 2 知, G 不为 GMKKM 映射, G 不为 MKKM 映射. 所以存在$\{x_1, \ , x_n\}$ $\mathscr{F}(X)$ 及 x_0 $co\{x_1, \ , x_n\}$, 使得 x_0 / ${}^{n}_{i=1}G(x_i)$, 即: i $\{1, \ , n\}$, x_0 / $G(x_i)$. 由 G 的定义, x_0 $F^{-1}(x_i)$. 即 x_i $F(x_0)$, $i = 1, \ , n$. 由(3) 知 x_0 $co\{x_1, \ , x_n\}$ $F(x_0)$.

注 定理 1 从紧性方面推广了 Kirk 等[5] 的定理 1, 从紧性和下截口开性两方面推广了 Yuan[3] 的定理 6 及 Park[4] 的定理 2.

据定理 1, 有如下的非紧超凸度量空间中的 Ky Fan 极大极小不等式.

定理 2 设 M 为超凸空间, X $\mathscr{A}(M)$, $\mathbf{R}$, $:X$ X $\mathbf{R}$. 满足: (1) $\inf\limits_{x\ X}(cl\{y$ $X:$ $(y, x))$ $\}) = 0$; (2) x X, y (x, y) 关于 y 为超 $-$ 广义拟凹的; (3) y X, x (x, y) 关于 x 为下半连续的. 则存在 x_0 X, 使得$\sup\limits_{y\ X}$ (x_0, y) .

证明 定义集值映射 $G: X$ 2^X 为

$$G(x) = \{y \quad X: \quad (x, y) \quad \} \qquad x \quad X.$$

由(2), (3) 知, G 为 X 上非空闭值集值映射, 且由(2) 及引理 3 知, G 为 GMKKM 映射. 由引理 4 知, $\{G(x)\}_{x\ X}$ 有有限交性质, 再由(1) 及引理 6 和引理 7 知, ${}_{x\ X}G(x)$. 任取 x_0 ${}_{x\ X}G(x)$, 则对 y X, (x_0, y) , 从而$\sup\limits_{x\ X}$ (x_0, y) .

注 定理 2 将 Chang[6] 定理 4 改进移植到了非紧超凸度量空间并从 X 的紧性及 y (x, y) 的凹性两方面推广了 Kirk 等[5] 的定理 8.

据定理 2, 有如下的非紧超凸度量空间中非合作 $n-$ 人对策的 Nash 平衡点存在定理.

定理 3 设 $= (X_1, \ , X_n; f_1, \ , f_n)$ 为一个非合作 $n-$ 人对策, 且满足: (1) i $I = \{1, \ , n\}$, X_i 为超凸空间 M_i 的非空子集, 且 $X = {}^{n}_{i=1}X_i$ $\mathscr{A}({}^{n}_{i=1}M_i)$; (2) ${}_{i}$ I, $f_i: X$ $\mathbf{R}$ 使得 ${}^{n}_{i=1}f_i$ 在 X 上为上半连续的; (3) ${}_{i}$ I, x_i X_i, y^i $f_i(x_i, y^i)$ 在 X^i 上为下半连续的; (4) ${}_{i}$ I, y X, x_i ${}^{n}_{i=1}(f_i(x_i, y^i) - f_i(y))$ 在 X_i 上为超 0$-$ 广义拟凹的; (5) $\inf\limits_{x\ X}$ $(cl\{y$ $X:$ ${}^{n}_{i=1}(f_i(x_i, y^i) - f_i(y))$ $0\}) = 0$. 则 有 Nash 平衡点.

证明 定义实值函数 $:X$ X $\mathbf{R}$ 为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(f_i(y_i, x^i) - f_i(x)) \qquad (x, y) \quad X \quad X.$$

由(2), (3) 知, 对 y X, x (x, y) 关于 x 在 X 上是下半连续的. 由(4) 知, 对 x X, y (x, y) 为关于 y 超 0$-$ 广义拟凹的. 据(5) 知:

$$\inf_{x\,I\,X}(cl\{y \ I \ X: \mathrm{U}(y, x)) \ [\ 0\}) = 0.$$

由(1) 及引理 5( ) 知, 根据定理 2, 存在 $\hat{x}$ I X, 使得$\sup\limits_{y\,I\,X} U(\hat{x}, y)$ [0. 对 P i I I, P x_i ${}_{I}$ X_i, 令 $y = (x_i, \hat{x}^i)$ I X, 则

$$\mathrm{U}(\hat{x}, y) = f_i(x_i, \hat{x}^i) - f_i(\hat{x}) \ [\ 0.$$

$f_i(\hat{x} = \sup\limits_{x\,I\,X}f_i(x_i, \hat{x}^i)$, P i I I, 即 $\hat{x}$ 为 # 的 Nash 平衡点.

注 定理 3 从紧性、凹性等方面改进了 Tan[7] 定理 2. 从 X_i 的紧性和 f_i 的连续性及 x_i ${}_{y}$ $f_i(x_i, y^i)$ 的凹性等几方面推广了 Kirk 等[5] 的定理 5.3, Nikaido 等[8] 的定理 3.1 和 Aubin[9] P286 的定理 1.

据定理 1, 有如下的非紧超凸度量空间中非合作 $n-$ 人对策的$\{$E$_1$, , , E$\}-$ Nash 平衡点存在定理.

定理4　设 $\Gamma=(X_1,\cdots,X_n;f_1,\cdots,f_n)$ 为一个非合作 $n-$ 人对策, $f_i:X=\prod_{j=1}^{n}X_j\to R$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathbf{R}$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathbf{R}^{+}$, $G:X\to 2^X$ 定义为

$$G(x)=\bigcap_{i=1}^{n}\{y\in X:f_i(x_i,y^i)>\sup_{u_i\in X_i}f_i(u_i,y^i)-\varepsilon_i\}\qquad\forall x\in X.$$

且对 $\forall i\in I$, 满足: (1) X_i 为超凸空间 M_i 的非空子集且 $X\in\mathscr{A}(\prod_{i=1}^{n}M_i)$; (2) $\forall x_i\in X_i, y^i\to f_i(x_i,y^i)$ 在 X^i 上为下半连续的; (3) $\forall y_i\in X^i, x^i\to f_i(x_i,y^i)$ 在 X_i 上为超拟凹的; (4) $\inf_{x\in X}\alpha(cl(X)\setminus G(x))=0$. 则 Γ 在 X 中有 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)-$ Nash 平衡点.

证明　定义集值映射 $T:X\to 2^X$ 为

$$T(x)=\bigcap_{i=1}^{n}\{y\in X:f_i(y_i,x^i)>\sup_{u_i\in X_i}f_i(u_i,x^i)-\varepsilon_i\}\qquad\forall x\in X.$$

对 $\forall x\in X, T(x)\neq\varnothing$, 且由(3)及引理5(　)知, $T(x)\in\mathscr{A}(X)$. 由(2)及 $T^{-1}(y)=G(y)$, T 有开下截口, T 有转移开下截口. 再据(1), (4)知, T 满足定理1的全部条件, 故存在 $\hat{x}\in X$, 使得 $\hat{x}\in T(\hat{x})$, 即: 对 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, f_i(\hat{x})>\sup_{u_i\in X_i}f_i(u_i,\hat{x}^i)-\varepsilon_i$, 进而有: $f_i(\hat{x})\geq\sup_{u_i\in X_i}f_i(u_i,\hat{x}^i)-\varepsilon_i$. 所以 $\hat{x}$ 为 Γ 的 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)-$ Nash 平衡点.

注　定理4将Tan[7] 的定理2.1改进移植到非紧超凸度量空间, 并从紧性、连续性、凹性和有界性等方面改进了Tijs[10] 的定理4.7.

参考文献:

[1] ARONSZAJN N, PANITCHPAKDI P. Extension of Uniformly Continuous Transformations and Hyperconvex Metric Spaces[J]. Pacific J. Math., 1956, (6): 405-439.

[2] KHAMSI M A. KKM and Ky Fan Theorems in Hyperconvex Metric Spaces[J]. Math. Anal. Appl., 1996, (204): 298-306.

[3] YUAN X Z. The Characterization of Generalized Metric KKM Mappings with Open Values in Hyperconvex Metric Spaces and Some Applications[J]. Math. Anal. Appl., 1999, 235: 315-325.

[4] PARK S. Fixed Point Theorems in Hyperconvex Metric Spaces[J]. Nonlinear Anal., 1999, 37: 467-472.

[5] KIRK W A, SIMS B, YUAN X Z. The Knaster-Kuratowski and Mazurkiewicz Theory in Hyperconvex Metric Spaces and Some of Its Applications[J]. Nonlinear Anal., 2000, 39: 611-627.

[6] CHANG S S, ZHANG Y. Generalized KKM Theorem and Variational Inequalities[J]. Math. Anal. Appl., 1991, 159(1): 208-223.

[7] TAN K K, YU J, YUAN X Z. Existence Theorems of Nash Equilibria for Noncoopertive N-Person Games[J]. Inter. J. Game Theory, 1995, 24: 217-222.

[8] NIKAIDO H, ISODA K. Note on Noncooperative Games[M]. Pacific. Math, 1955, 5: 807-815.

[9] AUBIN J P. Mathematical Methods of Game Theory and Economic Theory[M]. North-Holland Amsterdam, 1982.

[10] TIJS S H. Nash Equilibria for Noncooperative N-Person Game in Normal Form[J]. SIAM Review, 1981, 23: 225-237.

Browder Fixed Point Theorem in Noncompact Spaces and Their Applications

WEN Kai-ting

(Department of Mathematics, Bijie Teachers' college, Bijie 551700, Guizhou)

Abstract: In the noncompact admissible subsets of noncompact hyperconvex metric spaces, Browder fixed point theorem is improved and generalized and Ky Fan minimax inequality is studied. As to application, two new existence theorems of Nash equilibrium of the non-cooperative n-person game are given.

Key words: hyperconvex metric space; Browder fixed point theorem; admissible set; noncompact measure; Ky Fan minimax inequality; Nash equilibrium