

文章编号: 1007- 2985(2007) 02- 0048- 03

电导率有限媒质分界面电磁场的边界条件^{*}

张洪欣

(北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876)

摘 要: 在分析及修正电流密度定义的基础上, 讨论了电导率有限的导电媒质分界面上自由电流的存在情况, 并给出了电导率为有限值的导电媒质分界面两侧电磁场的边界条件, 从而澄清了教学科研与实际工程应用中的模糊认识。

关键词: 电导率; 电流密度; 边界条件

中图分类号: O441.6

文献标识码: A

根据边界条件来确定电磁场的解析或者数值解, 是电磁场工程计算中经常遇到的问题。对电磁场边界条件的理解和利用直接关系到电磁场问题求解的正确性。一般电磁场教科书在推导电磁场边界条件的基础上, 给出了理想导体分界面和理想介质分界面两侧的电磁场边界条件, 但是没有推导和分析关于电导率为有限值的导电媒质分界面两侧电磁场的边界条件^[1-3]。笔者在分析电流密度定义的基础上, 对电流密度做了修正, 证明了电导率有限的导电媒质分界面上没有自由电流的存在, 并给出了电导率有限的导电媒质分界面两侧电磁场的边界条件。为在教学和实际工程应用中澄清某些模糊的认识提供了参考依据。

1 电磁场的边界条件

在媒质分界面两侧, 电磁场的边界条件如下^[1-3]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s; \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s. \quad (1)$$

其中: \mathbf{n} 为单位法向矢量, 由媒质 2 指向媒质 1; $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$ 分别为媒质 1 和媒质 2 中的电场强度、电位移矢量、磁场强度、磁感应强度。

由(1)式易知, 在分界面两侧, 电场强度 \mathbf{E} 的切向分量和磁感应强度 \mathbf{B} 的法向分量是无条件连续的, 而电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量和磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量是有条件连续的, 即在 2 种媒质的分界面上没有自由电荷存在时电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量连续, 分界面上没有自由面电流存在时磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量连续。

在理想导体的表面和理想介质的分界面, (1) 式的求解很方便。由于理想导体内部电磁场为 0, 因此在理想导体的表面, (1) 式简化为^[1-3]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}; \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s. \quad (2)$$

对于理想介质的分界面, 由于理想介质的电导率为 0, 因此在理想介质的分界面上没有自由电流存在, 从而(1)式简化为^[1-3]:

* 收稿日期: 2007- 03- 03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60671055)

作者简介: 张洪欣(1969-), 男, 山东阳信人, 北京邮电大学副教授, 硕导, 主要从事信号处理、无线通信、环境电磁学等研究。

$$n \times (E_1 - E_2) = 0, n \times (H_1 - H_2) = 0; n \cdot (B_1 - B_2) = 0, n \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s. \quad (3)$$

但是, 对于电导率有限的导电媒质分界面两侧情况是怎样的, 一般电磁场的教材中没有分析.

如图 1 所示, 设 2 种媒质 ($\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1, \epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$) 的分界面两侧存在切向电场分别为 E_1, E_2 , 显然, 根据切向电场的连续性, 在分界面两侧 $E_1 = E_2$. 由于

$$J_1 = \sigma_1 E_1, J_2 = \sigma_2 E_2, \quad (4)$$

因此 $J_1 \neq J_2$, 好像存在电流突变. 由此可见, 在分界面上存在面电流. 从而

$$H_{1t} - H_{2t} = J', \quad (5)$$

即切向磁场不连续. 根据实际工程问题, 体电流内部一般没有电流的突变, 在有限电导率媒质的分界面上不会存在面电流, 因此应该 $H_{1t} - H_{2t} = 0$. 由此产生的谬误如何解决? 下面从对电流密度的定义进行修正的方面做进一步的探讨.

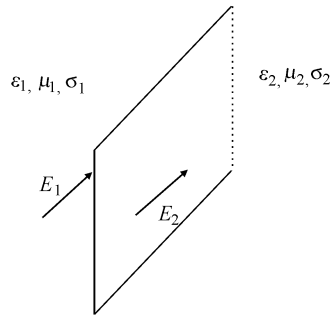


图 1 电导率有限的导电媒质分界面

2. 面电流密度的修正

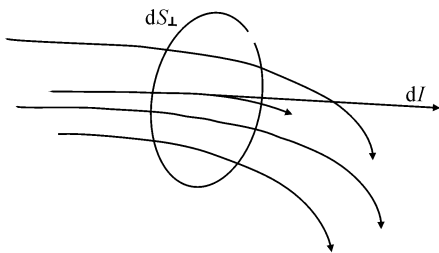


图 2 体电流密度示意图

通常电流密度分成体电流密度矢量 J (单位: A/m^2)、面电流密度 J_s (单位: A/m)、线电流密度等情况. 体电流器示意图如图 2 所示, 体电流密度矢量 J 为垂直穿过单位面积的电流. 大小为 $J = \frac{dI}{dS_{\perp}}$ A/m^2 , 方向为电流的方向. 因此, 通过任意曲面的电流 $I = \int_s J \cdot dS$.

线电流密度即是线电流本身. 面电流密度矢量 J_s (单位: A/m) 为垂直穿过单位线段的电流, 其大小为 $J_s = \frac{dI}{dl_{\perp}}$ A/m , 方向为电流的方向, 而电流密度示意图如图 3 所示. 通过任意曲线 l 的电流的电流为 $I = \int_s J_s \cdot dl$. 这种对面电流密度的定义是基于对无限薄的分界面而言, 面电流一般指存在于分界面的突变 (不连续) 电流, 上述定义应当修正为

$$J_s = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} J \Delta h, \quad (6)$$

如图 4 所示. 其中: J 为体电流密度矢量; Δh 为分界面厚度, 且 $J = \sigma E$. 对于理想导体的表面, $J = \sigma E \rightarrow \infty$, 可能存在面电流, 这与实际情况相符. 而对于导率为有限值的分界面上, J 为有限值, 因此 $J_s = 0$, 面电流为 0. 由此可见, 在电导率为有限值的分界面上没有自由电流存在, (6) 式关于面电流密度的定义适用于各种情况.

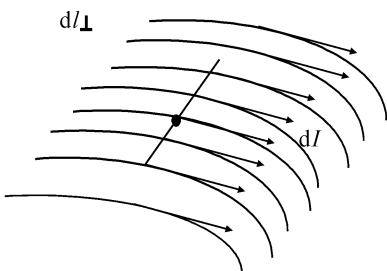


图 3 面电流密度示意图

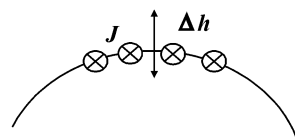


图 4 面电流密度的定义

3 电导率有限媒质分界面两侧电磁场的边界条件

在对面电流密度定义修正的基础上, 根据上面的分析, 电导率为有限值的分界面上没有自由电流存在, 因此(1)式简化为:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{0}; \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0. \quad (7)$$

(7)式即电导率为有限值的导电媒质分界面两侧电磁场的边界条件. 如果分界面两边都是电导率为有限值的导电媒质, 考虑到在导电媒质内部没有自由电荷的存在(自由电荷只能存在于导体与理想介质的分界面上), 那么, (7)式简化为:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{0}; \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0. \quad (8)$$

由此在推导电导率为有限值的导电媒质分界面上的反射和透射时, 可以直接利用(7)式, 即

$$\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{0}, \mathbf{E}_{1t} - \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{0}.$$

从而反射系数 Γ 和透射系数 τ 的表达式为

$$\Gamma = \frac{\eta_{2c} - \eta_{1c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}, \tau = \frac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}, \quad (9)$$

其中 η_{2c} , η_{1c} 分别为媒质 2 和媒质 1 的特征阻抗. 一般教材将导电媒质分界面上的反射和透射情况做为电导率为理想介质分界面上的反射和透射情况的推广, 或者是直接认为电导率为有限值的分界面上没有自由电流, 未免显得有些唐突.

4 结语

为了分析电导率为有限值的导电媒质分界面上是否会存在自由电流, 笔者修正了关于面电流密度定义, 由此证明了电导率有限的导电媒质分界面上不可能存在面电流, 并给出了电导率有限的导电媒质分界面两侧电磁场的边界条件.

参考文献:

- [1] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 焦其祥. 电磁场与电磁波 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] GRUR B S, HIZROGLU H R. Electromagnetic Field Theory Fundamentals [M]. Boston: PWS Publishing Company, 2005.

Electromagnetic Boundary Conditions of Medium Interface with Limited Conductivity

ZHANG Hongxin

(E&E, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Based on the analysis and modification of the definition of electronic current density, the question about the free current on the medium interface with limited conductivity is discussed. Further, the EM boundary conditions of medium interface with limited conductivity are given. It is available to clarify some mistiness for teaching in electromagnetics and the application in fact project.

Key words: conductivity; electronic current density; boundary condition

(责任编辑 陈炳权)