第 28 卷 第 6 期
2007 年 11 月
吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)
Vol. 28 No. 6
Nov. 2007

文章编号: 1007-2985(2007)06-0022-08

Casimir 函数在广义哈密顿控制系统中的应用*

杨鑫松, 芮伟国
(红河学院数学系, 云南 蒙自 661100)

摘 要: 首先研究伪 Poisson 流形的 Casimir 函数与结构矩阵的关系, 给出了伪 Poisson 流形存在 Casimir 函数的 1 个充要条件; 然后利用所得结果研究扩张的广义哈密顿系统的构造问题, 给出了扩张的广义哈密顿系统存在 Casimir 函数且保持能量守恒的 2 个充分条件.

关键词: 伪 Poisson 流形; Casimir 函数; 受控广义哈密顿系统; 能量守恒
中图分类号: O175.14; O193 文献标识码: A

Casimir 函数是研究 Poisson 流形的一个很重要的概念. 利用 Casimir 函数可以降低系统的维数, 便于进一步研究哈密顿系统的稳定性等动力行为. 自 2000 年文献[1]提出伪 Poisson 流形, Casimir 函数也被推广到伪 Poisson 流形上. 但 Casimir 函数在 Poisson 流形上和伪 Poisson 流形上的性质不尽相同. 因此, 笔者着重研究伪 Poisson 流形上的 Casimir 函数与结构矩阵的关系及其应用.

1 基础知识

回忆 Poisson 结构的 Casimir 函数等有关概念.

定义 1 设 M 是一个 m 维光滑流形, $C^{\infty}(M)$ 是定义在 M 上的光滑函数空间. 若存在括号映射 $\{\cdot,\cdot\}_J: C^{\infty}(M)\times C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$, 满足下列条件:

(i) 双线性: $\{\alpha F+\beta G, H\}_J=\alpha\{F,H\}_J+\beta\{G,H\}_J$, $\{H,\alpha F+\beta G\}_J=\alpha\{H,F\}_J+\beta\{H,G\}_J$;

(ii) 反对称性: $\{F,H\}_J=-\{H,F\}_J$;

(iii) Leibniz 法则: $\{FG,H\}_J=G\{F,H\}_J+F\{G,H\}_J$;

(iv) Jacobi 恒等式: $\{F,\{G,H\}_J\}_J+\{G,\{H,F\}_J\}_J+\{H,\{F,G\}_J\}_J=0$.

则称括号 $\{\cdot,\cdot\}_J$ 为一个 Poisson 括号. 而对子 $(M,\{\cdot,\cdot\}_J)$ 称为 Poisson 流形.

由文献[2]可知, 对 M 上定义的 m 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{J}(x)=(J_{ij}(x))$, 若

$$\sum_{l=1}^{m}\left[J_{il}(x)\frac{\partial J_{jk}(x)}{\partial x_l}+J_{jl}(x)\frac{\partial J_{ki}(x)}{\partial x_l}+J_{kl}(x)\frac{\partial J_{ij}(x)}{\partial x_l}\right]=0,\tag{1}$$

则由 $\{F,G\}_J=(\nabla F)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(x)\nabla G$ (其中 ∇F, ∇G 分别表示 F, G 的梯度) 定义的括号映射是 M 上的 Poisson 括号. 此时称 $\boldsymbol{J}(x)$ 为 Poisson 流形 M 的结构矩阵. 而且由 Leibniz 法则可知, 对给定的光滑函数 $H\in$

* 收稿日期: 2007-07-02
基金项目: 云南省教育厅科学研究重点项目(5Z0071A)
作者简介: 杨鑫松(1968-), 男, 湖南新晃人, 云南红河学院数学系讲师, 硕士, 主要从事广义哈密顿系统及非线性控制理论与应用研究.

$C^{\infty}(M)$, $X_H = J(x) \nabla H = \{\cdot, H\}_J$ 定义了流形M 上的一个向量场, 称向量场 X_H 为流形M 上的一个哈密顿向量场, H 称为哈密顿函数.

定义 2　设$\{,.,\}_J$ 是以反对称矩阵$J(x)$ 为结构矩阵的Poisson 括号, 函数 $C(x) \in C^{\infty}(M)$ 不恒等于常数, 且满足关系式:

$$\{C, F\}_J(x) \equiv 0 \qquad \forall F \in C^{\infty}(M),$$

则函数 $C(x)$ 称为Poisson 括号$\{,.,\}_J$ 的一个 Casimir 函数.

根据文献[3] 可得 Poisson 流形 M 上 Casimir 函数的性质.

命题 1　若 $C(x) \in C^{\infty}(M)$ 是Poisson 流形 M 上 Casimir 函数, 则 $C(x)$ 沿着所有 Poisson 流形 M 上的哈密顿向量场的流是一个常数, 即 $X_C \equiv \mathbf{0}$.

伪Poisson流形是Poisson 流形的推广. 为了研究伪Poisson流形的Casimir函数的性质, 首先回顾有关伪Poisson 括号的基本知识.

定义 3　设N 是一个n 维光滑流形, $C^{\infty}(N)$ 是定义在N 上的光滑函数空间. 若存在括号映射$\{\cdot, \cdot\}_T$: $C^{\infty}(N) \times C^{\infty}(N) \to C^{\infty}(N)$, 满足下列条件:

(i) 双线性: $\{\alpha F + \beta G, H\}_T = \alpha\{F, H\}_T + \beta\{G, H\}_T$, $\{H, \alpha F + \beta G\}_T = \alpha\{H, F\}_T + \beta\{H, G\}_T$;

(ii) Leibniz 法则: $\{FG, H\}_T = G\{F, H\}_T + F\{G, H\}_T$.

则称括号$\{\cdot, \cdot\}_T$ 为一个伪Poisson 括号. 而对子$(N, \{\cdot, \cdot\}_T)$ 称为伪 Poisson 流形.

一个伪Poisson 括号, 若$\{F, G\}_T = \{G, F\}_T$ 则称为是对称的, 若$\{F, G\}_T = -\{G, F\}_T$ 则称为是反对称的, $\forall F, G \in C^{\infty}(N)$.

由以上定义可知伪 Poisson 括号不要求满足通常 Poisson 括号具有的 Jacobi 恒等式性质. 易证, 对 N 上定义的任意 n 阶方阵$T(x)$, 由

$$\{F, G\}_T = (\nabla F)^{\mathrm{T}} T(x) \nabla G \tag{2}$$

定义的括号映射都是N 上的伪Poisson 括号. 此时称 $T(x)$ 为伪Poisson 流形N 的结构矩阵.

根据物理意义有 $T(x) = J(x) - R(x) + S(x)$, 其中 $J^{\mathrm{T}}(x) = -J(x)$, $R^{\mathrm{T}}(x) = R(x) \geqslant \mathbf{0}$, $S^{\mathrm{T}}(x) = S(x) \geqslant \mathbf{0}$. 当 $R(x) \equiv \mathbf{0}$, $S(x) \equiv \mathbf{0}$, 且 $J(x)$ 满足(1) 式时, 伪 Poisson 括号$\{,.,\}_T$ 就是 Poisson 括号$\{,.,\}_J$. 而且由Leibniz 法则可知, 对给定的光滑函数$H \in C^{\infty}(M)$, $Y_H \overset{\Delta}{=} T(x) \nabla H = \{,.H\}_T$ 定义了流形N 上的一个向量场, 称向量场 Y_H 为流形N 上的一个广义哈密顿向量场, H 称为哈密顿函数.

现在引入 Lyapunov 函数的定义:

定义 4[4]　考虑系统 $\dot{x} = f(x)$, 它有一个平衡点$\bar{x}$, 若数值函数 $V(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足:

(i) $V(x)$ 在$\bar{x}$ 处有局部极小值;

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) \leqslant 0$.

则称 $V(x)$ 是系统 $\dot{x} = f(x)$ 关于平衡点 $\bar{x}$ 的一个Lyapunov 函数.

2　伪 Poisson 结构的 Casimir 函数

假设H_1　$J(x)$ 满足等式(1).

类似 Poisson 结构的Casimir 函数的定义, 有:

定义 5　设$\{,.,\}_T$ 是以矩阵$T(x)$ 为结构矩阵的伪 Poisson 括号. 若函数 $C(x) \in C^{\infty}(N)$ 不恒等于常数, 且满足关系式:

$$\{C, F\}_T(x) \equiv 0 \qquad \forall F \in C^{\infty}(N),$$

则函数 $C(x)$ 称为伪 Poisson 括号的一个Casimir 函数.

根据定义 5, 可得伪 Poisson 流形的 Casimir 函数与结构矩阵 $T(x)$ 的关系.

命题 2　设与伪Poisson 括号对应的结构矩阵为 $T(x)$, N 是安装了这个伪 Poisson 括号的伪 Poisson 流形. 若存在不恒为常数的函数 $C(x) \in C^{\infty}(N)$, 则 $C(x)$ 是这个伪 Poisson 流形的一个 Casimir 函数的充要

条件是:

$$\mathrm{d}C(x)\boldsymbol{T}(x)\equiv\boldsymbol{0},\tag{3}$$

其中 $\mathrm{d}C(x)$ 表示$\dfrac{\partial^T C(x)}{\partial x}$.

证明　由定义4和(2)式可得, $\{C,F\}_T(x)\equiv 0\Leftrightarrow \mathrm{d}C(x)\boldsymbol{T}(x)\nabla F(x)\equiv 0$, 由 $F(x)$ 的任意性得 $\mathrm{d}C(x)\boldsymbol{T}(x)\equiv\boldsymbol{0}$. 显然, 以上步骤可逆, 所以命题真.

命题2说明, 可以从伪Poisson流形的结构矩阵来求它的Casimir函数. 因为它只与结构矩阵有关, 而结构矩阵由伪Poisson括号唯一确定. 也就是说, $C(x)$ 反映了伪Poisson结构的性质而与具体的哈密顿函数无关.

下面讨论伪Poisson流形的Casimir函数与Poisson流形的Casimir函数的关系.

由(3)式可得,

$$\mathrm{d}C(x)\boldsymbol{T}(x)\equiv\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(x)-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(x)+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(x))\nabla C(x)\equiv\boldsymbol{0}\Leftrightarrow-(\boldsymbol{J}(x)+\boldsymbol{R}(x)-\boldsymbol{S}(x))\nabla C(x)\equiv\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{J}(x)+\boldsymbol{R}(x)-\boldsymbol{S}(x))\nabla C(x)\equiv\boldsymbol{0}.\tag{4}$$

当 $\boldsymbol{R}(x)\equiv\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{S}(x)\equiv\boldsymbol{0}$ 时, (4)式可化简为 $\boldsymbol{J}(x)\nabla C(x)\equiv\boldsymbol{0}$. 由假设 H_1 知此时伪Poisson括号 $\{,.,\}_T$ 就是Poisson括号 $\{,.,\}_J$, 所以 $\boldsymbol{J}(x)\nabla C(x)\equiv\boldsymbol{0}$ 可进一步表示为 $\boldsymbol{X}_C\equiv\boldsymbol{0}$.

由以上推导可知, 命题1是命题2的特殊情况.

类似文献[2]中定理3.3.13, 有如下推论:

推论1　设在整个伪Poisson流形上, 秩$(\boldsymbol{T}(x))=t\,(t\leqslant n)$, 则恰好存在 $n-t$ 个线性无关的列向量 $\boldsymbol{k}_i(x)=(k_{i1}(x),\cdots,k_{in}(x))\,(i=1,\cdots,n-t)$, 使得 $\boldsymbol{k}_i(x)\boldsymbol{T}(x)\equiv\boldsymbol{0}$; 设矩阵 $\boldsymbol{K}(x)=(\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{k}_{n-t}^{\mathrm{T}})_{n\times(n-t)}$, 若 $\boldsymbol{K}(x)$ 可积, 即 $k_{ij}(x)=\dfrac{\partial A_j(x)}{\partial x_i}\,(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n-t)$, 则 $A_i(x)\,(i=1,\cdots,n-t)$ 是以 $\boldsymbol{T}(x)$ 为结构矩阵的伪Poisson流形的Casimir函数.

证明　$\boldsymbol{k}_i(x)\boldsymbol{T}(x)\equiv\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{T}}(x)\equiv\boldsymbol{0}$, 根据Frobenius定理即可得推论1.

3　利用Casimir函数构造扩张的广义哈密顿系统

考虑Van der Schaft等在1998年提出的如下一类仿射控制系统模型[4]:

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)]\nabla H(x)+\boldsymbol{G}(x)\boldsymbol{u},\tag{5}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(x)\nabla H(x).\tag{6}$$

其中: $x\in N\subset\mathbf{R}^n$($N$ 是某个流形)是状态变量; 光滑函数 $H(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 通常表示系统总贮存能量; $\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r$ 是端口变量, $\boldsymbol{u}$ 表示输入, $\boldsymbol{y}$ 表示输出; 内积 $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}\rangle$ 表示系统 Σ 与环境的能量交换流, 即能量供应速率, 例如电路中的电流与电压、机械系统中的力与速度等; $\boldsymbol{G}(x)=(\boldsymbol{g}_1(x),\cdots,\boldsymbol{g}_r(x))\in\mathbf{R}^{n\times r}$, $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(x)$ 表示转置; 互连矩阵 $\boldsymbol{J}(x)$ 是 $n\times n$ 的反对称矩阵, 即 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(x)=-\boldsymbol{J}(x)$; $\boldsymbol{R}(x)$ 是正定或半正定对称矩阵, 即 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(x)=\boldsymbol{R}(x)\geqslant 0$, 它描述的是系统能量因阻尼等引起的耗散部分; $\nabla H(x)$ 表示梯度. 所有的矩阵对于状态 x 都是光滑的.

研究一个系统在Lyapunov意义下的稳定, 关键是构造恰当的Lyapunov函数. 下面利用命题2来构造当控制参数 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 为常数时系统(5)的Lyapunov函数.

假设 H_2　$\mathrm{Im}\{\boldsymbol{G}(x)\}\subset\mathrm{Im}\{\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)\}$.

假设 H_3　$[\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)]$ 可逆, $x\in\mathbf{R}^n$.

记

$$\boldsymbol{K}(x)=-[\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)]^{-1}\boldsymbol{G}(x).\tag{7}$$

不失一般性, 假设系统(5)的平衡点是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 下面根据命题2的结果来讨论将系统(5)嵌入到一个广义哈密顿系统的2种情形.

文献[4]构造了(5),(6)的扩张系统如下:

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \xi\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}(x) & \boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)-\boldsymbol{G}(x)\\ -(\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)-\boldsymbol{G}(x))^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{J}_s(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(x) & \boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)\\ (\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x))^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_s(x)\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^T H_a}{\partial x}\\ \dfrac{\partial^T H_a}{\partial \xi}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x) & -\boldsymbol{G}(x)\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)) & \boldsymbol{J}_s(x)-\boldsymbol{R}_s(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^T H_a}{\partial x}\\ \dfrac{\partial^T H_a}{\partial \xi}\end{pmatrix},\tag{8}$$

其中 $H_a(x,\xi)=H(x)+H_c(\xi)$, $H_c\overset{\Delta}{=}-\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\xi$. 当 r 阶方阵 $\boldsymbol{J}_s(x)$, $\boldsymbol{R}_s(x)$ 满足

$$\boldsymbol{J}_s^{\mathrm{T}}(x)=-\boldsymbol{J}_s(x),\ \boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}(x)=\boldsymbol{R}_s(x)\tag{9}$$

时, 系统(8) 是一个广义哈密顿系统. 但文献[4] 没有进一步讨论函数 $\xi_j-A_j(x)$ $(j=1,\cdots,r)$ 在什么情况下是系统(8) 的 Casimir 函数, 以及原系统与一个叫做能源方程的系统的能量之和在什么情况下保持能量守恒的问题.

下面就这 2 个问题做进一步的研究.

首先根据命题 2 讨论系统(8) 存在 Casimir 函数的问题.

设

$$k_{ij}(x)=\frac{\partial A_j(x)}{\partial x_i}\qquad i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,r.\tag{10}$$

记 $\xi-\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_r\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_1(x)\\ \vdots\\ A_r(x)\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{d}(\xi-\boldsymbol{A}(x))=(-\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\quad \boldsymbol{I}_r)_{r\times(n+r)}$. 根据命题2 可知, $\xi-\boldsymbol{A}(x)$ 是系统(8) 的Casimir 函数的充要条件是:

$$(-\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\quad \boldsymbol{I}_r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x) & -\boldsymbol{G}(x)\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)(\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)) & \boldsymbol{J}_s(x)-\boldsymbol{R}_s(x)\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},\tag{11}$$

其中等式右边的 **0** 表示相应的零矩阵.

将(11) 式进一步展开, 得

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{G}(x)+\boldsymbol{J}_s(x)-\boldsymbol{R}_s(x)=\boldsymbol{0}.\tag{12}$$

又由(7) 式, 得

$$[\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x)]\boldsymbol{K}(x)=-\boldsymbol{G}(x).\tag{13}$$

将(13) 式两边乘以 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)$, 得 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{K}(x)-\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)=-\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{G}(x)$. 所以取 $\boldsymbol{J}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{K}(x)$, $\boldsymbol{R}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)$ 时, (9), (12) 式成立. 根据命题 2, $\xi-\boldsymbol{A}(x)$ 是系统(8) 的 Casimir 函数.

综合以上结论得如下命题:

命题 3　当 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 为常数且假设 H_2, H_3 成立时, $\xi-\boldsymbol{A}(x)$ 是系统(8) 的Casimir 函数的充分条件是:

$$\boldsymbol{J}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{K}(x),\ \boldsymbol{R}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x).$$

注 文献[4] 有与命题 3 相同的结论, 但证明方法不同.

在命题 3 的基础上还可以得到如下命题:

命题 4　当 $\boldsymbol{J}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{K}(x)$, $\boldsymbol{R}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)$ 时, 存在常数向量 $\boldsymbol{C}=(C_1,\cdots,C_r)^{\mathrm{T}}$, 使得水平集 $\xi=\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{C}$ 将系统(8) 的伪 Poisson 流形限制在伪 Poisson 子流形 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{J}(x)-\boldsymbol{R}(x))\cdot\nabla H_r(x)$ 上, 其中 $\boldsymbol{H}_r(x)=H(x)-\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{C})$. 系统(5) 的伪Poisson 流形是系统(8) 的伪 Poisson 流形的嵌入子流形. 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是系统(5) 当 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 为常数时的平衡点, 且 $\mathrm{Hess}(H_r(\bar{x}))$ 正定, 则 $H_r(x)$ 是系统(5) 的局部Lyapunov 函数.

证明　因为当 $\boldsymbol{J}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{J}(x)\boldsymbol{K}(x)$, $\boldsymbol{R}_s(x)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{K}(x)$ 时, $\xi-\boldsymbol{A}(x)$ 是系统(8) 的

Casimir 函数. 取水平集 $\xi = A(x) + C$, 由(11) 式及 $H_r(x) = H(x) - \bar{u}^{\mathrm{T}}(A(x) + C)$, 得 $\nabla H_r(x) = \nabla H(x) - K(x)\bar{u}$. 两边乘以$(J(x) - R(x))$, 得

$$(J(x) - R(x))\nabla H_r(x) = (J(x) - R(x))\nabla H(x) + G(x)\bar{u}. \tag{14}$$

显然, 系统(5) 的伪 Poisson 流形是系统(8) 的伪 Poisson 流型的嵌入子流形.

若 $\bar{x}$ 是系统(5) 当 $u = \bar{u}$ 为常数时的平衡点, 即$(J(\bar{x}) - R(\bar{x}))\nabla H(\bar{x}) + G(\bar{x})\bar{u} = \mathbf{0}$, 则根据(14) 式, 由$(J(\bar{x}) - R(\bar{x}))$ 可逆得 $\mathrm{d}H_r(\bar{x}) = \mathbf{0}$, 所以 $\bar{x}$ 是$H_r(x)$ 的极值点. 若还有 $\mathrm{Hess}(H_r(\bar{x}))$ 正定, 则$H_r(x)$ 在 $\bar{x}$ 处有局部极小植, 根据定义 4 可知, $H_r(x)$ 是系统(5) 的局部 Lyapunov 函数. 证毕.

下面进一步研究将系统(5) 扩张到广义哈密顿系统(8) 后, 在什么情况下保持能量守恒的问题, 也就是(8) 有实际物理意义的问题.

系统(8) 可以写成系统(5) 和下面的广义哈密顿控制系统的并:

$$\xi = (J_s(x) - R_s(x))\nabla H_c(\xi) + K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) - R(x))\nabla H(x), \tag{15}$$

其中 $u_s = K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) - R(x))\nabla H(x)$ 可以看作是输入. (15) 式称为系统(5) 的能源方程[5]. 添上(15) 式对应的输出

$$y_s = \nabla H_c(\xi) = -\bar{u}, \tag{16}$$

则(15) 和(16) 式组成一个端口控制的广义哈密顿系统. 它与环境的能量交换流是

$$u_s^{\mathrm{T}} y_s = \mathrm{d}H(x)(J(x) + R(x))K(x)\bar{u}.$$

因为系统(8) 是一个没有控制的广义哈密顿系统, 所以它与环境的能量交换流为 0. 也就是必须满足能量守恒方程 $u_s^{\mathrm{T}} y_s + \bar{u}^{\mathrm{T}} y = 0$, 即

$$\mathrm{d}H(x)(J(x) + R(x))K(x)\bar{u} + \bar{u}^{\mathrm{T}} y = 0. \tag{17}$$

(17) 式可以改写成

$$-\bar{u}^{\mathrm{T}}(K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) - R(x))\nabla H(x)) + \bar{u}^{\mathrm{T}} y = 0. \tag{18}$$

当

$$-K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) - R(x)) = -G^{\mathrm{T}}(x) \tag{19}$$

时, (18) 式成立. 又由(14) 式得

$$-K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) + R(x)) = -G^{\mathrm{T}}(x). \tag{20}$$

由(19), (20) 式得 $K^{\mathrm{T}}R(x) = \mathbf{0} \Rightarrow R(x)K(x) = \mathbf{0}$.

这时, (15) 式看作是系统(5) 的能源方程. 综合以上讨论, 得到下面的定理:

定理 1　当控制参数 $u = \bar{u}$ 为常数且假设 $\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ 成立时, 广义哈密顿控制系统(5) 和它的能源方程(15) 保持能量守恒的充分条件是 $R(x)K(x) = \mathbf{0}$.

下面讨论当 $R(x)K(x) \neq \mathbf{0}$时, 将系统(5) 嵌入到一个什么样的扩张系统才能使其和这个能源方程的总能量不变.

当 $R(x)K(x) \neq \mathbf{0}$ 时, 构造如下广义哈密顿系统:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(x) - R(x) & -G(x) \\ G^{\mathrm{T}}(x) & T_r(x) \end{pmatrix} \nabla H_a(x, \xi), \tag{21}$$

其中 $T_r(x) = J_s(x) \pm R_s(x)$ 待定, $J_s(x)$, $R_s(x)$, $H_a(x)$ 和前面的定义一样. 由(7) 式得

$$G^{\mathrm{T}}(x) = K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) + R(x)). \tag{22}$$

下面就 2 种情况加以讨论:

1) 若系统(21) 存在 Casimir 函数 $\xi - A(x)$, 由命题 2 和(22) 式得

$$(-K^{\mathrm{T}}(x) \quad I_r)\begin{pmatrix} J(x) - R(x) & -G(x) \\ K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) + R(x)) & T_s(x) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

展开后得 $-K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) - R(x)) + K^{\mathrm{T}}(x)(J(x) + R(x)) = \mathbf{0}$.

所以 $K^{\mathrm{T}}(x)R(x) = \mathbf{0} \Rightarrow R(x)K(x) = \mathbf{0}$, 与 $R(x)K(x) \neq \mathbf{0}$ 矛盾.

2) 若存在 Casimir 函数 $\xi + A(x)$, 则

$$\left(K^{\mathrm{T}}(x) \quad I_r\right)\begin{pmatrix} J(x)-R(x) & -G(x) \\ K^{\mathrm{T}}(x)(J(x)+R(x)) & T_s(x) \end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{23}$$

展开后得 $K^{\mathrm{T}}(x)(J(x)-R(x))+K^{\mathrm{T}}(x)(J(x)+R(x))=\mathbf{0}$.

所以 $K^{\mathrm{T}}(x)J(x)=\mathbf{0}\Rightarrow J(x)K(x)=\mathbf{0}$. 这时, 若取 $T_s(x)=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)$, 则(23) 式成立. 即 $R(x)K(x)\neq\mathbf{0}, J(x)K(x)=\mathbf{0}$ 时, 若 $T_s(x)=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)$, 则系统(21) 存在 Casimir 函数 $\xi+A(x)$.

同样, 当 $R(x)K(x)\neq\mathbf{0}, J(x)K(x)=\mathbf{0}$ 时, 若 $T_s(x)=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)$, 则系统(21) 可以写成系统(5) 和下面的广义哈密顿控制系统:

$$\dot{\xi}=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)\nabla H_c(\xi)+G(x)\nabla H(x), \tag{24}$$

其中输入 $\tilde{u}_s=G(x)\nabla H(x)=y$. 添上对应的输出 $\tilde{y}_s=\nabla H_c(\xi)=-\bar{u}$, 则

$$\tilde{u}\tilde{y}^{\mathrm{T}}+\bar{u}y^{\mathrm{T}}=0.$$

所以系统(5) 和(24) 保持能量守恒.

综合上面的讨论并结合命题 4, 于是得以下定理:

定理 2　当 $R(x)K(x)\neq\mathbf{0}, J(x)K(x)=\mathbf{0}$ 时, 若 $T_s(x)=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)$, 则系统(21) 存在 Casimir 函数 $\xi+A(x)$. 此时, 系统(5) 可以嵌入到非耗散的广义哈密顿系统(21), 而且保持能量守恒. 若取水平集 $\xi+A(x)=C_0$, $C_0=(C_{01},\cdots,C_{0r})^{\mathrm{T}}$, 这时系统(5) 的一个准 Lyapunov 函数是 $H_r(x)=H(x)-\bar{u}^{\mathrm{T}}(C_0-A(x))$; 若 $x=\mathbf{0}$ 是系统(5) 当 $u=\bar{u}$ 为常数时的平衡点, 且 $\mathrm{Hess}(H_r(0))$ 正定, 则 $H_r(x)=H(x)-\bar{u}^{\mathrm{T}}(C_0-A(x))$ 是系统(5) 的局部 Lyapunov 函数.

证明　由前面的讨论知定理 2 的前半部分成立. 当 $\mathrm{Hess}(H_r(0))$ 正定时, $H_r(x)$ 在 $x=\mathbf{0}$ 处取得极小值. 而且, 系统(5) 可以改写为 $\dot{x}=[J(x)-R(x)]\nabla H_r(x)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}H_r(x)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{d}H_r(x)R(x)\nabla H_r(x)\leqslant 0.$$

根据定义 4, $H_r(x)$ 是系统(5) 的局部 Lyapunov 函数. 证毕.

注　文献[4] 实际上只讨论了定理 1 的情况. 显然, 笔者改进了文献[4] 的主要结论.

4　举例

下面举例说明以上结论的应用. 文献[4] 中的举例实际是 $R(x)K(x)=\mathbf{0}$ 的情况, 现在举例 $R(x)K(x)\neq\mathbf{0}$ 的情况.

以下例题选自文献[1]. 文献[1] 在没有验证条件 $R(x)K(x)\neq\mathbf{0}$ 的情况下就利用文献[4] 的结果, 但经过验证, 文献[1] 中扩张后的系统并没有与原系统保持能量守恒, 故文献[1] 中对本例的讨论是不对的.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&b&0\\0&0&\frac{e}{c}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-a+cx_3\sin x_1\\ x_2\\ -c\cos x_1+\frac{cd}{e}x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{T_{d_0}}\end{pmatrix}u=$$

$$(J(x)-R(x))\nabla H(x)+g(x)u, \tag{25}$$

$$y=g^{\mathrm{T}}(x)\nabla H(x)=-\frac{c}{T_{d_0}}\cos x_1+\frac{cd}{T_{d_0}e}x_3.$$

其中: $H(x)=-cx_3\cos x_1-ax_1+\frac{cd}{2e}x_3^2+\frac{1}{2}x_2^2$; 控制参数 u 是某非 0 常数.

经过计算可知, $K(x)=\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{eT_{d_0}}\end{pmatrix}$, $J(x)K(x)=\mathbf{0}$, $R(x)K(x)=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{T_{d_0}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$, $T_s(x)=K^{\mathrm{T}}(x)R(x)K(x)=\frac{c}{eT_{d_0}^2}$. 根据定理 2, 考虑下面的扩张系统:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{T_{d_0}}\\0&0&\frac{1}{T_{d_0}}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&\frac{e}{c}&0\\0&0&0&-\frac{c}{eT_{d_0}^2}\end{pmatrix}\right)\nabla H_e(x_e),\tag{26}$$

其中 $H_e(x_e)=H(x)+H_s(\eta)=H(x)-u^{\mathrm{T}}\eta$.

根据命题2可知,系统(26)存在 Casimir 函数 $\eta+A(x)$. 因为

$$\mathrm{d}(\eta+A(x))(\boldsymbol{J}_d(x)-\boldsymbol{R}_d(x))=\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{eT_{d_0}}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&-b&0&0\\0&0&-\frac{e}{c}&-\frac{1}{T_{d_0}}\\0&0&\frac{1}{T_{d_0}}&\frac{c}{eT_{d_0}^2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

另外,系统(26)可以写成系统(25)和下列系统的并:

$$\dot{\eta}=\frac{c}{eT_{d_0}^2}\nabla H_s(\eta)+y.\tag{27}$$

系统(27)的输入是 $u_s=y$,添上对应的输出 $y_s=\nabla H_s(\eta)=-u$,这时 $u^{\mathrm{T}}y+u_s^{\mathrm{T}}y_s=0$. 故系统(26)满足能量守恒. 取水平集 $\eta+C(x)=c_0$,则限制在 $\mathbf{R}^3$ 上的哈密顿函数 $H_r(x)=-cx_3\cos x_1-ax_1+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{cd}{2e}x_3^2+\frac{cu}{eT_{d_0}}x_3-uc_0$ 是系统(26)的准 Lyapunov 函数.

设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是系统(25)的平衡点,即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足:

$$\begin{cases}\bar{x}_2=0,\\ a-c\bar{x}_3\sin\bar{x}_1=0,\\ -d\bar{x}_3+e\cos\bar{x}_1+\frac{1}{T_{d_0}}\bar{u}=0.\end{cases}$$

计算 $H_r(x)$ 的海塞矩阵,得

$$\mathrm{Hess}(H_r(x))=\begin{pmatrix}cx_3\cos x_1&0&c\sin x_1\\0&1&0\\c\sin x_1&0&\frac{cd}{e}\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Hess}(H_r(\bar{x}))$ 正定的充要条件是:

$$d\bar{x}_3\cos\bar{x}_1>e\sin^2\bar{x}_1.\tag{28}$$

所以,当(28)式成立时,$H_r(x)$ 是系统(25)关于平衡点 $\bar{x}$ 的局部 Lyapunov 函数.

5 结语

首先研究了伪 Poisson 流形的 Casimir 函数,给出了一个充要条件;然后利用所得结果研究扩张的广义哈密顿系统的构造问题,给出扩张的广义哈密顿系统存在 Casimir 函数且保持能量守恒的2个充分条件,并且当条件满足时给出了基于能量的局部准 Lyapunov 函数的具体表达式. 这样的构造更符合 Casimir 函数的定义,完善了文献[4]中的研究结论,它的物理意义明确,在系统的镇定及相关控制问题中起重要作用.

参考文献:

[1] CHENG D, XI Z, LU Q, et al. Geometric Structure of Generalized Hamiltonian Systems and Its Application [J]. Science in China (Se-

ries E) , 2000, 43(4): 365– 379.

[2] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] MARSDEN J, RATIU T. Introduction to Mechanics and Symmetry [M]. NY: Springer, 1994.

[4] MASCHKE B M, ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A J. Energy-Based Lyapunov Functions for Forced Hamiltonian Systems with Dissipation [A]. Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control [C]. Tampa, Florida USA, 1998.

[5] VAN DER SCHAFT A J, MASCHKE B M. The Hamiltonian Formulation of Energy Conserving Physical Systems with External Ports [J]. Archive fur Electronic and Ubertragungstechnik, 1995, 49: 362– 371.

Application of Casimir Functions to Generalized Hamiltonian Control System

YANG Xin-song, RUI Wei-guo

(Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi 661100, Yunnan China)

Abstract: The authors investigate Casimir functions on Pseudo-Poisson manifold and one necessary and sufficient condition is obtained for the existence of Casimir functions on Pseudo-Poisson manifold. As an application, by using Casimir functions, how to construct a corresponding augment generalized Hamiltonian system and the maintenance of energy-conservation are also concerned.

Key words: Pseudo-Poisson manifold; Casimir function; generalized Hamiltonian system of control; energy-conservation

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 12 页)

Request of Solution Sets of Logic Equational Group By Applying the Relation of Logic Equation Solution Sets

DING Dian-kun

(Public Class Department, Shandong University of Science and Technology, Taian 271019, Shandong China)

Abstract: The article gives some theories about the relations among solution sets of logic equations $\prod_{i=1}^{m}(F_i+\overline{G}_i)=1$, $\prod_{i=1}^{m}F_i\overline{G}_i=1$ and logic equational group $\begin{cases}F_1=G_1,\\ \quad\vdots\\ F_m=G_m.\end{cases}$ The following conclusion is obtained: if solution set of $\prod_{i=1}^{m}(F_i+\overline{G}_i)=1$ and $\prod_{i=1}^{m}F_i\overline{G}_i=1$ are S_1, S_2 separately, thus solution set of logic equational group $\begin{cases}F_1=G_2,\\ \quad\vdots\\ F_m=G_m\end{cases}$ is S_1-S_2.

Key words: logic equation; logic equational group; relation of solution set

(责任编辑　向阳洁)