第 28 卷　第 5 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 5
2007 年 9 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Sept. 2007

文章编号: 1007- 2985(2007)05- 0013- 03

$\overline{\mathbf{R}}^n$ 上 Möbius 变换群的不动点集*

戴滨林
(上海财经大学数学系, 上海　200433)

摘　要: 对高维 Möbius 变换群进行了研究, 得到了离散群不等式, 并给出了关于 $\overline{\mathbf{R}}^n$ 上 Möbius 变换群不动点集的定理.

关键词: Clifford 矩阵群; 非初等群; 离散群; Möbius 变换群
中图分类号: O174.2　　文献标识码: A

1　相关定义和主要结论

Clifford 代数 $\boldsymbol{A}_n$ 是由 $1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上生成的非交换结合代数, 其中 $\boldsymbol{e}_j (j = 1, 2, \cdots, n-1)$ 满足 $\boldsymbol{e}_j^2 = -1, \boldsymbol{e}_h \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_h (h \neq k)$. $\boldsymbol{A}_n$ 中任一元素 $\boldsymbol{a}$ 能唯一地表示成

$$\boldsymbol{a} = a_0 + \sum a_v \boldsymbol{E}_v.$$

其中: $a_0, a_v \in \mathbf{R}$; $\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{e}_{v_1} \boldsymbol{e}_{v_2} \cdots \boldsymbol{e}_{v_p} (0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_p < n-1)$; $\sum$ 表示在所有多重指标上取和.

称特殊形式的 Clifford 数 $\boldsymbol{x} = x_0 + x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{n-1} \boldsymbol{e}_{n-1}$ 为向量, 这些向量构成一个 n 维子空间 $\boldsymbol{V}^n$, 常将 $\boldsymbol{V}^n$ 等同于 $\mathbf{R}^n$.

定义 1　$\boldsymbol{A}_n$ 中任一元素 $\boldsymbol{a}$, 有 $|\boldsymbol{a}|^2 = a_0^2 + \sum_v a_v^2$. 对任意 $\boldsymbol{a} = a_0 + \sum a_v \boldsymbol{E}_v \in \boldsymbol{A}_n$, 有下面 3 种重要的对合运算:

(i) $'$ 运算. $\boldsymbol{a}' = a_0 + \sum a_v \boldsymbol{E}'_v$, 其中 $\boldsymbol{E}'_v = (-\boldsymbol{e}_{v_1})(-\boldsymbol{e}_{v_2}) \cdots (-\boldsymbol{e}_{v_p}) = (-1)^p \boldsymbol{E}_v$;

(ii) $*$ 运算. $\boldsymbol{a}^* = a_0 + \sum a_v \boldsymbol{E}_v^*$, 其中 $\boldsymbol{E}_v^* = \boldsymbol{e}_{v_p} \boldsymbol{e}_{v_{p-1}} \cdots \boldsymbol{e}_{v_1} = (-1)^{p(p-1)/2} \boldsymbol{E}_v$;

(iii) $-$ 运算. $\overline{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a}')^* = (\boldsymbol{a}^*)'$.

易知, $'$ 运算确定了 $\boldsymbol{A}_n$ 的一个自同构, 而 $*$ 运算和 $-$ 运算确定了 $\boldsymbol{A}_n$ 的反自同构, 有 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$, $(\boldsymbol{ab})' = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{b}'$, $(\boldsymbol{ab})^* = \boldsymbol{b}^* \boldsymbol{a}^*$.

定义 2　$\boldsymbol{A}_n$ 的中心 $\mathscr{Z}_n$ 由 $\boldsymbol{A}_n$ 中所有能与 $\boldsymbol{A}_n$ 中任意元可以交换的元组成.

定义 3　Clifford 群 Γ_n 由 $\boldsymbol{A}_n$ 中所有可以表示为 $\mathbf{R}^n$ 中有限多个非零向量乘积的元构成.

定义 4　矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ 称为 n 维 Clifford 矩阵, 如果下面条件满足:

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \Gamma_n \cup \{0\}$;

(ii) $\boldsymbol{ad}^* - \boldsymbol{bc}^* = 1$;

(iii) 如果 $\boldsymbol{c} \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{ac}^{-1}$ 且 $\boldsymbol{c}^{-1}\boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^n$;

(iv) 如果 $\boldsymbol{b} \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{db}^{-1}$ 且 $\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$.

* 收稿日期: 2007- 07- 10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571048)
作者简介: 戴滨林(1964-), 男, 湖南江华人, 上海财经大学数学系副教授, 博士, 主要从事复分析研究.

用 $SL(2,\Gamma_n)$ 表示全体 n 维 Clifford 矩阵关于矩阵乘法构成的群, 对任意 Möbius 变换 $g\in M(\overline{\mathbf{R}}^n)$, 有 $g(x)=(ax+b)(cx+d)^{-1}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\Gamma_n)$.

对 Möbius 变换 $g\in M(\mathbf{R}^n)/\{Id\}$, 有:

定义 5 如果 g 共轭于 $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$, 其中 $\gamma\in\mathbf{R}/\{\pm1,0\}$, 那么 g 称为双曲元.

定义 6 如果 g 共轭于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $t\in\mathbf{R}^n/\{0\}$, 那么 g 称为严格抛物元.

在文中采用的记号和术语与文献[1-6]相同, 例如 Möbius 群 $M(\overline{\mathbf{R}}^n)$、离散群、Kleinian 子群和 Fix($f$) 等等.

采用如下由文献[3]给出的初等群定义:

定义 7 如果 G 在 $\overline{H}^{n+1}$ 中有一个有限轨道, 那么称 G 是初等的; 否则, G 是非初等的.

定义 8 设 $f=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\Gamma_n)$, 那么 $\mathrm{tr}(f)=a+d^*$ 称为 f 的迹[4].

定义 9 $M(\overline{\mathbf{R}}^n)$ 的子群 G 称为纯双曲群, 当且仅当 G 的任意一个非单位元都是双曲元.

定义 10 设 $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\Gamma_n)$, 那么

$$\|g\|^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2.$$

笔者研究了由文献[7]给出的关于不动点集的命题:

命题 1 假设一个 $M(\overline{\mathbf{R}}^2)$ 的 Kleinian 子群 $<f,g>$ 满足

$$|\mathrm{tr}^2 f-4|+|\mathrm{tr}[f,g]-2|<1,$$

那么 Fix(f) 是 g 的不动点集.

笔者的主要结果是将上述命题推广到了高维 Möbius 变换群 $M(\overline{\mathbf{R}}^n)$, 得到如下定理:

定理 1 设 $f=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\in SL(2,\Gamma_n)$, $\Gamma=<f,g>$ 是纯双曲 Möbius 变换群, 满足

$$\|f-I\|\cdot\|g-I\|<\sqrt{2}-1,$$

那么 Fix(f) 是 g 的不动点集.

定理 2 设 $f,g\in M(\overline{\mathbf{R}}^n)$, f 是严格抛物元, $\Gamma=<f,g>$ 是离散群, 如果存在点 $x\in H^{n+1}$ 满足

$$\sinh(d(x,f(x))/2)\sinh(d(x,gfg^{-1}(x))/2)<1/4,$$

那么 Fix(f) 是 g 的不动点集(其中 d 表示双曲度量).

2 主要定理的证明

在证明定理 1 之前, 先证明如下引理:

引理 1 设 $f=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\in SL(2,\Gamma_n)$, $\Gamma=<f,g>$ 是非初等纯双曲 Möbius 变换群, 那么

$$\|f-I\|\cdot\|g-I\|\geqslant\sqrt{2}-1.$$

证明 显然可以假设

$$g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}\qquad u\in\mathbf{R}\setminus\{\pm1,0\},$$

而 $x=\min\{|\mathrm{tr}^2(f)-4|,|\mathrm{tr}^2(g)-4|\}$.

如果 $x\leqslant2\sqrt{2}-2$, 因为 $f,g\in M(\overline{\mathbf{R}}^n)$ 生成一个非初等纯双曲群(类似文献[8-9]), 那么

$$|\mathrm{tr}^2(f)-4|+|\mathrm{tr}[f,g]-2|\geqslant1,$$

且

$$|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{g})-4|+|\operatorname{tr}[\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}]-2|\geqslant 1.$$

于是

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|^2\cdot\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant|\operatorname{tr}[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]-2|\geqslant 1-|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{f})-4|,$$

且

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|^2\cdot\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant|\operatorname{tr}[\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}]-2|\geqslant 1-|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{g})-4|.$$

从而

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|^2\cdot\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant 1-(2\sqrt{2}-2)=(\sqrt{2}-1)^2.$$

如果 $x\geqslant 2\sqrt{2}-2$, 那么可得

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant\frac{1}{2}|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{f})-4|,\quad\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant\frac{1}{2}|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{g})-4|,$$

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|^2\cdot\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|^2\geqslant\frac{1}{4}|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{f})-4|^2|\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{g})-4|\geqslant(\sqrt{2}-1)^2.$$

引理 1 证毕.

定理 1的证明　因为 $\Gamma=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 是纯双曲Möbius变换群, 所以 $\mathrm{Card}(L(\Gamma))\geqslant 2$. 如果 $\mathrm{Card}(L(\Gamma))=2$, 假设 $L(G)=\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0\}=\mathrm{Fix}(\boldsymbol{f})$, 那么 $\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0\}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 不动点集; 如果 $L(G)$ 有至少 3 个点, 那么由引理 1 可得 $\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{I}\|\cdot\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{I}\|\geqslant\sqrt{2}-1$. 矛盾.

定理 1 得证.

定理 2 的证明　由文献[10] 的定理 2 可知 $\{\Gamma\}=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 是离散初等群, 那么 $\mathrm{Card}(L(\Gamma))=1$. 假设 $L(G)=\{\boldsymbol{x}_0\}=\mathrm{Fix}(\boldsymbol{f})$, 那么 $\{\boldsymbol{x}_0\}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 不动点集.

定理 2 得证.

参考文献:

[1] FANG A, NAI B. On the Discreteness and Convergence in n-Dimensional Möbius Groups [J]. J. London Math. Soc., 2000, 61(2): 761-773.

[2] AHLFORS L V. On the Fixed Points of Möbius Transformations in $\mathbf{R}^n$ [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 1985, 10: 15-27.

[3] BEARDON A F. The Geometry of Discrete Groups [M]. New York, Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[4] WATERMAN P L. Möbius Transformations in Several Dimensions [J]. Adv. in Math., 1993, 101: 87-113.

[5] WATERMAN P L. Purely Elliptic Möbius Groups [A]. Holomorphic Functions and Molulli, II [C]. New York-Berlin: Springer, 1988.

[6] JØRGENSEN T. On Discrete Groups of Möbius Transformations [J]. Amer. J. Math., 1976, 98(3): 739-749.

[7] MATSUZAKI K, TANIGUCHI M. Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups [M]. Oxford Univ. Press, 1998.

[8] JIANG Y. Doctor Thesis [M]. Changsha: Hunan University, 1996.

[9] JØRGENSEN T. A Note on Subgroups of $SL(2,C)$ [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1977, 28(2): 209-212.

[10] NAI B, ZHENG S. Displacement Functions and Jorgensen's Inequality in Several Dimensions [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1997, 31(2): 16-19.

Invariant Set for Möbius Transformation Groups in $\overline{\mathbf{R}}^n$

DAI Bin-lin

(Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: This paper studies the Möbius Transformations groups in $\overline{\mathbf{R}}^n$, obtains several inequalities on discrete groups and gives several theorems about invariant set.

Key words: Clifford groups; nonelementary groups; discrete groups; Möbius groups

(责任编辑　向阳洁)